DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞLARIN İZOLE KOPMA DERECESİ

Halil İbrahim YILDIRIM

Eylül, 2024

İZMİR

AĞLARIN İZOLE KOPMA DERECESİ

Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi

Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı, Bilgisayar Bilimleri Programı

Halil İbrahim YILDIRIM

Eylül, 2024

İZMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

HALİL İBRAHİM YILDIRIM tarafından **DOÇ.DR. ZEYNEP NİHAN BERBERLER** yönetiminde hazırlanan **"AĞLARIN İZOLE KOPMA DERECESİ"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

.....

Doç.Dr. Zeynep Nihan BERBERLER

Danışman

.....	.....
Dr.Öğr.Üyesi Hande Tunçel GÖLPEK	Dr.Öğr.Üyesi Kazım ERDOĞDU
Jüri Üyesi	Jüri Üyesi

Prof. Dr. Okan FISTIKOĞLU

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Zeynep Nihan BERBERLER'e, yüksek lisans eğitimim boyunca yardım, bilgi ve tecrübeleri ile bana sürekli destek olan başta Prof. Dr. Murat Erşen BERBERLER olmak üzere tüm bölüm hocalarıma, bu süreçte maddi ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme sonsuz teşekkürler ederim.

Halil İbrahim YILDIRIM

AĞLARIN İZOLE KOPMA DERECESİ

ÖZ

İletişim ağları merkezlerden ve merkezler arasındaki iletişimi sağlayan bağlantılardan oluşur. Bir bağlantı ağının zedelenebilirliği ağdaki merkezlerden veya bağlantı hatlarından bazılarının hasar görmesiyle birlikte ağ parçalanana kadar ağın dayanma gücünü ölçer. Ağların zedelenebilirliğinin hesaplanması için bağlantılılık sayısı, dayanıklılık, saçılma sayısı, bütünlük, kararlılık, kopma derecesi gibi çok sayıda ölçüm tanımlanmıştır. İzole kopma derecesi bir ağın zedelenebilirliğinin hesaplanması için önerilmiş yeni bir ölçümdür.

Bu tezde, öncelikle izole kopma derecesi ile diğer zedelenebilirlik ölçümleri ve çizge parametreleri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Daha sonra $2K_2$ içermeyen çizgelerin, dikenli ve orta çizgelerin izole kopma dereceleri hesaplanmıştır.

Anahtar kelimeler: Zedelenebilirlik, bağlantılılık, izole kopma derecesi, dikenli çizge, orta çizge

ISOLATED RUPTURE DEGREE OF NETWORKS

ABSTRACT

Communication networks are composed of hubs and links that provides communication between the hubs. The vulnerability of an interconnection network measures the resistance of a network to a disruption in operation after the failure of certain processors or communication links. For determining the vulnerability of networks a number of measures have been proposed such as connectivity, toughness, scattering number, integrity, tenacity, rupture degree. Isolated rupture degree is a novel proposed measure to determine the vulnerability of a network.

In this thesis, the relations between isolated rupture degree, and other vulnerability measures and graph parameters are investigated firstly. Then, isolated rupture degrees of $2K_2$ -free graphs, thorny and middle graphs are computed.

Keywords: Vulnerability, connectivity, isolated rupture degree, thorny graph, middle graph

İÇİNDEKİLER

Sayfa

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU ii
TEŞEKKÜR iii
ÖZ iv
ABSTRACT v
ŞEKİLLER LİSTESİ vii
TABLOLAR LİSTESİ viii

BÖLÜM BİR - GİRİŞ 1

BÖLÜM İKİ - TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER 2

BÖLÜM ÜÇ - İZOLE KOPMA DERECESİ 5

BÖLÜM DÖRT - İZOLE KOPMA DERECESİ VE ZEDELENEBİLİRLİK PARAMETRELERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ 7

BÖLÜM BEŞ - $2K_2$ İÇERMEYEN ÇİZGELERİN İZOLE KOPMA DERECESİ 17

BÖLÜM ALTI - DİKENLİ ÇİZGELERİN İZOLE KOPMA DERECESİ 19

BÖLÜM YEDİ - ORTA ÇİZGELERİN İZOLE KOPMA DERECESİ 24

BÖLÜM SEKİZ - SONUÇLAR 33

KAYNAKLAR 34

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1 G çizgesi 5

Şekil 6.1 $n = 4$ ve $m = 3$ için düzenli tırtıl çizge $T_{4,3}$ 23

Şekil 7.1 G ve $M(G)$ çizgeleri 24

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 3.1 S kümesi ve $i(G-S)$, $m(G-S)$ ve $i(G-S)-|S|-m(G-S)$ değerleri 6

BÖLÜM BİR
GİRİŞ

İletişim ağları merkezlerden ve merkezler arasındaki iletişimi sağlayan bağlantılardan oluşur. Bir bağlantı ağının zedelenebilirliği ağdaki merkezlerden veya bağlantı hatlarının bazılarının hasar görmesiyle birlikte iletişim kopana kadar ağdaki dayanıklılığı ölçer. Ağın zedelenebilirliği ağ tasarımcıları için önemli bir ölçümdür. Bir iletişim ağının tasarımı yüksek dayanıklılık ve güvenilirlik veya düşük zedelenebilirlik gerektirir. Dolayısıyla, iletişim ağları dışarıdan gelen saldırıların etkisiyle kolayca hasarlanmayacak şekilde yapılandırılmalıdır. Ağın hasar görmesi durumunda da ağ yeniden yapılandırılabilir olarak sağlam şekilde tasarlanmış olmalıdır. Bozulmaya uğrayan ağların zedelenebilirliğinin analizinde, ağda işlev dışı kalan eleman sayısı, geriye kalan birleştirilmiş alt ağların sayısı ve iletişimin devam ettiği alt ağlardan en fazla elemanı olan alt ağdaki eleman sayısı başta olmak üzere üç önemli nicelik vardır.

Bir iletişim ağında bulunan merkezler çizgenin tepelerine, bağlantı hatları da çizgenin ayrıtlarına karşılık gelecek şekilde ağ, yönsüz ve ağırlıklandırılmamış çizge ile modellenebilir. Bu durumda, ağların zedelenebilirliğinin bahsi geçen üç niceliğe dayalı olarak ölçülmesi için bağlantılılık sayısı, dayanıklılık (Chvátal, 1973), saçılma sayısı (Jung, 1978), bütünlük (Barefoot, Entringer, ve Swart, 1987), kararlılık (Cozzens, Moazzami, ve Stueckle, 1995), kopma derecesi (Li, Zhang ve Li, 2005) olmak üzere zedelenebilirlik ölçümleri tanımlanmıştır. İzole kopma derecesi Li (2015) tarafından tanımlanmış olan yeni bir zedelenebilirlik ölçümüdür. İzole kopma derecesinin ağ topolojisi olarak ele alınan çizgelerin zedelenebilirliğinin ölçümünde ayırt edici ve gerekli bir parametre olması detaylı olarak açıklanmıştır.

Bu çalışmanın izleyen bölümünde bu tezde yararlanılan genel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde izole kopma derecesi tanımlanmıştır. Dördüncü bölümünde, izole kopma derecesi ile diğer bilinen bazı zedelenebilirlik ölçümleri ve çizge parametreleri arasındaki alt ve üst sınır değerleri araştırılmıştır. Diğer bölümlerde $2K_2$ içermeyen çizgelerin, dikenli ve orta çizgelerin izole kopma dereceleri hesaplanmıştır.

