T.C

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ SONSUZ KÜMELERİN DENKLİĞİ KONUSUNDAKİ KANIT İMAJLARININ İNCELENMESİ

OZAN PALA

İzmir

2016

T.C

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ SONSUZ KÜMELERİN DENKLİĞİ KONUSUNDAKİ KANIT İMAJLARININ İNCELENMESİ

OZAN PALA

Danışman

Doç. Dr. Serkan NARLI

İzmir

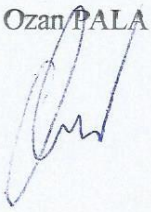
2016

YEMİN

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum "*İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sonsuz Kümelerin Denkliği Konusundaki Kanıt İmajlarının İncelenmesi*" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurulmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynak dizininde gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara ait atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

27/06/2016

Ozan PALA



Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İşbu çalışma, jürimiz tarafından İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Eğitimi. Programında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Serkan NARLI

Üye : Prof. Dr. Elif TÜRNÜKLÜ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Emre EV ÇİMEN

Onay
Yukarıda imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

27/06/2016

Prof. Dr. Ali Günay BALIM
Enstitü Müdürü

T.C
YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
ULUSAL TEZ MERKEZİ

TEZ VERİ GİRİŞİ VE YAYIMLAMA İZİN FORMU

Referans No	10116593
Yazar Adı / Soyadı	OZAN PALA
Uyruğu / T.C.Kimlik No	TÜRKİYE / 18383571680
Telefon	5549148642
E-Posta	Sfxdx@outlook.com
Tezin Dili	Türkçe
Tezin Özgün Adı	İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sonsuz Kümelerin Denkliği Konusundaki Kanıt İmajlarının İncelenmesi
Tezin Tercümesi	An Investigation of Proof Images of Prospective Elementary Mathematics Teachers About Equivalence of Infinity Sets
Konu	Matematik = Mathematics ; Eğitim ve Öğretim = Education and Training
Üniversite	Dokuz Eylül Üniversitesi
Enstitü / Hastane	Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	İlköğretim Anabilim Dalı
Bilim Dalı	İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı
Tez Türü	Yüksek Lisans
Yılı	2016
Sayfa	250
Tez Danışmanları	DOÇ. DR. SERKAN NARLI 18353521738
Dizin Terimleri	
Önerilen Dizin Terimleri	Kanıt İmajı=Proof Image, Sonsuzluk=Infinity, Eşgüçlülük=Cardinality, İspat=Proof, Matematik Eğitimi=Mathematics Education
Kısıtlama	24 ay süre ile kısıtlı

Tezimin,Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi Veri Tabanında arşivlenmesine izin veriyorum. Ancak internet üzerinden tam metin açık erişime sunulmasının 10.07.2018 tarihine kadar ertelenmesini talep ediyorum. Bu tarihten sonra tezimin, bilimsel araştırma hizmetine sunulması amacı ile Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi tarafından internet üzerinden tam metin erişime açılmasına izin veriyorum.
NOT: Erteleme süresi formun imzalandığı tarihten itibaren en fazla 3 (üç) yıldır.

10.07.2016

İmza:.....

TEŞEKKÜR

Hayatım boyunca daima yanımda olan, sevgilerini ve desteklerini benden asla esirgemeyen, varlıkları ile hayatıma anlam katan çok değerli aileme…

Bir ömür beraber yaşamak için sabırsızlandığım, gönül yoldaşım Melike UYSAL 'a…

Üniversite eğitimim boyunca bana rehber olan, muhabbetini ve desteğini benden asla esirgemeyen çok değerli büyüğüm ve hocam Sayın Doç. Dr. Serkan NARLI 'ya…

Lisans ve Yüksek Lisans eğitimim boyunca saçtıkları ışık ile yolumu aydınlatan Dokuz Eylül Üniversitesi İlköğretim Matematik Eğitimi Bölümünde yer alan çok kıymetli hocalarıma…

Yüksek lisans eğitimim sürecinde destekleri ile yanımda olan çok değerli meslektaşlarım Gördes - Beğel Ortaokulu öğretmenlerine…

Yüksek Lisans eğitimim süresince gerçekleştirdiğim çalışmalarda bana maddi olarak destek sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) Başkanlığına…

Bu çalışmayı yürütmemde emeği geçen tüm Dokuz Eylül Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği ikinci sınıf öğrencilerine…

Teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Yemin Metni i
Tutanak ii
Yüksek Öğretim Kurulu Dokümantasyon Merkezi Tez Veri Formu iii
Teşekkür iv
İçindekiler v
Tablo Listesi ix
Şekil Listesi xi
Özet xiii
Abstract xiv

BÖLÜM I
GİRİŞ **1**
Problem Durumu 4
Amaç ve Önem 6
Teorik Çerçeve 8
AiC Teorik Çerçevesi 9
RBC Soyutlama Teorisi 10
Kanıt İmajı 12
Duygusal Olmayan Bilişsel Hisler 13
Problem Cümlesi 14
Alt Problemler 14
Sayıltılar 14
Sınırlılıklar 14
Tanımlar 15
Kısaltmalar 16

BÖLÜM II

İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR 17

Sonsuz Kümelerin Denkliğine İlişkin Çalışmalardan Bir Derleme 17

İspat Becerisine Yönelik Yapılmış Çalışmalara İlişkin Bir Derleme 24

BÖLÜM III

YÖNTEM 29

Araştırmanın Modeli 29

Çalışma Grubu 31

Süreç 31

Veri Toplama Araçları 33

Genel Uygulama Çalışmaları 33

Genel Uygulama Formlarının Geliştirilmesi 34

Genel Uygulama I Formu 34

Genel Uygulama II Formu 35

Genel Uygulama III Formu 36

Genel Uygulama IV Formu 37

Bireysel Uygulama Formlarının Geliştirilmesi 39

Bireysel Uygulama Çalışmaları 41

Bireysel Çalışma I (*A'nın olayı ve Bir Kanıt İmajı Hikâyesi*) 41

Bireysel Çalışma II (*B'nin olayı ve Bir Kanıt İmajı Hikâyesi*) 42

Bireysel Çalışma III (*D'nin olayı ve Bir Kanıt İmajı Hikâyesi*) 43

Veri Toplama Araçlarının Geçerlilik ve Güvenirlikleri 45

Araştırmanın Geçerlilik ve Güvenirliği 46

Analiz Süreci 46

Veri Çözümleme Teknikleri 47

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUM 50

I. Alt Probleme Yönelik Bulgular ve Yorumlar 50

Genel Uygulama I ve Analizi 51

1.Soruya verilen cevaplar ve analizi 51

2.Soruya verilen cevaplar ve analizi 59

3.Soruya verilen cevaplar ve analizi 66

Genel Uygulama II ve Analizi 72

1.Soruya verilen cevaplar ve analizi 72

2.Soruya verilen cevaplar ve analizi 80

Genel Uygulama III ve Analizi 91

1.Soruya verilen cevaplar ve analizi 91

2.Soruya verilen cevaplar ve analizi 104

Genel Uygulama IV ve Analizi 113

1.Soruya verilen cevaplar ve analizi 113

2.Soruya verilen cevaplar ve analizi 120

3.Soruya verilen cevaplar ve analizi 128

II. Alt Probleme Yönelik Bulgular ve Yorumlar 137

A'nın İspat Süreci 138

B'nin İspat Süreci 161

D'nin İspat Süreci 180

BÖLÜM V

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER 205

Sonuç ve Tartışma 205

I. Alt Probleme İlişkin Sonuç ve Tartışma 205

Sezgisel Yaklaşım 207

Sezgisel Yaklaşımın Nedenleri 208

Sezgisel Yaklaşımın İspat Sürecin Etkisi 214

Kavram Yanılgıları ve İspat Sürecin Etkisi 216

İspat Sürecine İlişkin Yetersizlikler 217

II. Alt Probleme İlişkin Sonuç ve Tartışma 221

A'nın İspat İmajının Değerlendirilmesi 221

B'nin İspat İmajının Değerlendirilmesi 226

D'nin İspat İmajının Değerlendirilmesi 227

Öneriler 230

KAYNAKÇA 234

EKLER 241

EK-1 242

EK-2 243

EK-3 244

EK-4 245

EK-5 246

EK-6 247

EK-7 248

EK-8 249

UYGULAMA İZNİ 250

TABLO LİSTESİ

Tablo 1 Araştırmanın Sırasıyla Veri Toplama Aşamaları 48
Tablo 2 Genel Uygulama I - Birinci soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar ... 51
Tablo 3 Sınıf İçi Diyalog (1) 54
Tablo 4 Genel Uygulama I - İkinci ve Üçüncü soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar 60
Tablo 5 Sınıf İçi Diyalog (2) 62
Tablo 6 Genel Uygulama II - Birinci soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar ... 72
Tablo 7 Sınıf İçi Diyalog (3) 79
Tablo 8 Genel Uygulama II - İkinci soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar 80
Tablo 9 Genel Uygulama III - Birinci soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar 91
Tablo 10 Sınıf İçi Diyalog (4) 100
Tablo 11 Genel Uygulama III - İkinci soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar 104
Tablo 12 Sınıf İçi Diyalog (5) 111
Tablo 13 Genel Uygulama IV - Birinci soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar 113
Tablo 14 Genel Uygulama IV - İkinci soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar 120
Tablo 15 Genel Uygulama IV - Üçüncü soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar 128
Tablo 16 Araştırmacı ve A arasında gerçekleşen diyalog (1) 139
Tablo 17 Araştırmacı ve A arasında gerçekleşen diyalog (2) 142
Tablo 18 Araştırmacı ve A arasında gerçekleşen diyalog (3) 145
Tablo 19 Araştırmacı ve A arasında gerçekleşen diyalog (4) 147
Tablo 20 Araştırmacı ve A arasında gerçekleşen diyalog (5) 149
Tablo 21 Araştırmacı ve A arasında gerçekleşen diyalog (6) 153
Tablo 22 Araştırmacı ve A arasında gerçekleşen diyalog (7) 157
Tablo 23 Araştırmacı ve B arasında gerçekleşen diyalog (1) 163
Tablo 24 Araştırmacı ve B arasında gerçekleşen diyalog (2) 168

Tablo 25 Araştırmacı ve B arasında gerçekleşen diyalog (3) 170
Tablo 26 Araştırmacı ve B arasında gerçekleşen diyalog (4) 173
Tablo 27 Araştırmacı ve B arasında gerçekleşen diyalog (5) 175
Tablo 28 Araştırmacı ve D arasında gerçekleşen diyalog (1) 184
Tablo 29 Araştırmacı ve D arasında gerçekleşen diyalog (2) 189
Tablo 30 Araştırmacı ve D arasında gerçekleşen diyalog (3) 190
Tablo 31 Bazı matematikçilerin ispata yönelik bakış açıları 218

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1 Teorik Çerçeveler Arasındaki İlişki 8

Şekil 2 RBC Soyutlama Teorisi 11

Şekil 3 Kanıt İmajı ve Bileşenleri 12

Şekil 4 A'nın Olayına İlişkin Kayıtlardan Örnekler 41

Şekil 5 B'nin Olayına İlişkin Kayıt Örneği 43

Şekil 6 D'nin Olayına İlişkin Kayıt Örneği 45

Şekil 7 Çalışma Modeli ve Çalışma Sürecine İlişkin Özet Diyagram 49

Şekil 8 Örnekleme Sürecine İlişkin Özet Diyagram 49

Şekil 9 $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^2$ olduğunu göstermek için söz alan öğrencinin yaklaşımı 77

Şekil 10 Ders içerisinde gözlenen perspektif yaklaşımı 83

Şekil 11 Ders içerisinde gözlenen çember yaklaşımı 85

Şekil 12 (0,1) ve $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi arasında (birebir olmayan) grafiksel yaklaşım 86

Şekil 13 (0,1) ve $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi arasında oluşturulan (bijektif) yaklaşım 87

Şekil 14 Kardinaliteleri eşit doğru parçaları 89

Şekil 15 [0,1] ve $\mathbb{R}$, gerçel sayıları kümesi arasında bijektif olmayan yaklaşım (1) 97

Şekil 16 [0,1] ve $\mathbb{R}$, gerçel sayıları kümesi arasında bijektif olmayan yaklaşım (2) 98

Şekil 17 [0,1] ve $\mathbb{R}$, gerçel sayıları kümesi arasında bijektif olmayan yaklaşım (3) 98

Şekil 18 Keyfi bir C noktasından bölünmüş [AB] doğru parçası 210

Şekil 19 # ([AC]) = # ([AB]) kardinal eşitliği için geometrik bir gösterim ... 211

Şekil 20 Sezgisel Yaklaşım ve Nedenlerine İlişkin Özet Diyagram 215

Şekil 21 A'nın ispat sürecini özetleyen akış şeması 223

Şekil 22 A'nın Kanıt İmajının Mantıksal Bağlar İçerdiğine İlişkin Genel Göstergeler 224

Şekil 23 A'nın Kanıt İmajının Dinamik Olduğuna İlişkin Genel Göstergeler ve Spesifik Bir Örnek 224

Şekil 24 A'nın Kanıt İmajının Kişisel Anlayış Çerçevesinde Şekillendiğine İlişkin Genel Göstergeler ve Spesifik Bir Örnek 225

Şekil 25 A'nın Kanıt İmajının Varlık (Bütünlük) Karakteristiğine Sahip Olduğuna İlişkin Genel Göstergeler ve Spesifik Bir Örnek 225

ÖZET

İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sonsuz Kümelerin Denkliği Konusundaki Kanıt İmajlarının İncelenmesi

Ozan PALA

Matematik eğitimi literatürü incelendiğinde bireylerin ispat süreçlerini inceleyen çeşitli çalışmaların yer aldığı görülebilir. Ancak sonsuz kümelerin denkliği bağlamında sezgisel düşünmeden formal ispata geçişin incelendiği çalışmaların sayısı azdır. Dolayısı ile bu araştırmada Dreyfus & Kidron (2014) tarafından ortaya konan kanıt imajı teorik çerçevesinden yararlanılarak bu sürecin nasıl şekillendiğinin araştırılması amaçlanmaktadır. Kanıt imajı kavramı *Bilişsel Anlayış* ve *Duyuşsal His* bileşenlerini içerisinde barındırmaktadır. Dolayısı ile bireylerin ispat aktivitelerinde oluşturdukları imajlar bu bileşenler bağlamında incelenmiştir.

Bu çalışma nitel bir çalışmadır. Araştırmada nitel araştırmada yöntemlerinden biri olan case study (durum çalışması) yöntemi kullanılmıştır. Veriler bir devlet üniversitesinde kayıtlı ikinci sınıf öğrencilerinden iki aşamalı örneklem yöntemiyle toplanmıştır. Ayrıca veri toplama sürecinde çeşitleme tekniğine yer verilmiştir.

Bu bağlamda, öğrenciler 5 hafta boyunca gözlenmiş ve tüm grup ile genel uygulama çalışmaları gerçekleştirilmiştir. Diğer yandan ispat imajına ilişkin ayrıntılı analizlerin yapılabilmesi için 3 katılımcı ile toplamda 12 defa sonsuz kümelerin denkliğine yönelik ispat çalışmaları içeren etkinlik temelli mülakatlar gerçekleştirilmiştir.

Genel uygulama çalışmaları sonucunda, öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğini belirlemede sıklıkla sezgisel yaklaşımı kullandıkları gözlenmiştir. Ayrıca bireylerin ispatı yürütmede bazı yetersizlikler yaşadıkları da belirlenmiştir.

Diğer yandan bireysel çalışmalara katılan bireylerin bilişsel ve duyuşsal davranışlarına yönelik detaylı analizler yapılmıştır. Sonuç olarak bu bireylerin ispata yönelik imajlara sahip oldukları belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kanıt İmajı, Sonsuzluk, Eşgüçlülük, İspat, Matematik Eğitimi

ABSTRACT

An Investigation of Proof Images of Prospective Elementary Mathematics Teachers About Equivalence of Infinity Sets

Ozan PALA

When mathematics education literature reviewed it could be seen that there are various studies which examine individuals' proving activities. However, there are few studies which examine the transition from intuitive thinking to formal proof in the context of equivalence of infinity sets. Thus, in this study it is aimed to research that how to this process shaped by using *The Proof Image* theoretical framework which was introduced by Dreyfus & Kidron (2014). The concept of Proof Image comprises *Cognitive Understanding* and *Affective Feeling* components. Thus, images which produced in the individuals' proving activities was analyzed in the context of these components.

This research is a qualitative study. The Case Study method which is one of qualitative techniques was used. The data were gathered from second grade students who enrolled a state university by using multi-sampling method. Also triangulation technique was included in data collection process.

In this context, students were observed for 5 weeks and also general group studies were executed. On the other hand, to execute detailed analyses of proof image task based interviews which included proving activities for equivalence of infinity sets was conducted with 3 participants for 12 times.

As a result of general group studies it was observed that prospective teachers frequently used intuitive approachment to determine equivalence of infinity sets. Also it was identified that individuals faced se deficiencies for executing proof.

On the other hand, detailed analyses were conducted for cognitive and affective behaviors of individuals who joined individual studies. Consequently, it was identified that these individuals had images oriented to proof.

Keywords: Proof Image, Infinity, Cardinality, Proof, Mathematics Education

BÖLÜM I

GİRİŞ

Matematik, her aşamasında daha önceki bilgilerin ve edinilmiş becerilerin kullanımını gerektiren, bilgilerin sadece üst üste yığıldığı değil aynı zamanda iç içe geçtiği bilim dalıdır (Moralı, Uğurel, Türnüklü, & Yeşildere, 2006). Matematiğin yığılmalı bir bilim oluşu ve kavramlar arasındaki doğrusal ilişki bireylerin yeni bilgilerini önceki bilgilerinin üzerine inşa etmesini gerekli kılmaktadır. Bu bağlamda Özdemir (2000) matematiğin yapısını oluşturan tanım ve kavramların bir bütün içerisinde değerlendirilerek ele alınması ve öğretilmesi gerektiğini vurgulamıştır. Yani matematik birbirlerinden kopuk bir şekilde ele alınamayacak yapıların olduğu evrensel bir dildir.

Pek çok matematiksel kavramın, temelini günlük yaşam deneyimlerinden aldığı söylenebilir. Örneğin soyut bir kavram olan kesir kavramının inşasında günlük yaşamda yer alan *parça-bütün* ilişkisinin önemli bir rol oynadığı söylenebilir. Bu durum kesirlerin günlük yaşam temsilleri ile modellenebilmesini dolayısı ile bireyler tarafından anlamlandırılabilmesini mümkün kılar. Diğer pek çok matematiksel kavram da tıpkı kesirler gibi günlük yaşam temsilleri ile modellenebilmektedir. Ancak matematik bünyesinde yer alan her kavramın benzer şekilde modellenebileceği söylenemez. Bu kavramlardan birisi de sonsuzluk kavramıdır. İnsanoğlunun ilkel zamanlarından beri ilgisini çeken sonsuzluk, doğası gereği soyut bir kavram olarak nitelendirilebilir. Bu soyutluğun temelinde sonsuzluk kavramının günlük yaşam modelleri ile doğrudan modellenememesi yer almaktadır. Dolayısı ile sonsuzluğun formal bir kavram olarak biçimlenmesinde bireylerin günlük yaşam deneyimlerinden doğrudan yararlanılamayacağı söylenebilir. Bu nedenle bu kavramın bireyler tarafından formal düzeyde anlamlandırılmasının epistemik olarak bir güçlük içerdiği yorumu yapılabilir.

Günlük yaşam çerçevesinde anlamlandırılmakta güçlük çekilen sonsuzluk kavramının felsefi olarak anlamlandırılmasında da tarihsel süreçte güçlükler yaşanmıştır. Sonsuzluğun bu karmaşık doğasını anlamlandırmak adına Aristo *''potansiyel sonsuzluk''* ve *''gerçek sonsuzluk''* fikirlerini ortaya atmıştır (Akbulut ve Akgün, 2005). Örneğin, ''*1, 2, 3, ...*'' şeklinde devam eden Doğal Sayılar (ℕ) kümesinin her bir terimine ''+1'' eklenerek yeni terimler üretebileceği ve dolayısı ile bu kümenin potansiyel olarak sonsuz olabileceği bireyler açısından anlaşılabilirdir. Diğer yandan gerçek sonsuzluk bir anda ve bir bütün olarak ortaya çıkan sonsuzluktur, Aristo'ya göre bunun bireylerin zihninde tam olarak anlamlandırılması mümkün değildir. Başka bir ifade ile sonsuzluğu potansiyel düzeyde ele alan Aristo gerçek sonsuzun mümkün olamayacağını iddia etmiştir. Aristo'ya ek olarak Zenon da ünlü paradoksları ile sonsuzluğun varlığının günlük hayat ile ilgili bilinen gerçekleri çürüttüğünü göstermiştir. Meşhur Achilles ve Kaplumbağa ya da Ok Paradoksları esasen zamanın sonsuzluğundan hareketle hareketin imkânsızlığını açıklamaya yöneliktir (*''Zenon'un paradoksları''*, 2014) .

Felsefi bağlamda anlamlandırmakta güçlük çekilen sonsuzluk kavramının matematiksel bağlamda da anlamlandırılmasında da tarihsel süreçte zorluklar yaşanmıştır. Sonsuzluğun tanımlanmasında ve kavramsallaştırılmasındaki zorluklar matematikçilerin bu kavramdan uzunca bir süre uzak durmasına neden olmuştur. Bahsedilen bu zorluklardan biri de sonsuz olduğu bilinen kümelerin eleman sayılarının kıyaslanması yolu ile denkliklerinin araştırılmasında ortaya çıkmıştır.

Eleman sayıları eşit olan kümelere denk kümeler denir. Başka bir ifade ile A ve B iki küme olmak üzere bu iki kümenin denkliği, en bilinen şekli ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$A \sim B \Leftrightarrow s(A) = s(B)$$

Örneğin A={1,2,3} ve B={4,5,6} olmak üzere s(A)=3, s(B)=3 $\Rightarrow$ A~B' dir.
Pek çoğumuz tarafından bilinen bu tanımlamadan hareketle Galileo 1'den başlayan sayılar ile bunların karelerini alt alta bulunan iki satıra yazdığında elemanlar arasında eleman atlamadan birebir eşleme yapılabileceğini gözlemlemiş ve bu durumun bir paradoks yarattığını belirtmiştir.

1 - 2 - 3 - 4…

1 - 4 - 9 - 16…

Bu durumun bir paradoks olarak nitelendirilmesindeki temel neden günlük yaşam deneyimleri ile ortaya çıkan çelişkidir. Günlük yaşam deneyimlerine dayanan sezgisi, Galileo'ya bütünün, parçadan daha fazla olması gerektiğini söylemektedir. Ancak üst satırda bulunan eleman sayısı, alt satırda bulunanlardan açıkça fazla olmasına rağmen bu iki satırda yer alan sayılar aralarında bir eşleme yapılabiliyor olduğu açıktır. Günlük yaşama dayalı sezgisel ilişki bu noktada geçerliliğini yitirmektedir. Fischbein (2001) böyle bir durumun bireyler için çelişki oluşturmasının temel nedeninin sonlu gerçeklere adapte olan mantık şemalarımızın, sonsuzluk ile karşılaştığında sezgisel çelişkiler yaratması olduğunu belirtmiştir.

Sonsuzluğun matematiksel tanımı üzerine pek çok matematikçi çalışma yapmıştır. Özellikle Bolzano ve Dedekind gibi ünlü matematikçilerin yaptığı çalışmalar, 19. yüzyılda sonsuzluğun bir kavram olarak şekillenmesinde önemli roller oynamıştır. Ancak sonsuzluğun bugün itibari ile kabul gören tanımı XIX. yüzyılın sonlarına doğru George Cantor'un kümeler konusundaki çalışmaları ile şekillenmiştir (Yıldırım, 2000). XIX. yüzyılın sonunda Cantor, sonsuz bir kümeyi, kendi asal alt kümelerinden biriyle birebir eşlenebilen bir küme olarak tanımladığı bir sonsuz kümeler teorisini formüle etmiştir (Narlı ve Narlı, 2012). Bu nedenle pek çok matematikçi sonsuzluğun matematiksel tarihinin tam olarak, sonsuz sayılar düşüncesini biçimlendiren Cantor ile başladığını kabul etmektedir. Cantor'un geliştirdiği bu yeni teori, kümelerin denkliğine farklı bir yaklaşımda bulunmuş ve iki kümenin denkliğinin aralarında tanımlanabilecek bijektif fonksiyonların varlığı ya da yokluğu ile ifade edilebileceğini savunmuştur.

Bu yeni yaklaşıma göre A, bir küme ailesi ve A ile B bu ailenin elemanı olan birer küme olmak üzere bu kümelerin denkliği aşağıdaki şarta bağlanmıştır.

$$A \sim B \Leftrightarrow f = \{f \mid f: A \rightarrow B, \text{bijektif}\} \neq \emptyset$$

Yani, aralarında en az bir tane birebir-örten (bijektif) fonksiyon tanımlanabilen kümeler birbirlerine denktir. Örneğin A={1,2,3} ve B={4,5,6} olmak üzere

f: A → B, f = {(1,4) , (2,5) , (3,6)} fonksiyonu bijektif olduğundan A~B olduğu söylenebilir.

Cantor'un geliştirdiği bu yeni teori, kardinalite kavramını temel almaktadır. $\aleph$ bir küme ailesi olmak üzere, $\sim = \{(A,B) \mid s(A)=s(B) , A,B \in \aleph\} \subset \aleph^2$ bağıntısına göre oluşacak farklı denklik sınıflarının $K = \aleph/_{\sim}$ oran kümesine, *kardinal sayılar kümesi* denir.

Yani kardinal sayılar birbirine denk kümelerin karşılık geldiği ve bu kümelerin eleman sayılarını belirten sayıdır (Özmantar, 2010). Örneğin yukarıdaki örnekte A={1,2,3} ve B={4,5,6} kümeleri birbirlerine denk oldukları için A ve B kümelerinin kardinaliteleri eşit ve 3'dür.

Cantor bu kardinalite mantığını sonsuz kümelere de uygulamak istemiştir. Ona göre elemanlarını saymak mümkün olmasa da sonsuz iki küme arasında bijektif bir eşleme yaparak sonsuz kümelerin denkliği ortaya konabilirdi. Böyle bir yaklaşım Galileo'nun paradoks olarak gördüğü problemin çözümünü de sunmaktadır. Çünkü bu yaklaşıma göre ℕ doğal sayılar kümesi ile Ç, çift sayılar kümesi arasında en azından aşağıdaki bijektif (birebir ve örten) fonksiyon tanımlanabilir.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow Ç,$$
$$x \rightarrow f(x) = x^2$$

Bu fonksiyon, aslında eleman sayıları eşit gözükmese de ℕ ,doğal sayılar kümesi ile Ç, çift sayılar kümelerinin birbirlerine denk olduğunu ve dolayısı ile bu kümelerin kardinalitelerinin eşit olduğunu ortaya koymaktadır.

Bu denklik ilişkilerinin ortaya konması, sonsuzluk kavramının öğretiminde hem sezgisel, hem de hazırbulunuşluk boyutlarıyla ilişkilendirilebilir. Bu açıdan bakıldığında matematik eğitiminde de bireylerin sonsuzluk kavramını nasıl inşa ettiklerini anlamak adına çalışmalara yer verilmiştir. Ancak bu çalışmalardan çok azı kanıt süreçlerinden yola çıkarak bireylerin sonsuzluğu nasıl anlamlandırdığını anlamaya yöneliktir. Yapılacak bu çalışma gelecekte öğrencilerinde *''sonsuzluk''* gibi soyut bir kavramı inşa etmesi beklenen ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kendilerinin sonsuzluk kavramını ne düzeyde anlamlandırdıklarına olan meraktan ortaya çıkmıştır. Bireylerin Cantor'un ortaya koyduğu bu yaklaşım ile sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin kanıtları inşa etme süreçlerinde formal bilgileri ile sezgisel süreçleri arasındaki kurdukları bağlantılar Kidron ve Dreyfus tarafından ortaya konan kanıt imajı çatısı çerçevesinde araştırılması istenmiştir.