BÖLÜM İKİ
TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde bu tezde kullanılan genel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Bu tezde yönlendirilmemiş basit çizgeler üzerinde çalışılmıştır.

Tanım 2.1: (West, 2001) Her tepe çifti arasında en az bir yol bulunan çizgeye birleştirilmiş çizge denir.

Tanım 2.2: (West, 2001) $G = (V(G), E(G))$ çizgesi için $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ olacak şekilde $H = (V(H), E(H))$ çizgesine G çizgesinin alt çizgesi denir ve $H \subset G$ ile gösterilir.

Tanım 2.3: (West, 2001) G çizgesinin $G[S]$ etkilenmiş alt çizgesi boştan farklı $S \subseteq V(G)$ tepeler kümesini ve G çizgesinde S kümesinde bulunan her tepe çifti arasındaki ayrıtları içeren çizgedir.

Tanım 2.4: (Bondy ve Murty, 1976) Birleştirilmiş çevre içermeyen çizgeye ağaç denir.

Tanım 2.5: (West, 2001) $v \in V(G)$ olmak üzere v tepesinin derecesi v tepesine bitişik olan ayrıtların sayısıdır ve $\deg(v)$ ya da $deg_G(v)$ olarak gösterilir.

Tanım 2.6: (Bondy ve Murty, 1976) $v \in V(G)$ için $\deg(v) = 0$ ise v tepesi izole tepe olarak adlandırılır.

Tanım 2.7: (Chartrand ve Lesniak, 1996) $\delta(G) = min\{deg(v) | v \in V(G)\}$ olmak üzere $\delta(G)$ değerine G çizgesinin minimum tepe derecesi denir.

Tanım 2.8: (West, 2001) $v \in V(G)$ için v tepesinin komşuluğu veya açık komşuluğu $N(v) = N_G(v) = \{u \in V(G) | uv \in E(G)\}$ şeklinde tanımlanır. $S \subseteq V(G)$ olmak üzere S kümesinin açık komşuluğu ise $N_G(S) = \cup_{v \in S} N(v)$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.9: (West, 2001) Birleştirilmemiş G çizgesinin izole tepe veya birleştirilmiş olan her alt çizgesi G çizgesinin bileşeni olarak adlandırılır.

Tanım 2.10: (Bondy ve Murty, 1976) G_1 ve G_2 çizgeleri tepe kümeleri ayrık olan iki çizge olsun. Sırasıyla, $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ ve $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ tepeler ve

ayrıtlar kümesine sahip olan $G = G_1 \cup G_2$ çizgesine G_1 ve G_2 çizgelerinin birleşimi denir. n $(n \geq 2)$ adet H çizgesinin ayrık kopyasından oluşan G çizgesi $G = nH$ ile gösterilir.

Tanım 2.11: (West, 2001) $S \subseteq V(G)$ olmak üzere $G - S$ alt çizgesi birleştirilmemiş bir çizge veya sadece tek bir izole tepeden oluşan bir çizge ise S kümesine kesim küme denir.

Tanım 2.12: (Bondy ve Murty, 1976) $S \subseteq V(G)$ olmak üzere, eğer S kümesindeki hiçbir tepe çifti G çizgesinde birbirine komşu değil ise S kümesine G çizgesinin bağımsız kümesi denir. Eğer $|S'| > |S|$ olacak şekilde G çizgesi $S' \subseteq V(G)$ bağımsız kümesi içermiyorsa, o zaman S bağımsız kümesine maksimum bağımsız küme denir. G çizgesinin maksimum bağımsız kümesindeki tepelerin sayısına G çizgesinin $\beta(G)$ bağımsızlık sayısı denir.

Tanım 2.13: (Bondy ve Murty, 1976) $S \subseteq V(G)$ olmak üzere, eğer G çizgesinin her ayrıtının en az bir tepesi S kümesinde bulunuyorsa S kümesine G çizgesinin örtü kümesi denir. Eğer $|S'| < |S|$ olacak şekilde G çizgesi $S' \subseteq V(G)$ örtü kümesi içermiyor ise o zaman S örtü kümesine minimum örtü kümesi denir. G çizgesinin minimum örtü kümesindeki tepelerin sayısına G çizgesinin $\alpha(G)$ örtü sayısı denir.

Teorem 2.1: (Bondy ve Murty, 1976) n tepeli birleştirilmiş G çizgesi için

$$\alpha(G) + \beta(G) = n \tag{2.1}$$

olur.

Teorem 2.2: (Bondy ve Murty, 1976) G, n tepeli ve e ayrıtlı birleştirilmiş bir çizge ise

$$n \leq e + 1 \tag{2.2}$$

olur.

Teorem 2.3: (Bondy ve Murty, 1976) n tepeli ve e ayrıtlı bir ağaç için

$$n = e + 1 \tag{2.3}$$

olur.

BÖLÜM ÜÇ
İZOLE KOPMA DERECESİ

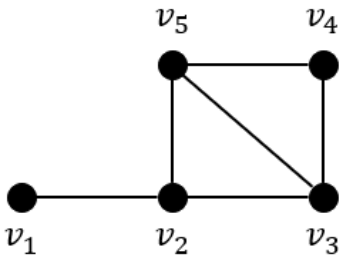
Bu bölümde, bir çizgenin izole kopma derecesinin tanımlanmıştır ve izole kopma derecesinin hesaplanması gösterilmiştir.

Tanım 3.1: (Li, 2015) G tam çizge olmayan birleştirilmiş bir çizge ve $C(G)$, G çizgesinin tüm kesim kümelerinin kümesi olmak üzere, $S \in C(G)$ olsun. $G - S$ çizgesinin izole tepe olan bileşenlerinin sayısı $i(G - S)$ ve en fazla elemana sahip bileşeninde bulunan tepelerin sayısı $m(G - S)$ olmak üzere G çizgesinin izole kopma derecesi

$$ir(G) = \max\{i(G - S) - |S| - m(G - S) : S \in C(G)\} \qquad (3.1)$$

olarak tanımlanır. $ir(G) = i(G - S) - |S| - m(G - S)$ için $S \in C(G)$ kümesine ir -kümesi denir. Ayrıca n tepeli K_n tam çizgenin izole kopma derecesi $ir(K_n) = 1 - n$ değeri ile tanımlanmıştır.

Örnek 3.1: Şekil 3.1'deki 5 tepeli ve 6 ayrıtlı birleştirilmiş G çizgesinin izole kopma derecesi hesaplanmıştır:



Şekil 3.1 G çizgesi

$S \in C(G)$ olmak üzere, G çizgesinden atılan S kesim kümesine bağlı olarak elde edilen $i(G-S)$, $m(G-S)$ ve $i(G-S)-|S|-m(G-S)$ değerleri Tablo 3.1'de verilmiştir.