Problem Durumu

Bu araştırmanın amacı ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin kanıt imajlarının incelenmesidir. Talim Terbiye Kurulu (TTK) tarafından 2013 yılında ortaya konan mevcut ortaokul matematik öğretim programı incelendiğine sonsuzluk kavramının doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar,

irrasyonel sayılar, gerçel sayılar, doğru, ışın, doğru parçası, düzlem vb. pek çok kavramın inşa sürecinde sıklıkla vurgulandığı söylenebilir. Diğer yandan sonsuzluk kavramı soyut ve çelişkili bir kavram olması dolayısıyla öğrenciler için olduğu kadar öğretmenler için de anlaşılması zor bir kavramdır (Maria, Thanasia ve Katerina, 2009). Bu noktada öğrencilerinde bu kavramın temellerini oluşturması beklenen öğretmen adaylarının bizzat kendilerinin sonsuzluk hakkında ne kadar donanımlı oldukları öğrencilerine sunabilecekleri katkı düzeyini doğrudan etkileyebilmektedir. Bu sebeple öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramı konusunda yeterli bilgi düzeyine sahip olmaları önemlidir. Bu bilginin göstergelerinden biri olarak, sonsuzluk kapsamında yer alan ispatları ve bunların incelenmesi yapılacak araştırmanın yapı taşlarından birisi olarak görülmüştür.

İlgili literatür incelendiğinde ilköğretim ve üniversite öğrencileri ile öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramı ile ilgili algılarını ortaya çıkarmaya yönelik yapılan çalışmalar bulunmaktadır (Aztekin, 2008). Ancak bu çalışmalar arasında öğretmen adaylarının sonsuzluk ile ilgili algılarının ortaya konmasına yönelik olarak kanıt oluşturma süreçlerinin teorik bir çerçeve altında incelendiği çalışma sayısı oldukça azdır. Dolayısı ile bu çalışmada bireylerin sonsuzluğa ilişkin algılarının, sonsuzluk içerisinde yer alan ispatlar yolu ile incelenmesi planlanmıştır.

Bu noktada kastedilen ispatlama süreci, çeşitli muhakeme süreçleri içeren bilişsel bir süreci ve bu bilişsel süreçlere rehberlik eden duyusal süreçleri de içinde barındırmaktadır. Bu noktada bireyler görüşlerini destekleyecek (veya çürütecek) matematiksel argümanlar üreterek bir sonuca ulaşabilirler. Bu noktada bahsedilen sonuca ulaşma eylemi matematiksel ispat becerisi ile yakından ilişkilidir. Türk Dil Kurumu sözlüğüne göre ispat *''Tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıtlama''* şeklinde ifade edilmektedir. Matematik eğitimcileri de farklı ispat tanımları ortaya koymuşlardır. Tall'a (1998) göre matematiksel ispatların iki amacı vardır. Bunlardan ilki, mantıklı adımlarla bir hipotezin bir sonuca götürdüğünü gösterme ve diğeri önermelerden sonuçlara neden/nasıl gidildiğini anlamaktır. Harel ve Sowder (1998) ispatı, kişinin kendisini ve başkalarını bir matematiksel durumun doğruluğuna ya da yanlışlığına ikna etmek için kullandığı argümanlar olarak tanımlamıştır. Weber (2005) ise ispat sürecini mantıksal, kavramsal, sosyal ve problem çözme boyutları içeren karmaşık bir matematik aktivitesi olarak tanımlamıştır. Diğer yandan Stylianides'e (2007) göre ispat, matematiksel bir iddiayı doğrulamak ya da yanlışlamak üzerinden ortaya konan, birbiriyle ilişkili savlar dizisidir.

Matematiksel muhakemeyi temel alan ve bir gerekçelendirme sürecini içerisinde barındıran ispat aktiviteleri, özellikle üniversite düzeyinde birçok matematiksel konunun öğreniminde ve öğretiminde önemli bir role sahiptir. İleri matematik düzeyindeki pek çok ders içerisinde, bu becerinin etkin kullanımı gerektiren konu alanları yer almaktadır. Ancak literatürde yer alan araştırmalar öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispat becerilerini istenen düzeyde kullanamadıklarına vurgu yapmaktadır. Örneğin, Moore (1994) çalışmasında öğrencilerin ispata ilişkin tanımları bilmediklerini veya bunları ifade etmede güçlük çektiklerini belirtmiştir. Antonini ve Mariotti (2008) ise öğrencilerin ispat yöntemlerini yeterince bilmediklerine vurgu yapmıştır. Weber (2001) ise yeterli ön öğrenmelere sahip olan öğrencilerin bile ispatı oluşturmada başarısızlık yaşadıklarına dikkat çekmiştir. Bu sonuçlar bir arada değerlendirildiğinde ispat sürecinde ortaya çıkan yetersizliklerin çeşitli faktörlerden kaynaklandığı sonucuna ulaşılabilir. Bu bağlamda, yetersizliklerin önüne geçilebilmesi için bireylerin ispat yaklaşımlarının doğru bir şekilde anlamlandırılması gerektiği yorumu yapılabilir. Bu bağlamda Hart (1994) ispatlama sürecine yönelik olarak daha fazla bilişsel temelli araştırmanın yapılması gerektiğini belirtmiştir. Bu sağlandığı takdirde bireylerin ispat becerilerinin gelişimine olanak verebilecek etkili bir öğretim planının ilgililer tarafından tasarlanması mümkün olabilir. Bu amaçla mevcut çalışmada ispat süreçlerinin ve bu beceriyi sergilemedeki anlayışlarının/yaklaşımlarının ortaya konması amaçlanmıştır.

Bu sebeple öğrencilerin ispatlama süreçlerinin derinlemesine ve çok yönlü analizleri ile elde edilecek veriler ispata yönelik öğretimsel uygulamalar için öneriler içerebilir.

Yukarıdaki bilgiler ışığında yüksek lisans tezinde ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin ispatları ortaya koyma süreçlerinde geliştirdikleri ispat imajlarının bilişsel ve duyuşsal bileşenleri bağlamında, ilgili teorik çerçevelerden yararlanılarak incelenmesi amaçlanmıştır.

Amaç ve Önem

Matematik, içerisinde anlamlı ilişkileri barındıran ve kendine özgü terminolojisi olan bir disiplindir. Doğası gereği soyut bir yapıda olan matematiğin, içerdiği çok boyutlu ilişki ağının ve sahip olduğu sembolik dilin öğrenciler tarafından anlamlandırılması hedeflenmektedir. Bu doğrultuda ortaya konan çağdaş matematik eğitimi yaklaşımları kuralların ve formüllerin ezberini önemseyen geleneksel yaklaşımların aksine bireylerin

matematiksel açıdan üst düzey düşünme becerilerinin desteklenmesini önemsemektedir. Bu tarz düşünme biçimlerinden biri olarak görülen soyut düşünme, bireylerin sonsuzluk kavramını doğru anlamlandırmalarına ve bu kavram ile ilgili mantıklı akıl yürütmelerine paralel olarak gelişebilir. Öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğini ortaya koyma sürecinde ortaya koydukları ispatların bilgi oluşturma perspektifinden incelenmesi ile sahip oldukları kanıt imajlarının analizi yapılabilir. Bu imajların içerdiği bilişsel ve duyuşsal bileşenler bağlamında incelenmesi, bireylerin sonsuzluğa ilişkin önbilgilerinin, sonsuzluğun soyut doğasına ilişkin sezgisel yaklaşımlarının ve formal önbilgileri ile sezgisel yapıları arasında kurdukları matematiksel ilişkilendirmelerinin açığa çıkarılmasını sağlayabilir. Ortaya konan tüm bu süreçler yolu ile öğretmen adaylarının sonsuzluğa ilişkin algılamalarının hatalı ve eksik yanlarının giderilebilmesine ön ayak olabilecek yeni yaklaşımlara bir temel oluşturulabilir. Öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramına ilişkin kavramsal alt yapılarının eksik yönlerinin belirlenmesi ve giderilmesi ile ileride rehberlik edecekleri öğrencilerde bu kavramı daha eksiksiz ve daha doğru bir şekilde ortaya çıkarmalarına ön ayak olunabilir.

Diğer yandan yapılacak çalışma ile öğretmen adaylarının kendilerine sunulan bir teoremin doğruluğunu sürecinde kullandıkları sezgisel ve formal ispat yaklaşımları arasındaki ilişkilerin analiz edilmesi de mümkün olabilecektir. Oxford Amerikan Sözlüğü (2004)' ne göre (aktaran: Doruk ve Kaplan, 2013) ispat kelimesinin sözlük anlamı, bir gerçeğin veya bir şeyin doğruluğunun ya da varlığının gösterilmesi, bir iddianın doğruluğunun gösterilmesi; bir iddianın iyi, geçerli veya doğruluğunu test etme sürecidir. Yani, ispat sürecinde bir birey karşılaştığı yeni bir önermeyi önceki bilgileri doğrultusunda doğrulayabilir ya da yanlışlayabilir.

Yapılacak bu çalışmada öğretmen adaylarının ispat süreçlerinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu inceleme süreçlerinde hipotez ile hüküm arasındaki mantıksal bağların analizi mümkün olacaktır. Buna ek yapılacak incelemeler ile kanıt imajının doğasını anlayabilmek için ortaya konan varsayımların nedenleri de araştırılacaktır. Böylece verilen bir önermeye ilişkin ispatın, sadece doğruluğunun veya yanlışlığının belirlenmesinin ötesinde aynı zamanda neden doğru veya yanlış olduğunun da anlaşılması amaçlanmaktadır. Böylece öğretmen adaylarının ispat yaklaşımlarının ve bu yaklaşım doğrultusunda şekillenen ispat süreçlerinin anlaşılması mümkün olabilecektir.

Özetle bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramına ilişkin sezgisel ve formal yaklaşımları incelenecek, bu kavrama ilişkin anlayışlarının ortaya çıkarılması ve bu çerçevede şekillenen ispat yaklaşımlarının

anlaşılması sağlanacaktır. Böylece soyut matematik dersi içerisinde ele alınan sonsuzluk kavramına ilişkin doğru matematiksel anlayışların gelişmesine engel olan durumların anlaşılması sağlanabilecek ve daha geçerli anlayışların geliştirilebilmesine olanak sağlanabilecektir. Ayrıca bu çalışma ile öğretmen adaylarının matematiksel bir ispatı ortaya koyabilme sürecindeki yeterlikleri de kanıt imajı çerçevesinde incelenmiş olacaktır. Matematik yığılmalı bir bilim olduğundan soyut matematik bağlamında yer alan bu kavramlara ilişkin hatalı anlayışların anlaşılması ile diğer öğrenme alanlarında yer alan çeşitli güçlüklerin giderilmesine de olanak sağlanması mümkün olabilir.

Dolayısı ile bu çalışmada öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin genel yaklaşımlarının, ispat süreçlerinin ve ispat imajlarının içerdiği bilişsel ve duyuşsal bileşenleri bakımından incelenmesi amaçlanmıştır. Bu inceleme, başta öğretim elemanlarının ispata yönelik öğretimsel uygulamalarına katkı yapması ve matematik eğitimi araştırmaları kapsamında öğrencilerin yaşadıkları sürecin çok boyutlu olarak betimlenmesine olanak sağlaması açısından önemlidir.

Teorik Çerçeve

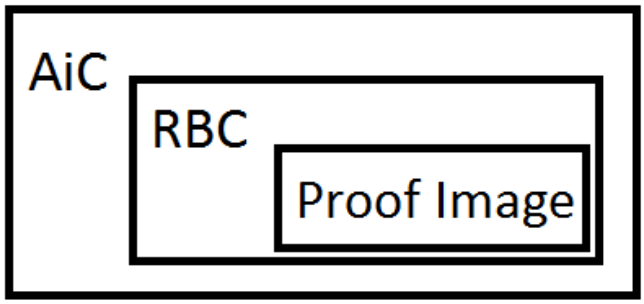
Bu çalışmanın yürütülmesi sürecinde oluşturulan problem durumunun analizine yönelik aşağıdaki kuramsal çerçevelerden yararlanılacaktır.

- *Bağlamda Soyutlama Teorisi (Abstraction In Context - AiC)*
- *RBC Soyutlama Teorisi (Recognizing, Building-with, Constructing)*
- *Kanıt İmajı (Proof Image)*

Bu teorik çerçevelerin genelden özele sıralaması aşağıdaki gibi modellenebilir.

Şekil 1

Teorik Çerçeveler Arasındaki İlişki



En genel çerçeve olan AiC teorisi soyutlamanın bağlamına ve anlamına ilişkin genel bir çerçeve sunmaktadır. Bu teoriye dayalı geliştirilen RBC soyutlama teorisi, öğrenmeyi gözlenebilir (epistemik) eylemler ile açıklamaktadır. Kanıt imajı (*Proof image*) ise her iki teoriye ilişkin yaklaşımları daha özel bir süreç olan ispat sürecine indirgemektedir. Buna göre ispat, bir öğrenme süreci olarak ele alınmaktadır. Bu sürecin (bilişsel boyutunun) analizinde epistemik eylemlerden yararlanılmaktadır.

Diğer yandan mevcut çalışmada ispat imajının duyuşsal (*affective*) boyutunun detaylandırılabilmesi için Selden ve Selden (2007) tarafından ortaya konan *Duygusal Olmayan Bilişsel Hisler* 'den yararlanılacaktır.

Tüm bu teorilere ilişkin daha kapsamlı bilgiler aşağıda sunulmuştur.