Tablo 3.1 S kümesi ve $i(G-S)$, $m(G-S)$ ve $i(G-S)-|S|-m(G-S)$ değerleri

$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{i(G-S)}$	$\boldsymbol{m(G-S)}$	$\boldsymbol{i(G-S)-\lvert S\rvert-m(G-S)}$
$\{v_2\}$	1	3	-3
$\{v_2,v_3\}, \{v_2,v_4\},$ $\{v_2,v_5\}, \{v_3,v_5\}$	1	2	-3
$\{v_1,v_3,v_5\}, \{v_2,v_3,v_4\},$ $\{v_2,v_3,v_5\}, \{v_2,v_4,v_5\}$	2	1	-2
$\{v_1,v_2,v_3,v_4\}, \{v_1,v_2,v_3,v_5\},$ $\{v_1,v_2,v_4,v_5\}, \{v_1,v_3,v_4,v_5\},$ $\{v_2,v_3,v_4,v_5\}$	1	1	-4

Tablo 3.1'de elde edilen $i(G-S)-|S|-m(G-S)$ değerleri içerisinden en büyük olanı G çizgesinin izole kopma derecesini verir; $ir(G) = \max\{i(G-S)-|S|-m(G-S)\} = \max\{-3,-2,-4\} = -2$

$S_1 = \{v_1,v_3,v_5\}$, $S_2 = \{v_2,v_3,v_4\}$, $S_3 = \{v_2,v_3,v_5\}$, $S_4 = \{v_2,v_4,v_5\}$ kümeleri G çizgesinin ir-kümeleridir.

BÖLÜM DÖRT
İZOLE KOPMA DERECESİ VE ZEDELENEBİLİRLİK PARAMETRELERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ

Bu bölümde, izole kopma derecesi ile diğer zedelenebilirlik ölçümleri ve çizge parametreleri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

Tanım 4.1: (Buckley ve Harary, 1990) Birleştirilmiş G çizgesinin bileşenlerinin sayısı $w(G)$ olmak üzere G çizgesinin $K(G)$ bağlantılılık sayısı

$$K(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| : w(G-S) \geq 2\} \tag{4.1}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Teorem 4.1: G çizgesi tam çizge olmayan n tepeli birleştirilmiş bir çizge ise

$$ir(G) \geq K(G) - \alpha(G) - n + 2 \tag{4.2}$$

olur.

İspat: S kümesi, G çizgesinin bir tepe kesim kümesi olsun. G çizgesi birleştirilmiş bir çizge olduğundan

$$|S| \geq K(G) \tag{4.3}$$

olur. Dolayısıyla,

$$i(G-S) \geq 1 \tag{4.4}$$

ve

$$m(G-S) \leq n - |S| - 1 \leq n - K(G) - 1 \tag{4.5}$$

olacağından,

$$i(G-S) - |S| - m(G-S) \geq 1 - |S| - (n - K(G) - 1) \tag{4.6}$$

$$i(G-S)-|S|-m(G-S)\geq 2-|S|-n+K(G) \quad (4.7)$$

elde edilir.

$|S|\leq \alpha(G)$ olduğundan,

$$i(G-S)-|S|-m(G-S)\geq 2-|S|-n+K(G) \quad (4.8)$$

$$i(G-S)-|S|-m(G-S)\geq 2-\alpha(G)-n+K(G) \quad (4.9)$$

$$\max\{i(G-S)-|S|-m(G-S)\}\geq \max\{2-\alpha(G)-n+K(G)\} \quad (4.10)$$

$$ir(G)\geq 2-\alpha(G)-n+K(G) \quad (4.11)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1, Teorem 4.1'den yararlanılarak doğrudan elde edilir.

Sonuç 4.1: Tam çizge olmayan n tepeli birleştirilmiş G çizgesi için eğer $K(G) = \alpha(G)$ ise, o zaman

$$ir(G)\geq 2-n \quad (4.12)$$

olur.

Teorem 4.2: (Chartrand ve Harary, 1968) Tam çizge olmayan n tepeli birleştirilmiş G çizgesi için

$$K(G)\geq 2\delta(G)-n+2 \quad (4.13)$$

olur.

Sonuç 4.2: Tam çizge olmayan n tepeli birleştirilmiş G çizgesi için

$$ir(G)\geq 2\delta(G)-\alpha(G)-2n+4 \quad (4.14)$$

olur.

İspat: Teorem 4.1-4.2'den,

$$ir(G) \geq K(G) - \alpha(G) - n + 2 \tag{4.15}$$

$$ir(G) \geq (2\delta(G) - n + 2) - \alpha(G) - n + 2 \tag{4.16}$$

$$ir(G) = 2\delta(G) - 2n + 4 - \alpha(G) \tag{4.17}$$

eşitliği ile ispat tamamlanır.

Tanım 4.2: (Wang, Yang, Lin, Li, ve Hu, 2011) Tam çizge olmayan birleştirilmiş G çizgesinin izole saçılma sayısı

$$isc(G) = max\{i(G - S) - |S| : S \in C(G)\} \tag{4.18}$$

olarak tanımlanır.

Yardımcı Teorem 4.1: (Wang vd., 2011) n tepeli birleştirilmiş bir G çizgesi için eğer $|V(G)| > 1$ ise, o zaman

$$2 - n \leq isc(G) \leq n - 2 \tag{4.19}$$

olur.

Teorem 4.3: G çizgesi tam çizge olmayan n tepeli birleştirilmiş bir çizge olmak üzere

$$ir(G) \leq isc(G) - 1 \tag{4.20}$$

olur.

İspat: X, G çizgesinin bir tepe kesim kümesi olsun. O halde, $isc(G)$ tanımından

$$i(G - X) - |X| \leq isc(G) \tag{4.21}$$

olur.

$$m(G - X) \geq \frac{n - |X|}{w(G - X)} \tag{4.22}$$

ve

$$i(G-X) \leq w(G-X) \tag{4.23}$$

olduğundan

$$-m(G-X) \leq \frac{-n+|X|}{i(G-X)} \tag{4.24}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$i(G-X)-|X|-m(G-X) \leq i(G-X)-|X|+\frac{|X|-n}{i(G-X)} \tag{4.25}$$

$$i(G-X)-|X|-m(G-X)=\frac{\big(i(G-X)\big)^2-|X|(i(G-X)-1)-n}{i(G-X)} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} & i(G-X)-|X|-m(G-X) \\ \leq\ & \frac{\big(i(G-X)\big)^2+\big(isc(G)-i(G-X)\big)(i(G-X)-1)-n}{i(G-X)} \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$i(G-X)-|X|-m(G-X)=isc(G)+1-\frac{isc(G)+n}{i(G-X)} \tag{4.28}$$

olur.

$$|X|+m(G-X) \leq n+1-w(G-X) \tag{4.29}$$

eşitsizliği açıktır.

$$i(G-X) \leq w(G-X) \tag{4.30}$$

olduğundan,

$$|X|+m(G-X) \leq n+1-i(G-X) \tag{4.31}$$

elde edilir. Buradan,

$$|X| \leq n+1-i(G-X)-m(G-X) \tag{4.32}$$

olur. $isc(G)$ tanımından,

$$isc(G) \geq i(G-X) - |X| \tag{4.33}$$

olduğundan,

$$isc(G) \geq 2i(G-X) - n - 1 + m(G-X) \tag{4.34}$$

elde edilir. $m(G-X) \geq 1$ olduğundan,

$$isc(G) \geq 2i(G-X) - n \tag{4.35}$$

ve dolayısıyla

$$i(G-X) \leq \frac{n+isc(G)}{2} \tag{4.36}$$

olur. Yardımcı Teorem 4.1'den,

$$n + isc(G) > 0 \tag{4.37}$$

olduğu açıktır. O halde,

$$i(G-X) - |X| - m(G-X) \leq isc(G) + 1 - \frac{isc(G)+n}{i(G-X)} \tag{4.38}$$

$$i(G-X) - |X| - m(G-X) \leq isc(G) + 1 - \frac{2(isc(G)+n)}{n+isc(G)} \tag{4.39}$$

$$i(G-X) - |X| - m(G-X) = isc(G) - 1 \tag{4.40}$$

olur. X, G çizgesinin bir tepe kesim kümesi olduğundan, izole kopma derecesinin tanımından

$$ir(G) \leq isc(G) - 1 \tag{4.41}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.4: G çizgesi tam çizge olmayan n tepeli birleştirilmiş bir çizge olmak üzere

$$ir(G) \geq 2isc(G) + 2K(G) - n - 1 \tag{4.42}$$

olur.

İspat: X, G çizgesinin bir kesim kümesi olsun. $ir(G)$ tanımından

$$ir(G) \geq i(G - X) - |X| - m(G - X) \tag{4.43}$$

olur.

$$|X| + m(G - X) \leq n + 1 - w(G - X) \tag{4.44}$$

ve

$$i(G - X) \leq w(G - X) \tag{4.45}$$

olduğundan

$$|X| + m(G - X) \leq n + 1 - i(G - X) \tag{4.46}$$

elde edilir. O halde,

$$ir(G) \geq i(G - X) + i(G - X) - n - 1 \tag{4.47}$$

olur ve bu eşitsizlikten

$$i(G - X) \leq \frac{ir(G)+n+1}{2} \tag{4.48}$$

elde edilir. $|X| \geq K(G)$ olduğundan,

$$i(G - X) - |X| \leq \frac{ir(G)+n+1}{2} - K(G) \tag{4.49}$$

eşitsizliği elde edilir. X, G çizgesinin herhangi bir tepe kesim kümesi olduğundan, $isc(G)$ tanımından ve

$$isc(G) \leq \frac{ir(G)+n+1}{2} - K(G) \tag{4.50}$$

eşitsizliğinden

$$ir(G) \geq 2isc(G) + 2K(G) - n - 1 \tag{4.51}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Tanım 4.3: (Yang, Ma, ve Liu, 2001) Tam çizge olmayan birleştirilmiş G çizgesinin izole dayanıklılığı

$$I(G) = \min\{\frac{|S|}{i(G-S)} : S \subseteq V(G), i(G-S) \geq 2\} \tag{4.52}$$

olarak tanımlanır.

Yardımcı Teorem 4.2: (Li, 2015) n tepeli birleştirilmiş bir G çizgesi için eğer $|V(G)| > 1$ ise, o zaman

$$ir(G) \geq 1 - n \tag{4.53}$$

olur.

Teorem 4.5: G çizgesi tam çizge olmayan n tepeli birleştirilmiş bir çizge olmak üzere

$$ir(G) \geq \frac{2K(G)}{I(G)} - n - 1 \tag{4.54}$$

olur.

İspat: X, G çizgesinin bir tepe kesim kümesi olsun. $ir(G)$ tanımından,

$$ir(G) \geq i(G-X) - |X| - m(G-X) \tag{4.55}$$

olur.

$$|X| + m(G-X) \leq n + 1 - w(G-X) \tag{4.56}$$

ve

$$i(G-X) \leq w(G-X) \tag{4.57}$$

olduğundan,

$$|X| + m(G-X) \leq n + 1 - i(G-X) \tag{4.58}$$

elde edilir. O halde,

$$ir(G) \geq i(G-X) + i(G-X) - n - 1 \tag{4.59}$$

eşitsizliğinden

$$i(G-X) \leq \frac{ir(G)+n+1}{2} \tag{4.60}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 4.2'den,

$$ir(G) + n + 1 > 0 \tag{4.61}$$

olduğu açıktır ve dolayısıyla

$$\frac{|X|}{i(G-X)} \geq \frac{2|X|}{ir(G)+n+1} \tag{4.62}$$

eşitsizliği elde edilir. $|X| \geq K(G)$ olduğundan,

$$\frac{|X|}{i(G-X)} \geq \frac{2|X|}{ir(G)+n+1} \geq \frac{2K(G)}{ir(G)+n+1} \tag{4.63}$$

olur. O halde, G çizgesinin izole dayanıklılığı

$$I(G) \geq \frac{2K(G)}{ir(G)+n+1} \tag{4.64}$$

ve buradan

$$ir(G) \geq \frac{2K(G)}{I(G)} - n - 1 \tag{4.65}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.6: G çizgesi tam çizge olmayan n tepeli birleştirilmiş bir çizge olmak üzere

$$ir(G) \leq \frac{\alpha(G)(1+I(G))}{I(G)} - (K(G) + \delta(G) + 1) \tag{4.66}$$

olur.

İspat: X, G çizgesinin bir tepe kesim kümesi olsun. $I(G)$ tanımından,

$$I(G) \leq \frac{|X|}{i(G-X)} \tag{4.67}$$

ve bu eşitsizlikten

$$i(G-X) \leq \frac{|X|}{I(G)} \tag{4.68}$$

olduğu açıktır.

$$K(G) \leq |X| \leq \alpha(G) \tag{4.69}$$

olduğundan,

$$i(G-X) - |X| \leq \frac{|X|}{I(G)} - |X| \leq \frac{\alpha(G)}{I(G)} - K(G) \tag{4.70}$$

elde edilir.

$$m(G-X) \geq \delta(G) - |X| + 1 \tag{4.71}$$

eşitsizliğinden yararlanılarak,

$$i(G-X) - |X| - m(G-X) \leq \frac{\alpha(G)}{I(G)} - K(G) - \delta(G) + |X| - 1 \tag{4.72}$$

$$i(G-X)-|X|-m(G-X)\leq \frac{\alpha(G)}{I(G)}-K(G)-\delta(G)+\alpha(G)-1 \tag{4.73}$$

olur. O halde, $ir(G)$ tanımından, eğer $I(G)>0$ ise, o zaman

$$ir(G)\leq \frac{\alpha(G)\left(1+I(G)\right)}{I(G)}-(K(G)+\delta(G)+1) \tag{4.74}$$

eşitsizliği ile ispat tamamlanır.

BÖLÜM BEŞ
$2K_2$ İÇERMEYEN ÇİZGELERİN İZOLE KOPMA DERECESİ

Bu bölümde, $2K_2$ içermeyen birleştirilmiş çizgelerin izole kopma derecesi için genel bir formül bulunmuştur.

Tanım 5.1: (Chung, Gyárfás, Tuza, ve Trotter, 1990) Etkilenmiş alt çizge olarak bağımsız bir ayrıt çifti içermeyen çizgeye $2K_2$ içermeyen çizge denir.

Teorem 5.1: G, n tepeli birleştirilmiş $2K_2$ içermeyen bir çizge olmak üzere,

$$ir(G) = \beta(G) - \alpha(G) - 1 \tag{5.1}$$

olur.

İspat: $S \subset V(G)$, G çizgesinin minimum örtü kümesi olsun. Eğer $|S| = \alpha(G)$ tepe G çizgesinden atılırsa o zaman $i(G-S) = \beta(G)$ ve $m(G-S) = 1$ olur. O halde,

$$i(G-S) - |S| - m(G-S) = \beta(G) - \alpha(G) - 1 \tag{5.2}$$

$$\max\{i(G-S) - |S| - m(G-S)\} = \max\{\beta(G) - \alpha(G) - 1\} \tag{5.3}$$

$$ir(G) = \beta(G) - \alpha(G) - 1 \tag{5.4}$$

olur.

$S \subset V(G)$, G çizgesinin minimum örtü kümesi değil ise o halde S kümesi için iki durum oluşur:

Durum 1: $|S| \geq \alpha(G)$ için $i(G-S) < \beta(G)$ ve $m(G-S) \geq 1$ olur. O halde,

$$i(G-S) - |S| - m(G-S) < \beta(G) - \alpha(G) - 1 \tag{5.5}$$

$$\max\{i(G-S) - |S| - m(G-S)\} < \max\{\beta(G) - \alpha(G) - 1\} \tag{5.6}$$

$$ir(G) < \beta(G) - \alpha(G) - 1 \tag{5.7}$$

olur.