AiC Teorik Çerçevesi

Bağlamda Soyutlama teorik çerçevesi (*Abstraction in Context Theoretical Framework*), Dreyfus, Hershkowitz ve Schwarz tarafından, Davydov'un görüşlerini temel alarak ortaya konan bir bilgi oluşturma teorisidir. Daha özel olarak bilgi oluşturma süreci Freudenthal Okulunun dikey matematikleştirme görüşünü benimsemektedir. Buna göre öğrenme yeni yapıların, önceki yapıların dikey olarak yeniden organize edilmesiyle ve bunlar arasında ilişki kurulmasıyla mümkün olmaktadır.

Bu teoride *soyutlama* terimi bu yeniden organize etmeyi belirtmek için kullanılmaktadır. Bağlamsal faktör belirli bir durumda nasıl bir soyutlama gerçekleştirileceğini etkiler. Bu bağlamın pek çok bileşeni vardır. Bunlar aşağıda belirtilmiştir.

- ***Müfredatsal bağlam***: Sıklıkla zihindeki belirli öğrenme hedefleri ile tasarlanmış eylemler dizisi içerir.
- ***Tarihsel bağlam:*** *Öğrencinin önceki deneyimlerini içerir.*
- ***Öğrenme bağlamı***: Öğrencinin kullanımında olan teknolojik araçlar ile bilgisayarlı ortamları içerir.
- ***Sosyal bağlam***: Grup çalışması, bireysel çalışma ve tüm sınıf çalışmasının değişimli olabileceği ortamdır.

AiC teorisi, soyutlamayı eylemlerden oluşan bir aktivite olarak değerlendirir. Böylece soyutlama, süreçleri açısından incelenebilir. Buna göre soyutlama, öğrenenin kendi amaçlarından bağımsız değildir. Dolayısı ile soyutlama ile ortaya çıkan anlam da kişinin amaçlarından bağımsız olamaz. Bu durum öğrenmelerin, kendi eylemlerinden türediği aktivite içerisinde ele alınması gerektiğine işaret etmektedir.

RBC Soyutlama Teorisi

Bu model, matematiksel soyutlama süreçlerinin analiz edilmesi amacıyla Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus (2001) tarafından AiC teorik çerçevesi bağlamında ortaya konmuş bir öğrenme modelidir. Leont'ev tarafından ortaya konan *aktivite teorisi* temel alınarak oluşturulmuştur. Modelin amacı öğrenmenin nasıl gerçekleştiğini gözlenebilir (epistemik) eylemler ile açıklamaktır. Epistemik eylemler öğrencilerin sözlü ifadelerinde ya da sözsüz eylemlerinde doğrulanabilecek eylemlerdir. AiC ve RBC ayrı başlıklar altında ifade edilse de bir bütün olarak soyutlama sürecini ele alırlar. Özel olarak, AiC öğrenmenin gerçekleştiği soyutlama kavramının doğasını açıklarken RBC soyutlamanın süreçlerini ortaya koymaktadır.

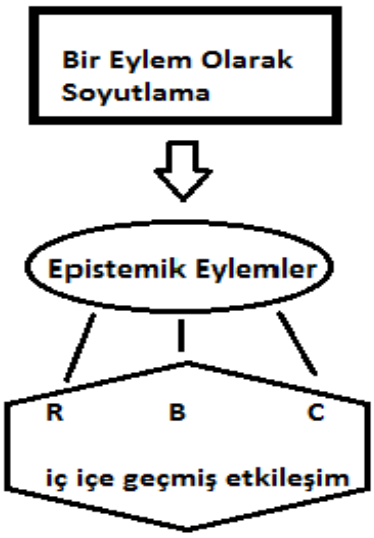
RBC, modelini ortaya koyan Hershkowitz ve arkadaşlarına (2001) göre soyutlama süreci (*bilgi oluşumu*) üç temel epistemik eylem ile açıklanmaktadır. Bu eylemler Tanıma (R-) , Kullanma (B-) ve oluşturma (C-) olarak ifade edilebilir.

- ***Tanıma eylemi:*** Bireyin önceden kazanmış olduğu formal veya informal bilgilerle, öğrenme ortamındaki matematiksel unsurlara anlam yüklemesi demektir. Öğrencilerin ilgilendiği probleme uygun önceden oluşturulmuş belli yapıları fark ettiğinde meydana gelir (Türnüklü ve Özcan, 2014). Tanıma en az iki yol ile gerçekleşir: analoji yapma ve özelleşme.
- ***Kullanma eylemi:*** Öğrencilerin bir durumu anlama, anlamlandırma, anlatma, bir öneriyi savunma, bir varsayımda bulunma hallerinde ve bir problem çözmeyle karşı karşıya olduklarında gözlenir. Belirli bir amacı gerçekleştirmek için önceden oluşturulan matematiksel yapıların kullanılmasıdır (Schwarz, Dreyfus, Hadas ve Hershkowitz, 2004). Yeni bilgi oluşumu anlamına gelmez.
- ***Oluşturma eylemi:*** Soyutlamanın ana basamağı olan, yeniden düzenleme ve yeniden yapılanma süreçleri olarak tanınan, bireyin yeni yapı üretmek için sahip olduğu bilgiyi birleştiren ve tamamlayan unsurlardan oluşur. Oluşturma (C-) soyutlama sürecinin ana basamağıdır ve oluşturma tanınan yapıların kısmi değişikliğe uğratılarak yeniden yapılandırılması ve düzenlenmesi sürecidir (Bikner – Ahsbahs, 2004).

Soyutlama sürecini oluşturan epistemik eylemler ve bunların ilişkilerini özetleyen diyagram aşağıda sunulmuştur.

Şekil 2

RBC Soyutlama Teorisi



Yukarıda sunulan diyagram, Dreyfus (2007) tarafından oluşturulmuş ve bu çalışma kapsamında Türkçeleştirilmiştir.

RBC soyutlama teorisinin ismini, Tanıma (Recognizing) , Kullanma (Building With-) ve Oluşturma (Constructing) süreçlerinin baş harflerinden almıştır. Bu üç eylem ile birey, kendisi için yeni bir bilgi üretebilir. Bu noktada ‘’*yeni*’’ ile kastedilen birey için daha önce ulaşılabilir olmayan farklı bir matematiksel yapının ortaya konmuş olmasıdır. Yazarlar ve çeşitli araştırmacılar tarafından pek çok defa kullanılan bu modelde yer alan eylemlerin iç içe geçmiş paralel ve etkileşimli olduğu keşfedilmiştir. Buna göre epistemik eylemler arasındaki yapılanma paralel, dallanma, birleşme (*eklenme*) ve diğer yollarla etkileşim şeklinde devam edebilir. Bu yapılanma ve bu eylem dizilerinde bir öğrenenin yeni yapılarının desteklenmesi sonraki inşalar boyunca gerçekleşebilir. Bu yapılar arasındaki etkileşim bağlamlar açısından farklılık gösterebilmektedir.

Diğer yandan aynı etkinlik bir öğrenci için oluşturma ile sonuçlanabilirken başka bir öğrenci için kullanma eylemi ile sonuçlanabilir. Bu öğrencinin kişisel geçmişine, (*hazırbulunuşluğuna*) bağlıdır. Öğrencilerin amaçları da kullanma ve oluşturma eylemlerini güçlü bir şekilde etkiler. Eğer standart bir problem çözmeleri istenirse muhtemelen önceki elde ettikleri yapıları hatırlama ve kullanma eylemlerini kullanırlar. Eğer standart olmayan bir problem çözerlerse bir zorlukla karşılaşabilirler ve bu da bilgilerinin dikey olarak organize edilmesini ve bu yolla zorluğun aşılmasına neden olabilir.

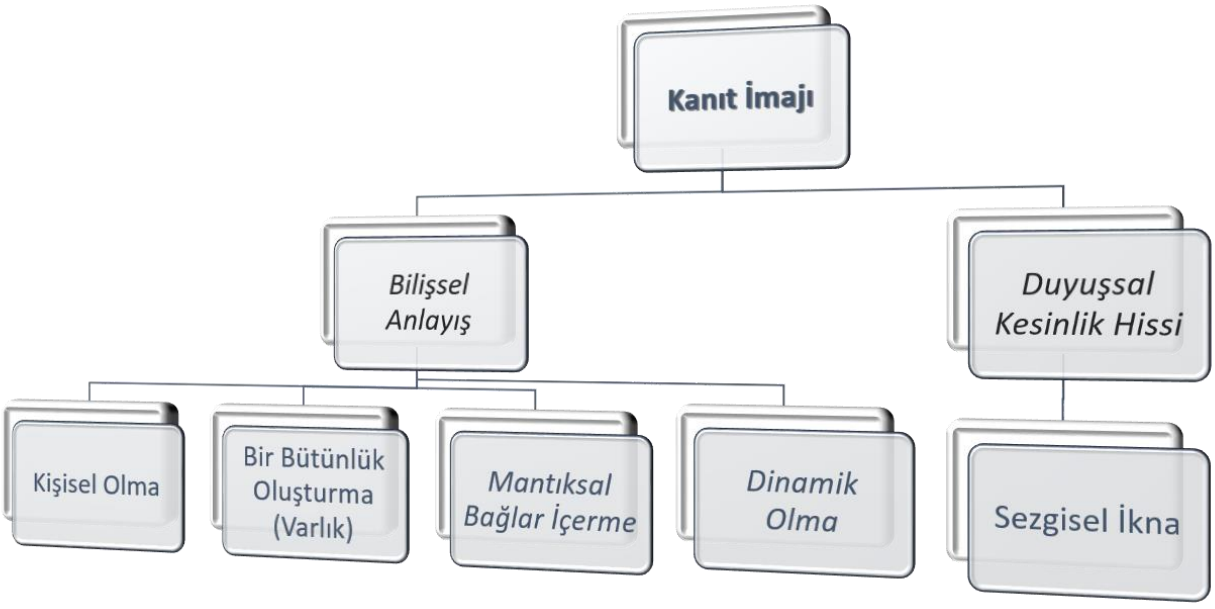
Kanıt İmajı

İspatlama sürecinde sezgisel ve mantıksal düşünme arasındaki etkileşimi ve bu etkileşimden doğan bilginin oluşum sürecini mikro-analitik düzeyde inceleyen Kidron & Dreyfus (2014), Bağlamda Soyutlama (AiC) teorik çatısı kapsamında RBC soyutlama teorisinden yararlanarak *ispat imajı* kavramına ulaşmıştır. İspatlama sürecinde önemli bir aşama olarak tanımladıkları ispat imajı kavramını, ispatla ilgili çeşitli bakış açılarından sezgi, kavramsal anlayış, semantik ispat oluşturma, kavram imajı çerçeveleriyle karşılaştırarak tanıtmışlar ve çift zincirli kavram imajı-kavram tanımı yapısını kullanarak da ispat imajı-formal ispat analojisi oluşturmuşlardır. Bu kavram çerçevesinde, bir iddianın neden doğru olduğunu anlamaya teşebbüs etmiş olan bir bireyin bir ispat imajına sahip olabileceğini belirten yazarlar, iki bileşenin bireyde bulunması durumunda bu bireyin kesinlikle bir ispat imajına sahip olduğu vurgusunu yapmışlardır. Bu bileşenlerden ilki kişisel ve dinamik olan, mantıksal bağlantılar içeren ve bir oluşuma yol açan bilişsel anlayıştır. Diğeri ise iddianın neden doğru olduğuna dair sezgisel ikna sağlayan duyuşsal bir kesinlik hissidir.

Kanıt imajı ve bileşenleri aşağıdaki diyagramda özetlenmiştir.

Şekil 3

Kanıt İmajı ve Bileşenleri



Buna göre bireylerin bir ispatı ortaya koyma sürecinde oluşturdukları imajlar bu bileşenler bağlamında incelenebilmektedir. Kidron & Dreyfus (2014)'a göre ispat imajının Bilişsel Anlayış bileşeni içerisinde aşağıdaki karakteristikleri barındırmaktadır:

- *Mantıksal Bağlar İçerme Karakteristiği*
- *Dinamik Olma Karakteristiği*
- *Kişisel Anlayış Karakteristiği*
- *Varlık (Bütünlük) Karakteristiği*

Diğer yandan imajın Duyuşsal His bileşeni içerisinde ispat sürecinde gerçekleştirilen işlemlere ilişkin sezgisel inanç boyutunu barındırmaktadır.

Duygusal Olmayan Bilişsel Hisler

Kidron ve Dreyfus'un (2014) ortaya koyduğu ispat imajı teorik çerçevesine göre bir ispat sürecinde, bireylerin gerçekleştirdikleri bilişsel eylemlerin birer tamamlayıcısı olarak duyuşsal bileşenler ortaya çıkmaktadır. Yazarlar çalışmalarında bu duyuşsal hissi aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

'' Anlayışın duyuşsal hissi, varlık sayesinde sezgisel ikna sağlar ve karmaşık bir şekilde bilişsel anlayış ile bağlantılıdır. ''

Yazarların *''sezgisel ikna''* olarak adlandırdığı bu duyuşsal boyutun Selden, Mckee ve Selden (2009) tarafından ele alınan haklılık hissine karşılık geldiği söylenebilir. Çünkü onlara göre, ispatlama açısından haklılık hissi duygusal olmayan önemli bir deneyimdir. Haklılık hissi, problem çözme ve ispatlama süreçleri için gerekli olan büyük bilgi kümelerini değerlendirebilir ve birleştirebilir. Örneğin, bir ispat yazma veya okuma eyleminin sonunda kısa dönem hafıza o ispatın doğru olup olmadığına dair bilinçli rasyonel bir değerlendirmeye izin verecek kadar yeterli detaylı bilgiyi tutmada yetersizdir. Buna rağmen, bir şeyler okuduğu veya yazdığı ispatın doğru olduğuna karar vermesine sebep olmaktadır. Doğruluk hissinin bu tür kararlarda büyük bir rol oynadığını görüyoruz (Selden, Mckee & Selden, 2009). Davranışsal şemaları ele aldıkları çalışmada, yazarlar ispatlama sürecinde bilme hissi, aşina olma hissi, doğru iz üstünde olma hissi ve haklılık hissini duygusal olmayan bilişsel hislere örnek olarak göstermişlerdir. Onlara göre bilme hisleri kişinin bir araştırmaya devam edip etmeyeceğini etkilediğinden bilişsel eylemlere rehberlik edebilirler ve onları yönlendirebilirler. Çünkü öğrencilerinin ispat ve

ispatlama ile ilgili güçlüklerinin çeşitlerinin farkında olmak onlara nasıl yardımcı olunacağı konusunda eğitimcileri daha duyarlı hale getirebilir (Selden & Selden, 2007).