Durum 2: $|S| < \alpha(G)$ ise, o zaman

$$i(G-S) \leq \beta(G) - 1 \tag{5.8}$$

ve

$$m(G-S) > \alpha(G) - |S| \tag{5.9}$$

olur. O halde,

$$i(G-S) - |S| - m(G-S) < \beta(G) - 1 - |S| - (\alpha(G) - |S|) \tag{5.10}$$

$$i(G-S) - |S| - m(G-S) < \beta(G) - \alpha(G) - 1 \tag{5.11}$$

$$\max\{i(G-S) - |S| - m(G-S)\} < \max\{\beta(G) - \alpha(G) - 1\} \tag{5.12}$$

$$ir(G) < \beta(G) - \alpha(G) - 1 \tag{5.13}$$

olur.

(5.4), (5.7), (5.13) ve izole kopma derecesi tanımından,

$$ir(G) = \beta(G) - \alpha(G) - 1 \tag{5.14}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

BÖLÜM ALTI
DİKENLİ ÇİZGELERİN İZOLE KOPMA DERECESİ

Bu bölümde, birleştirilmiş dikenli çizgelerin izole kopma derecesinin hesaplanması için genel bir formül bulunmuştur. Ayrıca dikenli çizgelerin özel sınıfları olarak literatürde tanımlı çizgelerin izole kopma derecelerinin hesaplanması için formüller verilmiştir.

Tanım 6.1: (Gutman, 1998) G, n tepeli birleştirilmiş bir çizge olsun. G çizgesinin her tepesine $p_i > 0$ olmak üzere tepe derecesi 1 olan p_i $(i = 1, \dots, n)$ tane yeni tepe eklenerek oluşan çizgeye G^* dikenli çizge denir.

Teorem 6.1: G, n tepeli birleştirilmiş bir çizge olsun. $p_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ olmak üzere G^* dikenli çizge için

$$ir(G^*) = \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1 \tag{6.1}$$

olur.

İspat: $S \subset V(G^*)$ kümesi G^* çizgesinin minimum örtü kümesi olsun. Eğer G^* çizgesinden $|S| = \alpha(G^*)$ tepe atılırsa, o zaman

$$i(G^* - S) = \sum_{i=1}^{n} p_i \tag{6.2}$$

ve

$$m(G^* - S) = 1 \tag{6.3}$$

olur. Buradan,

$$i(G^* - S) - |S| - m(G^* - S) = \sum_{i=1}^{n} p_i - \alpha(G^*) - 1 \tag{6.4}$$

elde edilir. n tepeli G^* dikenli çizge için $\beta(G^*) = \sum_{i=1}^{n} p_i$ olduğu açıktır. O halde,

$$i(G^* - S) - |S| - m(G^* - S) = \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1 \tag{6.5}$$

$$\max\{i(G^* - S) - |S| - m(G^* - S)\} = \max\{\beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1\} \quad (6.6)$$

$$ir(G^*) = \beta(G^*) - \alpha(G^*) - \quad (6.7)$$

elde edilir.

$S \subset V(G^*)$ kümesi G^* çizgesinin minimum örtü kümesi değil ise S kümesi için üç durum oluşur:

Durum 1: $|S| < \alpha(G^*)$ için $i(G^* - S) < \beta(G^*)$ ve

$$m(G^* - S) \geq \alpha(G^*) - |S| + 1 \quad (6.8)$$

olur. O halde,

$$i(G^* - S) - |S| - m(G^* - S) < \beta(G^*) - |S| - \alpha(G^*) + |S| - 1 \quad (6.9)$$

$$i(G^* - S) - |S| - m(G^* - S) < \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1 \quad (6.10)$$

$$\max\{i(G^* - S) - |S| - m(G^* - S)\} < \max\{\beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1\} \quad (6.11)$$

$$ir(G^*) < \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1 \quad (6.12)$$

elde edilir.

Durum 2: $|S| = \alpha(G^*)$ ise, o zaman $i(G^* - S) \leq \beta(G^*)$ ve $m(G^* - S) > 1$ olur. O halde,

$$i(G^* - S) - |S| - m(G^* - S) < \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1 \quad (6.13)$$

$$\max\{i(G^* - S) - |S| - m(G^* - S)\} < \max\{\beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1\} \quad (6.14)$$

$$ir(G^*) < \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1 \quad (6.15)$$

elde edilir.

Durum 3: $|S| > \alpha(G^*)$ ise, o zaman

$$i(G^* - S) \leq |V(G^*)| - |S| = \big(\beta(G^*) + \alpha(G^*)\big) - |S| \tag{6.16}$$

ve $m(G^* - S) \geq 1$ olur. O halde,

$$i(G^* - S) - |S| - m(G^* - S) \leq \beta(G^*) + \alpha(G^*) - |S| - |S| - 1 \tag{6.17}$$

$$i(G^* - S) - |S| - m(G^* - S) \leq \beta(G^*) + \alpha(G^*) - 2|S| - 1 \tag{6.18}$$

elde edilir. $|S| > \alpha(G^*)$ eşitsizliğinden,

$$i(G^* - S) - |S| - m(G^* - S) \leq \beta(G^*) + \alpha(G^*) - 2\alpha(G^*) - 1 \tag{6.19}$$

$$i(G^* - S) - |S| - m(G^* - S) \leq \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1 \tag{6.20}$$

$$\max\{i(G^* - S) - |S| - m(G^* - S)\} < \max\{\beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1\} \tag{6.21}$$

$$ir(G^*) < \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1 \tag{6.22}$$

olur.

(6.7), (6.12), (6.15), (6.22) ve izole kopma derecesi tanımından,

$$ir(G^*) = \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1 \tag{6.23}$$

eşitliği ile ispat tamamlanır.

Sonuç 6.1: n tepeli birleştirilmiş G çizgesinin $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$ olmak üzere G^* dikenli çizgesi için

$$ir(G^*) = n(p - 1) - 1 \tag{6.24}$$

olur.

İspat: G^* çizgesi, $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ olmak üzere G çizgesinin dikenli çizgesi ise

$$\beta(G^*) = \sum_{i=1}^{n} p_i = np \tag{6.25}$$

olur. $\alpha(G^*) = n$ eşitliğinden, Teorem 6.1'den,

$$ir(G^*) = \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1 = np - n - 1 \quad (6.26)$$

elde edilir.

Sonuç 6.2: G, n tepeli birleştirilmiş bir çizge olsun. $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$ olmak üzere G^* dikenli çizge için

$$ir(G^*) = -1 \quad (6.27)$$

olur.

İspat: $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$ olmak üzere G^* dikenli çizge için $\beta(G^*) = \alpha(G^*)$ olur. Teorem 6.1'den,

$$ir(G^*) = \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1 = -1 \quad (6.28)$$

elde edilir.

Tanım 6.2: G çizgesinin her bir tepesine derecesi 1 olan t tane tepe ekleyerek oluşan çizgeye $Brs_t(G)$ t -dikenli çizge denir.

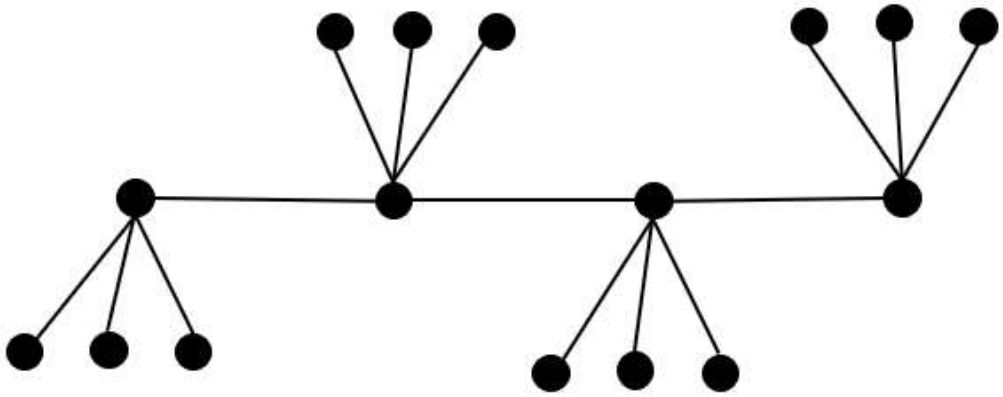
Sonuç 6.3, Sonuç 6.1'den yararlanılarak doğrudan elde edilir.

Sonuç 6.3: $Brs_t(G)$, G çizgesinin t -dikenli çizgesi ise, o zaman

$$ir(Brs_t(G)) = n(t-1) - 1 \quad (6.29)$$

olur.

Tanım 6.3: (Harary ve Schwenk, 1973) P_n, t tepeli yol çizge olsun. P_n yol çizgenin her tepesine $p_i > 0$ olmak üzere tepe derecesi 1 olan p_i $(i = 1, \dots, n)$ tane yeni tepe ekleyerek oluşan çizgeye tırtıl çizge denir. Eğer $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = m$ ise, o zaman $T_{n,m}$ düzenli tırtıl çizge elde edilir.



Şekil 6.1 $n = 4$ ve $m = 3$ için düzenli tırtıl çizge $T_{4,3}$

Sonuç 6.4, Sonuç 6.1'den yararlanılarak doğrudan elde edilir.

Sonuç 6.4: $T_{n,m}$ düzenli tırtıl çizge olmak üzere,

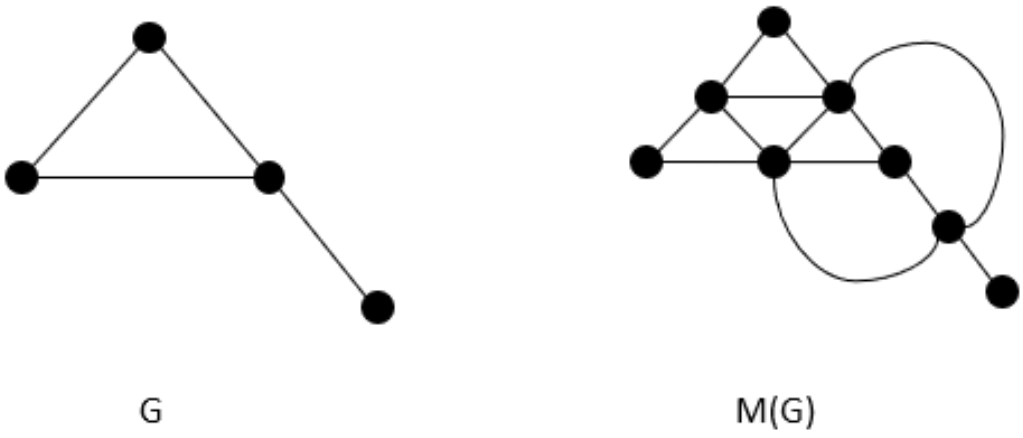
$$ir(T_{n,m}) = n(m-1) - 1 \tag{6.30}$$

olur.

BÖLÜM YEDİ
ORTA ÇİZGELERİN İZOLE KOPMA DERECESİ

Bu bölümde, orta çizgelerin izole kopma derecesinin ölçümü için bulunan orta çizgenin bağımsızlık sayısı ve örtü sayısı cinsinden genel formül verilmiştir. Ayrıca, orta çizgelerin izole kopma derecesi için sayısal olarak ifade edilen en iyi üst sınır değeri bulunmuştur.

Tanım 7.1: (Mamut ve Vumar, 2007) Bir G çizgesinde bulunan her ayrıtın üzerine yeni bir tepe eklenmesi ve sonrasında G çizgesinin komşu olan ayrıtlarına eklenen yeni tepeleri bir ayrıt ile birleştirerek oluşturulan çizgeye G çizgesinin $M(G)$ orta çizgesi denir.



Şekil 7.1 G ve $M(G)$ çizgeleri

Teorem 7.1: (Mamut ve Vumar, 2007) Herhangi bir G çizgesi için

$$\alpha\big(M(G)\big) = |E(G)| \tag{7.1}$$

ve

$$\beta\big(M(G)\big) = |V(G)| \tag{7.2}$$

olur.

Teorem 7.2: G, n tepeli birleştirilmiş bir çizge olmak üzere

$$ir(M(G)) = \beta(M(G)) - \alpha(M(G)) - 1 \tag{7.3}$$

olur.

İspat: $S \subset V(M(G))$, $M(G)$ orta çizgenin minimum örtü kümesi olsun. Eğer $M(G)$ orta çizgeden $|S| = \alpha(M(G))$ tepe atılırsa, o zaman

$$i(M(G) - S) = |V(M(G))| - \alpha(M(G)) = \beta(M(G)) \tag{7.4}$$

ve

$$m(M(G) - S) = 1 \tag{7.5}$$

olur. O halde,

$$i(M(G) - S) - |S| - m(M(G) - S) = \beta\big(M(G)\big) - \alpha\big(M(G)\big) - 1 \tag{7.6}$$

$$\max\{i(M(G) - S) - |S| - m(M(G) - S)\} = \max\{\beta\big(M(G)\big) - \alpha\big(M(G)\big) - 1\} \tag{7.7}$$

$$ir(M(G)) = \beta(M(G)) - \alpha(M(G)) - 1 \tag{7.8}$$

olur.

$S \subset V(M(G))$, $M(G)$ orta çizgenin minimum örtü kümesi değil ise o halde S kümesi için üç durum oluşur:

Durum 1: $|S| < \alpha(M(G))$ için,

$$i(M(G) - S) \leq \beta(M(G)) - 2 \tag{7.9}$$

ve

$$m(M(G) - S) \geq \alpha(M(G)) - |S| + 2 \tag{7.10}$$

olur. O halde,

$$i(M(G)-S)-|S|-m(M(G)-S)\leq$$
$$\beta\big(M(G)\big)-2-|S|-(\alpha\big(M(G)\big)-|S|+2) \tag{7.11}$$

$$\max\{i(M(G)-S)-|S|-m(M(G)-S)\}\leq$$
$$\max\{\beta\big(M(G)\big)-\alpha\big(M(G)\big)-4\} \tag{7.12}$$

$$ir(M(G))\leq\beta\big(M(G)\big)-\alpha\big(M(G)\big)-4 \tag{7.13}$$

olur.