Dolayısı ile bu çalışmada kanıt imajının duyuşsal boyutunun, duygusal olmayan bilişsel hisler yardımı ile daha derinlemesine analiz edilmesi amaçlanmıştır.

Problem Cümlesi

Bu araştırmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin genel yaklaşımları ve buna ek olarak bu süreçte şekillendirdikleri ispat imajları incelenecektir. Dolayısı ile araştırmanın problemi aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

''İlköğretim matematik öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğini gösterme sürecindeki genel yaklaşımları ve bu sürece ilişkin ispat imajları hangi unsurları içermektedir?''

Alt Problemler

1. İlköğretim matematik öğretmeni adayları sonsuz kümelerin denkliğini göstermede kullandıkları genel yaklaşımlar nelerdir?

2. İlköğretim matematik öğretmeni adayları sonsuz kümelerin denkliğini ispatlarken oluşturdukları kanıt imajlarının bilişsel ve duyuşsal özellikleri nelerdir?

Sayıltılar

1. Araştırmada öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerde öğretmen adaylarının doğru ve samimi cevaplar verdikleri varsayılmaktadır.

2. Veri toplama araçlarının tüm yetkileri kapsadığı ve görüşleri ortaya çıkaracak nitelikte olduğu varsayılmaktadır.

Sınırlılıklar

Bu araştırma, çalışmaya katılan öğretmen adayları ile sınırlıdır. Elde edilecek bulgulardan yola çıkılarak varılacak sonuçlar bu öğretmen adayları için geçerlidir.

Tanımlar

Teorem

Doğruluğu kanıtlanabilen önerme (TDK Matematik Terimleri Sözlüğü, 2009).

İspat

Tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıtlama (Türkçe Sözlük, 1988, s.120).

Küme

Bir bütün olarak ele alınan nesneler topluluğu (Güney ve Özkoç, 2015, s. 74).

Fonksiyon

A ve B boş olmayan kümeler ve f, A'dan B'ye bir bağıntı olsun. $\forall a \in A$ için a'ya f ile bağlı B'de bir ve yalnız bir eleman bulunabilirse f ' ye A'dan B içine bir fonksiyon (veya dönüşüm) denir (Çallıalp, 2011, s. 15).

Birebir Fonksiyon

Bir f fonksiyonu altında farklı elemanların görüntüleri de farklıysa buna birebir (1-1) fonksiyon denir (Güney ve Özkoç, 2015, s. 269).

Örten Fonksiyon

Bir fonksiyon altında hedef kümesindeki tüm elemanların orijinalleri varsa buna örten fonksiyon denir (Güney ve Özkoç, 2015, s. 277).

Bijektif Fonksiyon

A kümesinden *B* kümesine tanımlanan bir fonksiyon aynı zamanda birebir ve örten ise bu fonksiyona bijektif fonksiyon denir.

Denk Kümeler

A ve B birer küme olmak üzere bu iki küme arasında en az bir bijektif fonksiyon tanımlanabiliyor ise bu kümelere denk kümeler denir ve A~B şeklinde gösterilir.

Kardinalite

$\mathcal{K}$ bir küme ailesi olmak üzere, $\sim = \{(A,B) \mid s(A)=s(B)\ ,\ A,B \in \mathcal{K}\} \subset \mathcal{K}^2$ bağıntısına göre oluşacak farklı denklik sınıflarının $K = \mathcal{K}/_{\sim}$ oran kümesine, *kardinal sayılar kümesi* denir. Buna göre $A \in \mathcal{K}$ kümesinin kardinalitesi #(A) ile gösterilir.

Kısaltmalar

TTK: Talim ve Terbiye Kurulu

TDK: Türk Dil Kurumu

AiC: Abstraction in Context (Bağlamda Soyutlama Teorisi)

RBC: Recognizing, Building-with, Constructing Soyutlama Teorisi

R- : Recognizing (Tanıma)

B- : Building With- (Kullanma)

C- : Construction (Oluşturma)

II. BÖLÜM

İLGİLİ YAYIN ve ARAŞTIRMALAR

Sonsuz Kümelerin Denkliğine İlişkin Çalışmalardan Bir Derleme

Matematik eğitimi literatürü incelendiğinde sonsuz kümelerin karşılaştırılmasına ilişkin eğitimin çeşitli kademelerinde yer alan bireyler ile çalışmalar yapılmış olduğu görülebilir. Sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili yapılan bu çalışmalarda genel olarak, kullanılan temsillerin öneminin ortaya konması ve öğrencilerin sonsuz kümeleri karşılaştırırken kullandıkları yöntemlerin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır.

Tirosh ve Tsamir (1996), yapmış oldukları çalışmada, öğrencilerin verilen iki sonsuz kümenin eşitliği ile ilgili sezgisel kararlarının, bu kümelerin temsile bağlı olarak değişebileceğini ifade etmiştir. 10-12 yaşları arasındaki yüz seksen dokuz öğrenci ile yapılan bu çalışmada farklı temsil biçimlerinden (*yatay temsil – dikey temsil – geometrik temsil* ve *sayısal temsil*) biçimlerinden hangisi ile öğrencilerin birebir eşleme yöntemini daha kolay fark edebildikleri araştırılmıştır. Bunun için farklı temsil biçimleri kullanılarak kümelerin karşılaştırılmasına yönelik öğrencilere on dört soru sorulmuştur. Kümelerin denk olduğunu düşünen öğrenciler sonsuz kavramının tek olduğunu ve kümeler arasında birebir eşleme yapılabileceğini belirtmişlerdir. Buna karşın kendilerine sunulan kümelerin denk olmadığını düşünen öğrenciler kümeler arasındaki öz alt küme ilişkisine dayanarak bu yorumu yaptıklarını belirtmişlerdir. Bu bulgulardan hareketle Tirosh ve Tsamir, sonsuzluk kavramı ile ilgili sezgisel düşüncelerin temsil biçimlerinden etkilendiği sonucuna ulaşmışlardır. Dolayısı ile belirli temsil biçimlerinin kullanılması

durumunda öğrencilerin sonsuz kümeleri daha kolay karşılaştırabildiklerine ilişkin bulgulara ulaşılmıştır.

Tirosh'un (1985) yaptığı başka bir çalışmada 11/17 yaş aralığındaki 1381 öğrenciye sonsuz kümelerin eleman sayılarının karşılaştırılması ile ilgili otuz iki problem sunulmuştur. Öğrencilerden kendilerine sunulan sonsuz kümelerin denkliğini araştırmaları ve yanıtlarını açıklamaları beklenmiştir. Çalışma sonucunda öğrencilerin yanıtlarının birbirlerine benzer olduğu görülmüştür. Farklı yaş gruplarında yer alan öğrencilerin, iki kümenin denk olduğunu ifade etmede kullandığı temel unsur sonsuz *her kümenin eleman sayılarının eşit olduğu* görüşüdür. Örneğin N, doğal sayısının kümesinin elemanları ile bir doğru üzerinde yer alan noktaların sayısının karşılaştırılması istendiğinde öğrencilerin büyük çoğunluğu her iki kümede de sonsuz sayıda eleman olduğundan hareketle bu kümelerin denk olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Bu çalışmada kendilerine sunulan sonsuz kümelerin denk olamayacağını belirten öğrenciler ise aşağıdaki görüşleri açıklamalarına birer delil olarak sunmuşlardır:

- *Bir küme öz alt kümesinden daha fazla eleman içerir.*
- *Sınırlı bir kümenin eleman sayısı sınırsız bir kümenin eleman sayısından daha azdır.*
- *Elemanları doğrusal ifade edilebilen bir küme, iki boyutlu bir kümeden daha az eleman içerir.*

Çalışmaya katılan öğrencilerin büyük bir bölümü birebir eşleme fikrini kullanamamıştır. Diğer yandan öğrencilerin sonsuz kümeleri karşılaştırmada kullandıkları sezgisel ölçütlerin büyük çoğunluğunun küme teorisi ile çeliştiği gözlenmiştir.

Fischbein, Tirosh ve Hess (1979) yapmış oldukları çalışmada ortaokul (5-8) öğrencilerinin sonsuzluğa ilişkin sezgilerini ortaya koymayı amaçlamışlardır. Bu doğrultuda onlardan iki sonsuz kümeyi (*doğal sayılar ve çift doğal sayılar*) karşılaştırmaları istenmiştir. Bu çalışma sonucunda öğrencilerin iki temel argümana sahip oldukları görülmüştür.

- *Doğal sayılar kümesinin eleman sayısı, çift doğal sayılar kümesinin eleman sayısından daha fazladır.*
- *Çift doğal sayılar kümesi, doğal sayılar kümesinin bir öz alt kümesidir.*

Fischbein, bu argümanlardan hareketle ortaokul öğrencilerinin "*bütün, kendisini oluşturan parçadan büyüktür*" düşüncesine sahip olduklarını ifade etmiştir. Öğrencilerin küçük bir kısmı (%10) her iki kümenin de sonsuz olduğunu ifade etmişlerdir.

Bu sonuçlardan hareketle Fischbein, bireylerin sonsuzluğa ilişkin sezgilerinin mantıksal sonuçlar çerçevesinde değil gerçekte doğru olduğuna inanılan hisler çerçevesinde şekillendiğini ifade etmiştir.

Diğer yandan Fischbein, Tirosh, ve Melamed (1981) yaptıkları çalışmada sekizinci ve dokuzuncu sınıf öğrencilerinin sonsuzluk kavramına ilişkin sezgilerini ortaya çıkarmaya çalışmışlardır. Bu doğrultuda onlara aşağıdaki soruyu yöneltmişlerdir.

"*Bir doğru parçası, üzerindeki her bir nokta ile doğal sayılar kümesinin elemanları arasında eşleme yapılabilir mi?"*

Çalışmaya katılan öğrencilerin büyük bir kısmı her iki kümenin elemanlarının karşılıklı olarak eşlenebileceğini ifade etmişlerdir. Fischbein, öğrencilerin bu yanıtlarından hareketle onların *"Sonsuzluk sadece tükenmeyen (non-exhaustable) anlamına gelir*" sezgisine sahip olduklarını ifade etmiştir. Öğrencilerin sahip oldukları bu temel sezgiye göre sonsuz kümelerin eleman sayıları daima eşit olmak zorundadır. Bu durumun nedeni gündelik yaşamdaki sezgilerimiz ile açıklanmıştır. Çünkü gerçek yaşama dayalı (*doğal*) sezgilerimize göre sonsuzluğun seviyeleri yoktur. Dolayısı ile sonsuz kümeleri, içerdikleri sonsuzluklar açısından sıralamak mümkün değildir. Diğer bir ifade ile bu sıralama eylemi, sezgilerimiz açısından anlamsızdır.

Tsamir (2001) sonsuz kümelerin karşılaştırılmasına ilişkin farklı temsillerin etkisini incelemek amacıyla bir çalışma yürütmüştür. Bu çalışmada 16-18 yaş aralığındaki 15 öğrenciye sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili sorular yöneltmiştir. Öğrencilerin aynı denkliği sorgulayan ve farklı temsiller içeren (*geometrik ve sayısal vb*.) sorulara farklı yanıtlar verdikleri görülmüştür. Bu gözlemden hareketle Tsamir, öğrencilerin farklı temsiller ile sorgulanan denkliklere ilişkin verdikleri cevaplar arasında tutarsızlık bulunduğunu söylemiştir. Bu çalışmada öğrencilerin sonsuz kümeleri karşılaştırmada 4 kriteri kullandığı belirlenmiştir. Bunlar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1) *Parça-bütün: Bir* kümenin alt kümesi kendisinden daha az eleman içerir.
2) *Sonsuz tektir: Bütün* sonsuz kümeler aynı sayıda eleman sahiptir.
3) *Sonsuz kümeler kıyaslanamaz*.
4) *Birebir eşleme*

Güven ve Karataş (2004) , yaptıkları çalışmada lise üçüncü sınıf, ilköğretim matematik öğretmenliği ikinci sınıf ve ilköğretim matematik öğretmenliği dördüncü sınıf öğrencilerinden oluşan 60 kişilik çalışma grubunda yer alan bireylerin sonsuz kümelerin denkliklerini karşılaştırmada kullandıkları yöntemleri araştırmıştır. Bu çalışmada öğrencilerin sonlu kümelere ait yaklaşımlarını sonsuz kümelere genellemeye çalıştıkları gözlenmiştir. Diğer yandan çalışma grubunda yer alan öğrencilerin çok azının birebir eşleme yöntemini kullanabildikleri gözlenmiştir. Çalışma grubunu oluşturan öğrencilerin

sonsuz kümeleri karşılaştırmada kullandıkları temel argümanlar aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

- *Sonsuzluk tektir görüşü*
- *Sonsuz kümelerin karşılaştırılamayacağı görüşü*
- *Sonsuz kümeleri karşılaştırmada eksik elemanları belirleme*
- *Kümelerin birbirlerini kapsama ilişkilerini inceleme*

Tall (1980), üniversite öğrencileri ile yaptığı çalışma sonucunda Cantor tarafından geliştirilen kardinal sonsuzluk düşüncesinin, üniversiteye devam eden öğrenciler tarafından tam olarak anlaşılamadığı sonucuna ulaşmıştır. Limit kavramına yönelik sorulara verilen yanıtlardan hareketle öğrencilerin sonsuzluğa ilişkin iki temel algıları ortaya çıkarılmıştır. Bu algılardan ilkine göre sonsuzluk kavramı asla ulaşılması mümkün olmayan (*sınırlayıcı*) bir kavramdır. Diğer algıya göre sonsuzluk, anlaşılması mümkün olmayan bir büyüklüktür. Öğrencilerin sonsuzluğa ilişkin bu algılarının temel nedeni sonsuzluğa ilişkin aritmetik düşünceleri ile açıklanmıştır. Başka bir ifade ile öğrencilerin sonsuzluğa ilişkin potansiyel düzeydeki anlayışlarının bu kavramı asla bitmeyecek bir süreç olarak algılamalarına sahip olduğu belirtilmiştir. Dolayısı ile gerçek sonsuzluğu temel alan kardinal sonsuzluk yaklaşımının öğrenciler tarafından yeterince anlamlandırılamadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Üniversite düzeyinde yapılan başka bir çalışmada Maria, Thanasia ve Katerina (2009) öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğini belirlemede kullandıkları yaklaşımları incelemiştir. Bu çalışman sunucunda öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında geometrik temsillerden hareketle birebir eşleme fikrine ulaştıkları gözlemlenmiştir.