Durum 2: $|S|=\alpha(M(G))$ ise, o zaman

$$i(M(G)-S)<n=|V(G)|=\beta(M(G)) \tag{7.14}$$

ve

$$m(M(G)-S)>1 \tag{7.15}$$

olur. O halde,

$$i(M(G)-S)-|S|-m(M(G)-S)<\beta\big(M(G)\big)-\alpha\big(M(G)\big)-1 \tag{7.16}$$

$$\max\{i(M(G)-S)-|S|-m(M(G)-S)\}<$$
$$\max\{\beta\big(M(G)\big)-\alpha\big(M(G)\big)-1\} \tag{7.17}$$

$$ir\big(M(G)\big)<\beta\big(M(G)\big)-\alpha\big(M(G)\big)-1 \tag{7.18}$$

olur.

Durum 3: $|S|>\alpha(M(G))$ ise, o zaman

$$i(M(G)-S)<\beta(M(G)\,) \tag{7.19}$$

ve

$$m(M(G)-S)\geq 1 \tag{7.20}$$

olur. O halde,

$$i(M(G)-S)-|S|-m(M(G)-S)<\beta\big(M(G)\big)-\alpha\big(M(G)\big)-1 \tag{7.21}$$

$$\max\{i(M(G)-S)-|S|-m(M(G)-S)\}< \max\{\beta\big(M(G)\big)-\alpha\big(M(G)\big)-1\} \tag{7.22}$$

$$ir\big(M(G)\big)<\beta\big(M(G)\big)-\alpha\big(M(G)\big)-1 \tag{7.23}$$

olur.

(7.8), (7.13), (7.18), (7.23) ve izole kopma derecesi tanımından,

$$ir\big(M(G)\big)=\beta\big(M(G)\big)-\alpha\big(M(G)\big)-1 \tag{7.24}$$

eşitliği ile ispat tamamlanır.

Sonuç 7.1: n tepeli ve e ayrıtlı birleştirilmiş G çizgesi için

$$ir\big(M(G)\big)=n-e-1 \tag{7.25}$$

elde edilir.

İspat: n tepeli ve e ayrıtlı G çizgesi için

$$\alpha\big(M(G)\big)=e=|E(G)| \tag{7.26}$$

$$\beta(M(G)\,)=n=|V(G)| \tag{7.27}$$

ve Teorem 7.2'den,

$$ir(M(G)\,)=\beta(M(G)\,)-\alpha(M(G)\,)-1 \tag{7.28}$$

olduğundan,

$$ir(M(G)\,)=n-e-1 \tag{7.29}$$

elde edilir.

Sonuç 7.2: G, n tepeli ve e ayrıtlı birleştirilmiş bir çizge olmak üzere,

$$ir(M(G)) \leq 0 \tag{7.30}$$

olur.

İspat: G birleştirilmiş bir çizge olduğundan, Sonuç 7.1 ve Teorem 2.2'den yararlanılarak,

$$ir(M(G)) = n - e - 1 \leq (e + 1) - e - 1 = 0 \tag{7.31}$$

elde edilir.

Açıklama 7.1: Sonuç 7.2'de $M(G)$ çizgesinin izole kopma derecesi için verilen sınır değeri en iyi üst sınır değeridir. G çizgesinin n tepeli ve e ayrıtlı bir ağaç olması durumunda üst sınır değeri elde edilir.

Sonuç 7.3: T, n tepeli ve e ayrıtlı bir ağaç ise o zaman

$$ir(M(T)) = 0 \tag{7.32}$$

olur.

İspat: Sonuç 7.1'den,

$$ir(M(T)) = n - e - 1 \tag{7.33}$$

ve Teorem 2.3'ten, n tepeli ve e ayrıtlı T ağacı için

$$n = e + 1 \tag{7.34}$$

olur. O halde,

$$ir(M(T)) = n - e - 1 = (e + 1) - e - 1 = 0 \tag{7.35}$$

elde edilir.

Tanım 7.2: (Frucht ve Harary, 1970) Bir G çizgesinde bulunan her tepeye karşılık bir H çizgesinin kopyası alınır ve sonrasında G çizgesinde bulunan her tepe ilgili tepeye karşılık gelen H çizgesinin kopyasındaki her tepeye birer ayrıt ile birleştirilerek GoH çizgesi elde edilir. Bu işleme çizgelerde taçlama denir.

Teorem 7.3: n $(n \geq 2)$ tepeli birleştirilmiş bir G çizgesi için

$$ir(M(G)oK_2) = -\alpha\big(M(G)\big) - 3 \tag{7.36}$$

olur.

İspat: $S \subset V(M(G)oK_2)$, $M(G)$ orta çizgenin minimum örtü kümesi olsun. İzole bileşen veya bileşenler elde edebilmek için, S kümesindeki her bir v tepesi için, v tepesine komşu olan $u \in V(K_2)$ tepesi de, $u \in N_{M(G)oK_2}(v)$, S kümesinde olmalıdır. $|S| = 2\alpha(M(G))$ tepe $M(G)oK_2$ çizgesinden atılırsa, o zaman

$$i(M(G)oK_2 - S) = \alpha(M(G)) \tag{7.37}$$

ve

$$m(M(G)oK_2 - S) = 3 \tag{7.38}$$

olur. O halde,

$$\begin{gathered} i(M(G)oK_2 - S) - |S| - m(M(G)oK_2 - S) = \\ \alpha\big(M(G)\big) - 2\alpha\big(M(G)\big) - 3 \end{gathered} \tag{7.39}$$

$$i(M(G)oK_2 - S) - |S| - m(M(G)oK_2 - S) = -\alpha\big(M(G)\big) - 3 \tag{7.40}$$

$$\begin{gathered} \max\{i(M(G)oK_2 - S) - |S| - m(M(G)oK_2 - S)\} = \\ \max\{-\alpha\big(M(G)\big) - 3\} \end{gathered} \tag{7.41}$$

$$ir(M(G)oK_2) = -\alpha\big(M(G)\big) - 3 \tag{7.42}$$

olur.

$S \subset V(M(G)oK_2)$, $M(G)$ çizgesinin minimum örtü kümesi değil ise o zaman S kümesi için üç durum oluşur:

Durum 1: $S \subset V(M(G))$ ve $|S| < \alpha\big(M(G)\big)$ olmak üzere izole bileşen veya bileşenler elde etmek için, S kümesindeki her v tepesi için, v tepesine komşu olan $u \in V(K_2)$ tepesi de, $u \in N_{M(G)oK_2}(v)$, S kümesinde olmalıdır. Bu durumda, $|S'|=2|S|$ tepe $M(G)oK_2$ çizgesinden atılırsa, o zaman

$$i(M(G)oK_2 - S') = |S| \tag{7.43}$$

ve

$$m(M(G)oK_2 - S') \geq \alpha\big(M(G)\big) - |S| + 5 \tag{7.44}$$

olur ve buradan

$$\begin{gathered} i(M(G)oK_2 - S') - |S'| - m(M(G)oK_2 - S') \leq \\ |S| - 2|S| - \alpha\big(M(G)\big) + |S| - 5 \end{gathered} \tag{7.45}$$

$$\begin{gathered} \max\{i(M(G)oK_2 - S') - |S'| - m(M(G)oK_2 - S')\} \leq \\ \max\{-\alpha\big(M(G)\big) - 5\} \end{gathered} \tag{7.46}$$

$$ir(M(G)oK_2) \leq -\alpha\big(M(G)\big) - 5 \tag{7.47}$$

elde edilir.