Singer ve Voica (2003), tarafından yapılan bir başka çalışmada ise daha küçük çocukların sonlu ve sonsuz kümeler ile ilgili kavram yanılgıları incelenmiştir. Bu çalışma içerisinde öğrencilerin sonlu ve sonsuz kümeleri karşılaştırmada hangi yöntemleri kullandıkları yaklaşımlar araştırılmıştır. Örneğin doğal sayılar kümesi ve çift doğal sayılar kümeleri verilerek bu kümelerin eleman sayılarının karşılaştırılması istendiğinde öğrencilerin sayma ilişkisi ve parça-bütün ilişkisi kurarak bu kümeleri karşılaştırdıkları görülmüştür. Öğrenciler, sonlu kümelerin ölçülebilir bir uzunluğunun olduğunu ancak sonsuz kümelerin böyle bir uzunluğu olmadığını söylemişlerdir.

İşleyen (2013) yılında ortaöğretim öğrencileri üzerinde yaptığı çalışma ile onların sonsuzluk kavramınsa ilişkin algılarını ortaya koymak istemiştir. Nitel araştırma

yöntemlerinden olgu bilim deseni kullanılan bu çalışmaya 38'i kız, 34'ü erkek olmak üzere toplam 72 ortaöğretim öğrencisi katılmıştır. Veri toplama aracı olarak açık uçlu bir test geliştirilmiş ve odak grup görüşmesi yapılmıştır. Bu çalışmanın sonunda öğrencilerin sonsuz kümelerin denkliği konusunda güçlük yaşadıkları belirlenmiştir. Çalışmaya katılan öğrencilerin çoğu (35) sonsuz kümelerin karşılaştırılamayacağını belirtirken, bir kısmı (14) da sonsuz kümelerin eleman sayılarının eşit olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Az sayıdaki öğrenci (8) birebir-örten eşleme fikrinin uygun bir yöntem olduğunu ifade etmişlerdir. Bu noktadan hareketle yazar öğrencilerin sonsuzluğa ilişkin algılarının geliştirilmesi gerektiği sonucuna ulaşmıştır.

Sonsuz kümelerin karşılaştırılmasını içeren çalışmalardan biri de Narlı ve Narlı (2012) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada öğrencilerin sonsuzluk fikrine ne derece sahip olduklarını, okulun öğrencilere sonsuzluk fikrini kazandırıp kazandıramadığını ve öğrencilerin bu konudaki yanılgılarını, sayı kümeleri ile ilişkilendirerek belirlenmeye çalışılmıştır. Bu amaçla 13-14 yaş arası İlköğretim öğrencilerinden, 131 öğrencinin görüşleri açık uçlu anket ile toplanmıştır. Ayrıca seçilen 10 öğrenci ve 3 ilköğretim matematik öğretmeni ile yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Sonuçta öğrencilerin sahip oldukları sonsuzluk fikirlerinde kişisel deneyimlerin yattığı ve formal eğitimin buna fazla yardım etmediği gözlenmiştir. Diğer yandan öğrencilerin kümelerin sonsuz olup olmamasını belirlemede, sezgisel yollarla, tümevarımsal süreç ve başka bir küme ile karşılaştırma yöntemlerini kullandıkları tespit edilmiştir. Araştırmada kullanılan '' *İki sonlu kümenin elemen sayısı eşitse bu iki kümeye denk kümeler denir. Sizce sonsuz kümeler denk olabilir mi? Açıklayınız.* '' sorusuna öğrencilerin büyük çoğunluğunun denk olamayacağı cevabını verdikleri gözlenmiştir. Ayrıca kümelerin denk olabileceğini ifade eden öğrenciler içerisinde de birebir-örten fikrini yeterince kullanamayan oldukları gözlenmiştir.

Ünan ve Doğan (2009) tarafından yürütülen çalışmada bir üniversitede okuyan 25 matematik öğretmeni adaylarının sonlu küme, sayılabilir ve sayılamayan sonsuz küme kavramlarına ilişkin bilgilerinden yola çıkarak yaptıkları hataların matematiksel modelleme yardımıyla belirlenmesi amaçlandı. Bu amaçla öğrencilere küme kavramıyla ilgili bilgilerini hatırlamalarına yardımcı olacak açık uçlu sorular yöneltildi. Sorulara verilen cevaplar değerlendirilerek öğrencilerin düştükleri yanılgılar belirlendi ve bu yanılgıları zihinlerde doğru matematiksel düşünmeyi oluşturacak şekilde etkinlikler yaptırıldı. Etkinlikler sonucunda kavramları daha kolay zihinlerde oluşturdukları görüldü.

Bu çalışma içerisinde öğrencilere liste yapma metoduna göre, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi ve $(0,1)$ açık aralığı verilerek eleman sayılarına göre sınıflandırmaları istendi.
Öğrencilerin verdikleri cevaplar yüzdelerine göre aşağıda sunulmuştur.

1) Öğrencilerin %20 si doğru yanıt vermiştir.
2) Öğrencilerin %40 ı kümelerin eleman sayıları hakkında bir yorum getirememiştir.
3) Öğrencilerin %17 si sonsuz elemanlı küme ile sayılabilir sonsuz elemanlı kümeyi bilmediklerini ifade etmişlerdir.
4) Öğrencilerin %23 ü kümelerin birbiri ile ilişkisi üzerinde durmuş ve hepsini sonsuz elemanlı küme almıştır.

Dolayısı ile bu çalışmaya katılan öğrencilerin sonsuzluk kavramına ve sonsuz kümelerin denkliklerine ilişkin yanılgıları olduğu gözlenmiştir.

Aztekin (2008), yaptığı doktora tezi çalışmasında farklı yaş gruplarındaki öğrencilerinin sonsuzluk kavramına ilişkin anlayışlarını ortaya çıkarmak istemiştir. Bu amaç ile repertuar çizelge tekniği ve gömülü teori (grounded theory) kullanılarak doktora ve ilköğretim öğrencilerinin sonsuzluk kavramı ile ilgili bilişsel seviyelerinin ve yapılarının (constructs) ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Bir üniversitede okuyan 4 doktora öğrencisi ile yapılan çalışmada Repertuar Çizelge Tekniği kullanılarak sonsuzluğa ilişkin sahip oldukları bütün yapıların ortaya konması amaçlanmıştır. Küçük yas grubundaki (10-13 yas) öğrenciler ile yapılan çalışmada ise gömülü teori (Grounded Theory) yaklaşımı takip edilmiştir. Araştırmanın sonucunda; doktora öğrencilerinin öğrencilerin genel anlayışlarının başlangıçta daha çok potansiyel sonsuzluk anlayışına uygun olduğu görülmüştür. Aldıkları eğitime göre standart olmayan analizin etkilerinden bahsedilebileceği, yapılan küme teorisi derslerinin öğrencilerin anlayışlarını aktüel sonsuzluğa doğru yönlendirdiği gözlemlenmiştir. İlköğretim öğrencileriyle yapılan çalışma sonucunda ise bu yas grubunun potansiyel sonsuzluk gibi literatürde geçen bazı sonsuzluk anlayışlarını taşıdıkları görülmüş; fakat anlayışlarının tamamıyla ileri yaslarda görülen potansiyel sonsuzluk anlayışı gibi olmadığı, standart olmayan analize uygun olan anlayışlar gibi farklı anlayışların ipuçlarının bu yas grubunda olabileceği belirlenmiştir. Ayrıca ilköğretim öğrencileri ile doktora öğrencileri arasında sonsuzluk ile ilgili benzer anlayışlar olduğu görülmüştür. Öğrencilerin okuldaki matematik derslerinde gördüğü konularda net bir düşünceye sahip olamadığı; bu tip konuları sonsuzluk sembolü ile

anlatma gibi öğretmen davranışlarının, öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili belirli kalıplara bağlı kalmasına neden olduğu gözlemlenmiştir.

Bozkuş (2014) yaptığı yüksek lisans tezi çalışmasında ortaokul öğrencilerinin sonsuzluk kavrayışlarını incelemiştir. Bu araştırmada ortaokul (5., 6., 7. ve 8. sınıf) öğrencilerinin sonsuzluk kavramı ile ilgili kavrayışlarının ortaya çıkartılması amaçlanmıştır. Öğrencilere sonsuzluk kavramı, büyük sayılar, sayı bağlamında sonsuzluk, limit durumu ve sonsuz kümelerin karşılaştırılması ile ilgili sorulardan oluşan durum tespit testi uygulanmış ve öğrencilerle klinik mülakatlar yapılmıştır. Araştırmanın çalışma grubunu, 2012-2013 eğitim-öğretim yılında Kocaeli
İl Merkezinde yer alan üç ortaokuldan toplam 176 öğrenci oluşturmaktadır.
Bu çalışmalardan elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- Öğrencilerin sonsuzluk kavramını "*sonu olmayan*", "*devam eden*" ve "*bitmeyen*" şeklinde tanımladıkları ve sonsuzluğu sonu olmayan bir süreç olarak algılamaktadır.
- Öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili matematiksel, fiziksel ve duygusal olmak üzere üç sonsuzluk algısı mevcuttur.
- Öğrenciler sayısı belli olmayan nicelikleri sonsuz olarak anlamlandırmaktadırlar.
- Öğrencilerin sonsuz kümelerde statik sonsuzluk düşüncesi gösterdiği, limit durumunda ise potansiyel sonsuzluk düşüncesinin ön planda olduğu görülmüştür.
- Doğal sayılar ve çift doğal sayılar gibi sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında öğrencilerin sonlu kümeler için geçerli olabilecek yöntemlerin sonsuz kümelerin için de geçerli olabileceğini düşündükleri görülmüştür. Bu yöntemleri sonsuz kümelerin karşılaştırmasında kullanmaya çalışmışlardır.

Yapılan araştırmalar farklı düzeylerde yer alan bireylerin sonsuzluk kavramına formal düzeyde değil sezgisel olarak yaklaştıklarını göstermektedir. Sonlu gerçekliğe adapte olmuş gerçek yaşam deneyimlerinin sonsuz kümelere uygulanması sonucu bireylerin bazı kavram yanılgılarına düşebildiği görülmektedir. Ayrıca benzer olarak öğrencilerin sonlu kümeler bağlamında öğrendikleri bazı ilişkileri sonsuz kümelere transfer etmeye çalışmaları da onların hatalı çıkarımlara ulaşmalarına neden olmaktadır. Bu problemlerin ortadan kaldırılabilmesi için öğrencilerin sonsuzluk kavramını içeren etkinlikler ile daha fazla karşılaştırılması ihtiyaç duyulmaktadır.

Literatüre bakıldığında soyut matematik içerisinde yer alan bazı kavramlara yönelik bireylerin düşünme süreçlerini teorik bir yapı altında inceleyen çalışmalar

olmasına rağmen sonsuz kümelerin denkliğinin kanıtlanmasına yönelik bireylerin kanıt imajlarını (Dreyfus ve Kidron, 2014) doğrudan inceleyen bir çalışmaya rastlanmamıştır. Sonsuzluk kavramının ilköğretim matematik programı içindeki yeri ve programın ortaya çıkmasını beklediği üst düzey beceriler göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adaylarının bu konuya ilişkin yaşadıkları zorlukları yeni bir çerçeve olan kanıt imajları yolu ile belirlemek ve bu sorunların giderilmesine yönelik bir modele kaynak sağlayabilmek açısından yapılan çalışma literatüre katkı sağlayabilir.

İspat Becerisine Yönelik Yapılmış Çalışmalara İlişkin Bir Derleme

Matematik eğitimi alanında, farklı düzeylerdeki öğrencilerin ispat becerilerini nasıl sergilediklerine ilişkin pek çok çalışmaya rastlanabilir. Bu çalışmalar ile farklı yaş gruplarındaki öğrencilerin ispat becerisini yürütme süreçleri, bu süreçte yaşadıkları güçlükler, ispata yönelik duyuşsal özellikleri (tutum-inanç vb.) anlamlandırılmaya çalışılmıştır.

Literatürde yer alan çalışmalardan bazıları bu bölümde sunulmuştur.

Moore (1994) öğrencilerin ispat yapma sürecinde yaşadıkları güçlükleri incelemiştir. O, öğrencilerin kavramları nasıl anladıkları ile ispatı nasıl gerçekleştirdikleri bağlantıları araştırmıştır. Dolayısı ile bu bağlamdaki öğrenci güçlüklerini ortaya koymuştur. Buna göre öğrenciler kavramların tanımlarını bilmedikleri için veya tanımlarını bildikleri kavramları anlamlandıramadıkları için ispata ulaşamıyor olabilirler. Ayrıca bu kavramlara ilişkin imajlarından yeterince yararlanamadıkları da gözlenmiştir. Bu noktada önemli eksikliklerden biri genelleme becerisindeki yetersizlik olarak belirtilmiştir. Diğer bir ifade ile öğrenciler uygun örneklerden hareketle genel bir sonuca ulaşmada güçlük yaşamaktadırlar. Bu çalışmada sıralanan diğer güçlükler aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

- Uygun bir ispat yapısı oluşturmada yaşanan güçlükler
- Matematiksel dili anlamada ve kullanmakta yaşanan güçlükler
- İspat için uygun bir başlangıç noktası belirleyememe

Güler (2013) yapmış olduğu doktora tez çalışmasında, matematik öğretmeni adaylarının cebir dersi kapsamında yer alan matematiksel ispat becerilerini incelemiştir.

Durum çalışması yönteminin kullanıldığı bu çalışmanın araştırma grubunu 10 lise matematik öğretmen adayı oluşturmuştur. Her bir öğretmen adayı ile 6 mülakat gerçekleştirilmiştir. Bunlardan biri hariç kalan 5 tanesi etkinlik temelli olarak yürütülmüştür. Araştırmada gerçekleştirilen etkinlik temelli mülakatlarda cebir alanına yönelik problem çözme, ispat yapma ve ispatın doğruluğunu değerlendirme etkinliklerinden oluşmuştur. Elde edilen verilerin analizinde nitel betimsel analiz ve nitel içerik analizi kullanılmıştır. Bu çalışmada ulaşılan bulgular aşağıdaki gibi maddeleştirilebilir.

- Öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik genellikle olumlu görüşlere sahip olduklarını göstermiştir.
- Öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde; kavram imajı oluşturma, problem çözme, ispat yapma ve ispatın doğruluğunu değerlendirme etkinliklerinde sahip oldukları güçlüklerin literatürde yer alan güçlüklerle paralel olduğu görülmüştür.
- Öğretmen adaylarının ispat yapma süreci içerisinde değerlendirilen problem çözme süreci içerisinde problemi anlama ve kümeden eleman seçme, ispat yapma süreci içerisinde ispata nasıl başlayacağını belirleme ve ispatın doğruluğunu değerlendirme süreci içerisinde ise kavram kullanımını inceleme kategorilerinin ispat sürecinde kilit rol oynadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Schabel (2001) yapmış olduğu doktora tez çalışmasında üniversite öğrencilerinin de ispat yapma sürecinde güçlükler yaşadığını belirlemiştir. Elementer Sayılar Kuramı (Sayılar Teorisi) dersi kapsamında 4 katılımcı ile yapılan çalışmalarda etkinlik temelli klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Elde edilen veriler literatürde yer alan çalışmalar ile karşılaştırılarak temalar oluşturulmuştur.

Bu sayede yaşanan güçlükleri giderebilmek için öneriler sunmuş ve bir öğretim modeli geliştirilmesi amaçlanmıştır.

Elde edilen veriler özellikle aşağıdaki başlıklara ilişkin ispat becerilerinin geliştirilmesi gerektiği sonucunu ortaya koymuştur.

- Öğrencilerin genelleme ve aksi örnek verme becerilerinin geliştirilmesi
- Bir başkasının etkisi altında kalmadan (özgün) ispat yapabilme becerisinin geliştirilmesi
- Öğrencilerin ispatlarını başkalarına uygun argümanlar sunarak açıklayabilmesi

Sarı, Altun ve Aşkar (2007) yaptığı çalışmalarında öğrencilerin kanıtla ilgili görüşlerini belirlemek ve kanıtlama süreçlerini incelemeyi amaçlamışlardır. Nitel yaklaşım ile tasarlanan bu çalışma bir durum çalışmasıdır. Çalışmaya ikisi kız biri erkek üç öğrenci katılmış, hepsi matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencileridir. Katılımcılar, ölçüt örnekleme yöntemine göre Analize Giriş II dersi kapsamındaki başarıları gözetilerek düşük, orta ve yüksek başarı gösteren öğrenciler olarak seçilmişlerdir. Araştırmanın verileri ders gözlemleri, öğrencilerle yapılan görüşmeler ve görüşmede sorulan ifadeyi kanıtladıkları kâğıtlardan oluşmaktadır. Verilere içerik analizi uygulanmış ve görüşmeler Nvivo 7 programında kodlanmıştır. Çalışmanın sonucunda Analiz dersinde başarılı olan öğrencinin ispat sürecinde başarılı olduğu görülmüştür. Bu öğrenci tanım ve teoremler arasında uygun ilişkiler kurabilmiştir. Diğer öğrenciler istenen ispata ulaşamamış, bu süreçte derste yaptıklarını hatırlamaya yada doğru ispatı diğer kaynaklarda arayarak bulmaya çalışmışlardır.

Güven, Çelik ve Karataş (2005) tarafından ortaöğretim düzeyinde öğrenim gören öğrencilerin geometriye ilişkin farklı konulardaki ispat yapabilme beceriler incelenmiştir. Bu kapsamda Trabzon merkezinde farklı okullardan toplam 152 çocuğa 6 farklı ispat içeren bir sınav uygulanmıştır. Çocukların yaptıkları ispatlar, geliştirilen altı aşamalı bir ölçek yardımıyla değerlendirilmiştir. Buna göre öğrencilerin büyük çoğunluğunun (% 46) matematiksel ifadeye ilişkin hiçbir çıkarımda bulunamadığı görülmüştür. Sadece %6'lık kesimin ispatı tam olarak yapabildiği belirlenmiştir. Diğer yandan öğrencilerin büyük çoğunluğunun ispata yönelik uygun modeller oluşturamadıkları ve verileri ayırt edemedikleri gözlenmiştir.
Sonuç olarak yazarlar, matematiğin özünü oluşturan bu alanda çocukların yetersiz olduklarını ortaya koymuşlardır.

Weber (2001) soyut matematikte herhangi bir teoremin ispatını oluşturmaya yönelik güçlükleri belirlemeyi amaçlamıştır. Bu amaçla çalışmaya katılan her bir öğrenciden 7 farklı teoreme ilişkin düşüncelerini sesli bir şekilde ifadelerini istemiştir. Bu noktada sunulan teoremler grup homomorfizması ile ilgili seçilmiştir. Öğrencilerin sesli olarak gerçekleştirdikleri ispat sürecinin analizinde öğrenciler aşağıdaki temalar ile kodlanmışlardır.

- Doğru ispatı oluşturabilen öğrenciler
- Yeterli bilgiye sahip olsa da ispata ulaşamayan öğrenciler
- Yetersiz bilgiden dolayı ispata ulaşamayan öğrenciler

- Doğru bir ispata ulaştığını düşünse de (mantıksal hata nedeniyle) ispata ulaşamayan öğrenciler

Örneğin bazı öğrenciler bir yada iki örek vererek teoremi ispatladıklarını düşünmüşlerdir. Öğrencilerin yaşadıkları güçlükler genel olarak iki başlık altında değerlendirilmiştir.

i. *Öğrencilerin kanıtın bileşenleri hakkındaki yetersiz fikirleri*
ii. *Kavramı ya da teoremi anlamada ve uygulamadaki yetersizlikler*

Bu çalışmanın sonucunda yeterli bilgiye ve kavrayışa sahip olmanın bir ispatı oluşturmak için tek başına yeterli olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Çoğu zaman öğrencilerin ispat için yeterli bilgiye sahip oldukları ancak ispatı oluşturmada güçlük yaşadıkları belirlenmiştir.

Arslan ve Yıldız, 2010 yılında yapmış oldukları çalışmalarında, 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamalarıyla ilgili yaşantılarını ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Matematiksel düşünmenin aşamalarını dikkate alarak her biri 9 sorudan oluşan çalışma yaprakları geliştirilmiştir. Pilot çalışmanın gerçekleştirilmesinin ardından asıl uygulama 24 lise öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Elde edilen bulgular, matematiksel düşünmenin aşamaları ilerledikçe öğrenci başarısının düştüğünü ortaya koymuştur. Bununla birlikte, öğrencilerin özelleştirmede iyi performans sergiledikleri ancak genel bir ispat oluşturmada büyük sorun yaşadıkları tespit edilmiştir. Ayrıca, genelleme ve varsayımda bulunma aşamalarında öğrencilerin cevaplarının sözel ve cebirsel, ispatlama aşamasında ise aritmetik, geometrik ve cebirsel kodları altında toplandıkları belirlenmiştir.

Powers, Craviotto ve Grassl (2010) da üniversite öğrencilerinin ispat becerilerini incelemişlerdir. Bu doğrultuda cebir kapsamında yer alan ispatların doğruluklarının belirlenmesi ile ispatı gerçekleştirme becerisi arasındaki ilişki incelenmiştir. Çalışmada matematik bölümü öğrencilerinin ve matematik öğretmen adaylarının pek çoğunun sunulan bir ispatın doğruluğunu değerlendirmede ve istenen bir ispatı gerçekleştirmede güçlük yaşadıkları belirlenmiştir. Araştırmacılar değişkenlere ilişkin gözlemlerden hareketle ispat değerlendirme yeteneklerinin geliştirilmesinin ispat becerisini geliştirmeye katkı sağlayabileceği görüşünü ifade etmişlerdir.

Diğer bir çalışma Stylianides ve Stylianides tarafından 2009 yılında gerçekleştirilmiştir. Araştırmacılar, 39 öğretmen adayının ispat oluşturma becerilerini incelemiş ve onlardan oluşturdukları ispatları kendilerinin incelemelerini istemiştir. Bu

amaçla öğretmen adaylarına ispat problemleri verilmiş ve olası yanıtlar aşağıdaki gibi kodlanmıştır.

i. İspat
ii. İspat olmayan fakat genel olarak geçerli ifadeler
iii. Genel olarak geçerli olmayan ifadeler
iv. Deneysel ifadeler
v. Gerçek olmayan ifadeler

Öğretmen adaylarının cevapları analiz edildiğinde büyük kısmının doğru ispatı oluşturduğu görülmüştür. Diğer yandan çok az öğretmen adayının gerçek olmayan ifadeleri kullandıkları gözlenmiştir. Sonuç olarak yapılan araştırma ile öğretmen adaylarının kendi yapmış olduğu ispatları değerlendirebilmelerini sağlanmış ve yapılan ispatları değerlendirme becerilerine olumlu katkılar sağlanmıştır. Böylece öğretmen adaylarının gelecekteki öğrencilerinin ispata bakı açısını daha kolay anlayabilecekleri araştırmacılar tarafından vurgulanmıştır.

Sonsuzluk ve ispat becerisi üzerine pek çok çalışmaya daha literatürde rastlamak mümkündür. Görüldüğü gibi araştırmacıların pek çoğu öğrencilerin (*kavramlara veya yöntemlere ilişkin*) yetersizliklerinden dolayı ispatı istenen düzeyde yürütemedikleri sonucuna ulaşmıştır. Bu durum matematiksel ve pedagojik açıdan anlaşılabilir bir durumdur.

Diğer yandan Weber (2001) tarafından sunulan aşağıdaki bulgu ve buna benzer diğer sonuçların daha ilginç bir noktaya ışık tuttuğu söylenebilir.

‘’ *Yeterli ön bilgiye sahip olan öğrencilerin bile ispatı oluşturma sürecinde güçlük yaşadığı görülmektedir.*’’

Bu sonucun, aşağıdaki soruyu gündeme getirdiği söylenebilir.

‘’*Eğer salt bilginin kendisi, istenen bir ispatı gerçekleştirmek için tek başına yeterli değil ise formal bir ispat sürecinin yürütülebilmesi hangi unsurlara bağlıdır?* ‘’

Bu soruya yanıt bulabilmek için AiC teorik çerçevesi kapsamında ortaya konan *İspat İmajı* teorik çerçevesi ve bunun bileşenleri bağlamında analizler gerçekleştirilmiştir.

III. BÖLÜM

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın yöntemi hakkında bilgi sunulacaktır. Bu amaçla aşağıdaki başlıklara ilişkin açıklamalar yapılacaktır.

- Araştırmanın modeli
- Çalışmanın grubu
- Veri toplama araçları
- Veri analiz yöntemleri

Ayrıca, bu bölüm kapsamında araştırma planının sunulması, katılımcıların tanıtılması, geçerlik ve güvenilirlik bağlamında alınan tedbirlerin paylaşılması da amaçlanmaktadır.

Araştırmanın Modeli

Bu araştırma betimsel türde ve nitel bir çalışmadır. Nitel araştırmayı "*gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama tekniklerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma*" olarak tanımlayabiliriz. Nitel araştırmalarda, araştırmanın konusunu oluşturan olgu ya da olay içinde bulunduğu doğal ortamında incelenmelidir (Patton, 1987, akt. Yıldırım ve Şimşek, 2013). Sosyal olaylar bağlı oldukları ortama göre şekillendiğinden, araştırma sonuçları bu ortam içinde anlamdır ve diğer ortamlara genelleme yapılamaz. Her olay kendi ortamında değerlendirilmeli ve yorumlanmalıdır. Nitel araştırma desenlerinden biri olan durum çalışması (case study) bu hususu ön planda tutar. Durum çalışmalarında bir ya da birkaç duruma ilişkin etmenler bütüncül bir yaklaşımla araştırılıp, ilgili durumu nasıl etkilediği ve ilgili durumdan nasıl etkilendiği incelendiği incelenir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Mcmillan (2000), durum çalışmalarını bir ya da daha fazla olayın, ortamın, programın, sosyal grubun ya da diğer birbirine bağlı sistemlerin derinlemesine incelendiği yöntem olarak tanımlamaktadır. Bir

duruma etki eden etmenler kendi ortamı içinde derinlemesine inceleneceği için yapılan bu çalışma örnek olay (*case study*) niteliği taşımaktadır. Durum çalışmalarında katılımcı sayısı (*örneklem büyüklüğü*) çoğu nitel araştırma yöntemine kıyasla göreceli olarak daha küçüktür. Bu husus durum çalışmalarının ayrıntılı ve derinlemesine bir araştırma yöntemi olmasından kaynaklanır (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

Çeşitleme (triangulation) bir araştırma deseninin güçlendirilip inandırıcılığı artırmak için kullanılan önemli yollardan biridir. Büyüköztürk ve arkadaşlarına (2013) göre çeşitleme; bir araştırmada tek bir yöntem yerine birbirini destekleyen, birbirine entegre olan iki ya da daha çok yöntemin birlikte kullanılmasını sağlayan ve böylece yöntemde zenginleştirmeyi amaçlayan bir uygulamadır. Denzin (1978)'e göre çeşitleme (triangulation) 4 boyutta yapılabilir. Bunlar aşağıda maddelenmiştir (Akt. Patton, 2014).