Durum 2: $S \subset V(M(G))$ ve $|S| = \alpha\big(M(G)\big)$ ise, o zaman izole bileşen veya bileşenler elde etmek için, S kümesindeki her v tepesi için, v tepesine komşu olan $u \in V(K_2)$ tepesi de, $u \in N_{M(G)oK_2}(v)$, S kümesinde olmalıdır. Bu durumda, $|S| = 2\alpha(M(G))$ tepe $M(G)oK_2$ çizgesinden atılırsa, o zaman

$$i(M(G)oK_2 - S) = \alpha(M(G)) \tag{7.48}$$

ve

$$m(M(G)oK_2 - S') \geq 6 \tag{7.49}$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned} &i(M(G)oK_2 - S) - |S| - m(M(G)oK_2 - S) \\ &\leq \alpha\big(M(G)\big) - 2\alpha\big(M(G)\big) - 6 \end{aligned} \tag{7.50}$$

$$i(M(G)oK_2 - S) - |S| - m(M(G)oK_2 - S) \leq -\alpha\big(M(G)\big) - 6 \tag{7.51}$$

$$\begin{aligned} &\max\{i(M(G)oK_2 - S) - |S| - m(M(G)oK_2 - S)\} \\ &\leq \max\{-\alpha\big(M(G)\big) - 6\} \end{aligned} \tag{7.52}$$

$$ir(M(G)oK_2) \leq -\alpha\big(M(G)\big) - 6 \tag{7.53}$$

elde edilir.

Durum 3: $S \subset V(M(G))$ ve $|S| > \alpha\big(M(G)\big)$ ise, o zaman izole bileşen veya bileşenler elde etmek için, S kümesindeki her v tepesi için, v tepesine komşu olan $u \in V(K_2)$ tepesi de, $u \in N_{M(G)oK_2}(v)$, S kümesinde olmalıdır. Bu durumda, $|S'|=2|S|$ tepe $M(G)oK_2$ çizgesinden atılırsa, o zaman

$$i(M(G)oK_2 - S') = |S| \tag{7.54}$$

ve

$$m(M(G)oK_2 - S') \geq 3 \tag{7.55}$$

olur ve buradan

$$i(M(G)oK_2 - S') - |S'| - m(M(G)oK_2 - S') \leq |S| - 2|S| - 3 \tag{7.56}$$

$$i(M(G)oK_2 - S') - |S'| - m(M(G)oK_2 - S') \leq -|S| - 3 \tag{7.57}$$

$|S| > \alpha\big(M(G)\big)$ olduğundan,

$$i(M(G)oK_2 - S') - |S'| - m(M(G)oK_2 - S') \leq -|S| - 3 \tag{7.58}$$

$$i(M(G)oK_2 - S') - |S'| - m(M(G)oK_2 - S') < -\alpha\big(\mathrm{M(G)}\big) - 3 \tag{7.59}$$

$$\max\{i(M(G)oK_2 - S') - |S'| - m(M(G)oK_2 - S')\} < \max\{-\alpha\big(\mathrm{M(G)}\big) - 3\} \tag{7.60}$$

$$ir(M(G)oK_2) < -\alpha\big(M(G)\big) - 3 \tag{7.61}$$

elde edilir.

(7.42), (7.47), (7.53), (7.61) ve izole kopma derecesi tanımından

$$ir(M(G)oK_2) = -\alpha\big(M(G)\big) - 3 \tag{7.62}$$

olur ve ispat tamamlanır.

BÖLÜM SEKİZ
SONUÇLAR

Bu tezde, literatürde yeni tanımlanmış bir zedelenebilirlik parametresi olan izole kopma derecesi çalışılmıştır. İzole kopma derecesi ağ topolojisi olarak ele alınan çizgelerin zedelenebilirliğinin ölçümünde ayırt edici ve gerekli bir parametredir. Aynı tepe sayısına sahip olan çizgeler için izole kopma derecesi daha küçük olan çizgelerin daha sağlam ağ topolojilerine temel oluşturacağı düşünülür. Gerçek hayat problemlerine temel olan karmaşık ağlar için hesaplanan izole kopma derecesi ağ topolojileri arasında kıyaslama yapabilmeyi, farklı ağ topolojilerinin avantajlarını ve dezavantajlarını analiz ederek ağ tasarımcılarına uygun ağ topolojilerinin tasarımı, kullanımı, analizi, etkinliği ve sürdürülebilirliği hakkında detaylı bilgi verebilir.

İzole kopma derecesi ile literatürde tanımlı olan bazı zedelenebilirlik ölçümleri ve çizge parametreleri arasındaki alt ve üst sınır değerleri bulunmuştur.

$2K_2$ -içermeyen çizgelerin, dikenli çizgelerin ve orta çizgelerin izole kopma dereceleri için çizge parametreleri cinsinden formüller elde edilmiştir. Birleştirilmiş bir çizgenin orta çizgesinin izole kopma derecesi için en iyi üst sınır değer bulunmuş ve bu üst sınırın çizgenin ağaç olması durumunda sağlandığı belirtilmiştir.

KAYNAKLAR

Barefoot, C. A., Entringer, R. ve Swart, H. (1987). Vulnerability in graphs—a comparative survey. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, *1*, 12–22.

Bondy, J. A. ve Murty, U. S. R. (1976). *Graph Theory with Applications*. Macmillan, London, Elsevier, New York.

Buckley, F. ve Harary, F. (1990). *Distance in Graphs*. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA.

Chartrand, G. ve Harary, F. (1968). *Graphs with prescribed connectivities*. In P. Erdös, G. Katona (Ed.), *Theory of Graphs* (61–63). Academic Press, London, New York, San Francisco.

Chartrand, G. ve Lesniak, L. (1996). *Graphs and Digraphs* (3. Baskı). Wadsworth, Monterey.

Chung, F. R. K., Gyárfás, A., Tuza Z. ve Trotter, W. T. (1990). The maximum number of edges in $2K_2$-free graphs of bounded degree. *Discrete Mathematics*, *81*(2), 129-135.

Chvátal, V. (1973). Tough graphs and hamiltonian circuits. *Discrete Mathematics*, *5*, 215-228.

Cozzens, M., Moazzami, D. ve Stueckle, S. (1995). The tenacity of a graph. In Y. Alavi ve A. Schwenk (Ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference on the Theory and Applications of Graphs* içinde (1111-1122). Wiley, New York.

Frucht, R. ve Harary, F. (1970). On the corona of two graphs. *Aequationes Mathematicae. 4*, 322–325.

Gutman, I. (1998). Distance of Thorny Graphs. *Publications De L'institut Mathématique*, *63*(77), 31–36.

Harary, F. ve Schwenk, A. J. (1973). The number of caterpillars. *Discrete Mathematics*, *6*, 359–365.

Jung, H. A. (1978). On a class of posets and the corresponding comparability graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B, 24*(2), 125–133.

Li, F. W. (2015). On Isolated Rupture Degree of Graphs. *Utilitas Mathematica, 96,* 33-47.

Li, Y., Zhang, S. ve Li, X. (2005). Rupture degree of graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, *82*(7), 793-803.

Mamut, A. ve Vumar E. (2007). A Note on the Integrity of Middle Graphs. *Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory, Lecture Notes in Computer Science*, *4381*, 130-134.

Wang, S., Yang, Y., Lin, S., Li, J. ve Hu, Z. (2011). The isolated scattering number of graphs. *Acta Mathematica Sinica Chinese Series, 54*(5), 861-874.

West, D. B. (2001). *Introduction to Graph Theory.* Prentice Hall, NJ.

Yang, J., Ma, Y. ve Liu, G. (2001). Fractional (g, f)-factors in graphs. *Applied Mathematics–A Journal of Chinese Universities Series A, 16*, 385–390.