- Yöntem Çeşitlemesi
- Veri Kaynakları Çeşitlemesi
- Kuram Çeşitlemesi
- Araştırmacı Çeşitlemesi

Yıldırım ve Şimşek (2013)' e göre herhangi bir boyutta çeşitlemenin olmadığı bir araştırma geçerlik ve güvenirlik açısından zayıf kalabilir. Durum çalışmalarında (*case study*) geçerlik ve güvenirliği artırıp, inandırıcılığı kuvvetlendirmek için çeşitleme (*triangulation*) kullanılabilir.

Bu açıklamalar doğrultusunda, yapılan bu araştırmada görüşme, gözlem, doküman analizi gibi yöntemlerle çoklu veri toplama yoluna gidilmiştir. Bu doğrultuda 5 haftalık ders gözlemi yapılmış, gözlemler iki adet kamera ile farklı açılardan kayıt altında alınmıştır. Diğer yandan veri toplamak amacı ile uzman görüşü alınarak açık uçlu sorulardan oluşan 4 adet genel uygulama formu geliştirilmiştir. Bu formlarda sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin ispat soruları bulunmaktadır. Hazırlanan formlar gözlem süreci içerisinde öğrencilere uygulanmıştır. Ayrıca gözlemlere ve genel uygulamalara ek olarak seçilen öğretmen adayları ile etkinlik temelli görüşmeler yapılmıştır. Böylece öğretmen adaylarının ispat süreçlerine ve ispat imajlarına ilişkin derinlemesine analizinin yapılması amaçlanmıştır.

Çalışma Grubu

Araştırmanın evrenini ilköğretim matematik öğretmenliği 2. sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Bu çalışmada örnekleme işlemi, iki aşamada gerçekleştiğinden çok aşamalı örnekleme modeli kullanılmıştır. İlk aşama olan genel uygulama çalışmaları için kolay ulaşılabilir durum örneklemesi (*convenience sampling*) tercih edilmiştir. Bu kapsamda bir devlet üniversitesinde İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı'nda ikinci sınıfta öğrenim gören ve Mantık dersini almakta olan 100 öğrenci genel uygulama çalışmaları için seçilmiştir. Bu öğrenciler araştırma öncesinde ispat temelli derslerden Genel Matematik, Mantık, Soyut Matematik derslerini tamamlamışlardır.

Diğer yandan, genel grubu içerisinden bireysel çalışmalara uygun katılımcıların seçiminde ölçüt örnekleme tekniğinden yararlanılmıştır. Ölçüt örnekleme, problemle ilgili olarak belirlenen niteliklere sahip öğretmen adaylarının seçilmesine olanak sağlaması sebebiyle tercih edilmiştir. Bu yöntemde önceden belirlenmiş bütün koşulları taşıyan bireylerle çalışmayı amaç edinir. Diğer bir değişle bu örnekleme yöntemindeki temel anlayış, önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumların çalışılmasıdır. Sözü edilen ölçüt veya ölçütler araştırmacı tarafından oluşturulabilir ya da daha önceden hazırlanmış bir ölçüt listesi kullanılabilir (Şimşek ve Yıldırım, 2013).

Bu çalışmada, bireysel çalışmalara katılan öğretmen adaylarının seçiminde kullanılan ölçütler aşağıda belirtilmiştir.

- Genel uygulamalar içerisindeki başarı
- Düşüncelerini ifade etmede güçlük yaşamamak
- Araştırmaya katılmak için gönüllü olmak

Araştırma sürecinde sunulan ölçütlere göre genel grup içerisinden seçilen 3 katılımcı ile etkinlik temelli görüşmeler yapılmıştır. Her katılımcı ile 4 kez (toplamda 12 defa) etkinlik temelli bireysel görüşme yapılmıştır.

Süreç

Bu bölümde tezin görüşme ve gözlem süreci anlatılmaktadır. Çalışma sürecinde ilk olarak, öğretmen adayları araştırmanın amacı, önemi ve uygulama süreci hakkında bilgilendirilmiştir. Bu noktada gözlemlerin, genel ve bireysel uygulamaların yapılacağı onlara bildirilmiştir. Diğer yandan ders sürecinin video kayıt araçları ile kaydedilebilmesi için kendilerinden onay alınmıştır.

Yapılan çalışmada, öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin düşünme biçimlerinin ve formal/sezgisel yaklaşımlarının belirlenebilmesi için yarı yapılandırılmış gözlem çalışmalarına yer verilmiştir. Gözlemle elde edilen verilerin öncelikli amaçları, gözlemlenen olayı, olay içerisinde geçen etkinlikleri, bu etkinliklere katılan insanları ve gözlenen kişilerin bakış açılarından gözlenenleri betimlemektir (Platton, 2014, s. 262). Gözlem, nitel araştırmalar içerisinde yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir. Herhangi bir ortamda ya da kurumda oluşan davranışı ayrıntılı olarak tanımlamak amacıyla kullanılabilir. Davranışa ilişkin ayrıntılı, kapsamlı ve zamana yayılmış bir resim elde edilmek isteniyorsa gözlem yöntemi kullanılabilir (Bailey, 1982; Akt: Yıldırım ve Şimşek, 2004). Bu tekniğin en önemli avantajı gözlenenleri kendi ortamı içerisinde değerlendirmeye fırsat tanımasıdır. Bu şekilde birçok davranış objektif olarak değerlendirilebilir (Karasar, 2008).

Mevcut çalışma sürecinde, araştırmacı bir devlet üniversitesinde yürütülen Mantık dersine 5 hafta boyunca gözlemci olarak katılmıştır. Ders süreçleri esnasında sınıf ortamında gelişen durumlar araştırmacı tarafından gözlemlenmiştir. Bu süreçte araştırmacı tarafından alınan gözlem notları ile öğretmen adaylarının genel yaklaşımlarının analiz edilmesi amaçlanmıştır.

Mantık dersi; denklik kavramı, sonsuz kümeler, sayılabilirlik gibi kavramları içerisinde barındıran ve ileri matematik kapsamında üniversite düzeyindeki öğrencilere okutulan bir derstir. Bu dersin temelini Cantor tarafından ortaya konan *Küme Teorisi* ve bunun temel felsefesi oluşturmaktadır. Çalışmaya katılan öğrenciler önceki dönemlerden edindikleri sembolik mantık, kümeler, bağıntılar, fonksiyonlar ve ikili işlemler gibi ön bilgileri ile sürece dâhil olmuşlardır. Bu süreç öncesinde öğrenciler Cantor tarafından ortaya konan küme teorisi ile ilgili ders almamışlardır. Başka bir ifade ile öğrenciler ders sürecinde sunulan denklik ilişkileri ile ilk defa bu ders bağlamında karşılaşmışlardır. Dolayısı ile yapılan gözlemlerin temel amacı öğrencilerin bu denkliklere ilişkin ilk sezgilerinin ve ilk düşünme biçimlerinin anlamlandırılmasını sağlamaktır. Yapılan her bir ders farklı açılardan video ile kayıt altına alınmış ve incelemeler bu kayıtlar üzerinden yapılmıştır.

Çalışmada genel yaklaşımlarının belirlenebilmesi için ders içi gözlemlere ek olarak Genel Uygulama Çalışmaları yapılmıştır. Bu çalışmalara, çalışma grubunu oluşturan tüm öğretmen adaylarının katılması amaçlanmıştır. Diğer yandan öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin ispat imajlarının incelenebilmesi için genel grup içerisinden seçilen bireyler ile bireysel çalışmalara yer verilmiştir.

Genel grup çalışmaları ve bireysel uygulamalar ile ilgili ayrıntılı bilgiler sonraki bölümler içerisinde sunulmuştur.

Veri Toplama Araçları

Araştırmada farklı amaçları gerçekleştirmek için iki farklı veri toplama aracı kullanılmıştır. Bu araçlar aşağıda sunulmuştur.

i. Genel Uygulama Formları
ii. Bireysel Uygulama Formları

Öğrencilerin sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin düşünme biçimlerini anlayabilmek ve bu süreçte kullandıkları yaklaşımları belirleyebilmek için ders içi gözlemler yapılmıştır. Ayrıca, bu amacın gerçekleştirilebilmesi için gözlemlere ek olarak Genel Uygulama Formları hazırlanmış ve uygulanmıştır. Yapılan genel uygulama çalışmalarına, çalışma grubunu oluşturan öğrencilerin tamamının katılması amaçlanmıştır. Diğer yandan ispat sürecine ilişkin daha derinlemesine analiz yapılabilmesi için seçilen bazı öğrencilerle bireysel çalışmalara da yer verilmiştir.

Genel Uygulama Çalışmaları

Çalışma grubunu oluşturan adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin genel yaklaşımlarının belirlenebilmesi için gözlem sürecine ek olarak tüm öğrencilerin katılacağı genel uygulama çalışmalara yer verilmiştir.

Genel Uygulama Formları (*Ek1- Ek2- Ek3- Ek4*) iki alan uzmanının görüşü alınarak hazırlanmıştır. Hazırlanan bu testler Mantık dersi içerisinde konular işlendikçe uygulandıklarından bir anlamda ara testlerdir. Formların uygulanması 4 hafta sürmüştür. İlk hafta bireylerin hazırbulunuşluk düzeyleri yeterli olmadığından form uygulanmamıştır. Genel olarak her bir form, bir önceki derste verilen kavramlar ile oluşturulabilecek ispatları içerisinde barındırmaktadır. Ancak adayların sezgisel yaklaşımlarının belirlenebilmesi adına ön bilgiler ile formal bir biçimde ispatlanamayacak sorular da form içerisinde sunulmuştur. Bu soru tiplerine ait açıklamalar analiz içerisinde gerekli noktalarda sunulacaktır.

Genel uygulama formları, cevaplaması herkes tarafından zorunlu, seçmeli soru içermeyen ve klasik yazılı formatında sorulardan oluşmaktadır. Formda yer alan maddeler üst düzey bilişsel becerileri içerdiği ve uzun yanıtlı olduğu için soru sayısı sınırlı tutulmuştur. Her bir katılımcının formlarda yer alan soruları bireysel olarak cevaplaması istenmiştir. Ayrıca soruları cevaplamada, cevaplayıcılara herhangi bir kısıtlama getirilmemiş, cevaplama serbestliği tam olarak sağlanmaya çalışılmıştır.

Bu formlar ile öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğini gösterme sürecinde kullandıkları formal ve informal stratejiler hakkında bilgi toplanması amaçlanmıştır. Dolayısı ile bu formlarda kullanılacak soruların açık uçlu olarak kullanılması tercih edilmiştir. Büyüköztürk (2005)'e göre açık uçlu soruların avantajı, araştırmacının planlamadığı cevapları da alabilmesi ve konu hakkında daha ayrıntılı ve derin bir iç görü kazanabilmesi iken, soruların yanıtlanmasının fazla süre alması ve yanıtların kodlanıp analiz edilmesinde güçlükler dezavantajlardır.

Formlarda yer alan sorular, Mantık dersi içeriğinde yer alan kazanımlara dengeli olarak dağıtılmaya çalışılmıştır. Böylece sonsuzluk öğrenme alanının bir bütün olarak incelenebilmesi amaçlanmıştır. Diğer yandan, bu formlarda yer alan ispatlar aracılığı ile öğretmen adaylarının (*küme, sonluluk, sonsuzluk, sınırlılık, sınırsızlık, fonksiyon gibi*) temel kavramları nasıl anlamlandırdıkları, bu kavramları nasıl kullandıkları ve bu kavramlar arasında nasıl ilişkiler kurdukları gibi farklı sorulara yanıt bulunması da amaçlanmıştır. Böylece öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin ispat yaklaşımlarına ilişkin bir genel çerçeve sunulması amaçlanmıştır.

Özetle genel uygulama çalışmaları aracılığı ile öğretmen adaylarının sonsuz kümelere ve bunların denkliğine ilişkin genel yaklaşımları hakkında fikir sahibi olunması amaçlanmıştır. Bu yaklaşımların tgrup bazında incelenmesi ile yapılacak birebir mülakatların çerçevesi oluşturulmuştur. Böylece öğretmen adaylarının ispat yaklaşımlarının ve ispatı oluşturamama sebeplerinin genel bir çerçevede belirlenebilmesi ile bireysel çalışmalar için gerekli olan alt yapının sağlanabileceği beklenmektedir.

Genel Uygulama Formlarının Geliştirilmesi

Genel Uygulama I Formu

Genel Uygulama I formu genel grup çalışmaları sürecinde uygulanan ilk formdur. Bu form Mantık dersinin ilk haftasının tamamlanmasından sonra ikinci hafta

yapılacak olan ders öncesinde uygulanmıştır. Bu form, bir önceki ele alınan konuya ait kazanımları çok boyutlu olarak içeren ispat sorularından oluşmaktadır.
Bu formda yer alan sorular ders kapsamında yer alan aşağıdaki kazanımlara yöneliktir.

- *Kümelerde Denkliğin Temel Felsefesi*
- *Sonsuz Kümlerin Denklik Açısından Tartışılması*
- *Doğal Sayılara Denk olabilecek Sonsuz Kümelerin Belirlenmesi*

Uzman görüşü alınarak hazırlanan Genel Uygulama Formu I aşağıdaki üç sorudan oluşacak şekilde hazırlanmıştır. Soruların cevaplanmasında öğrencilere herhangi bir kısıtlama getirilmemiş ve cevaplama özgürlüğü sağlanmıştır. Soruların cevaplanması için yeterli süre öğrencilere verilmiştir.

Soru 1: *Bir küme öz alt kümesine denk olabilir mi? Örnekler ile açıklayınız.*
Soru 2: *$\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi {51,52,…} kümesine denk midir? Gösteriniz.*
Soru 3: *$\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi P asal sayılar kümesine denk midir? Gösteriniz.*

Formda öğrencilere sunulan her bir soru farklı bir amaç gözetilerek yöneltilmiştir. Birinci soru ile öğrencilerin denklik kavramının felsefesini ne ölçüde anlamlandırdıkları belirlenmeye çalışılmıştır. Bu ifade tüm formlarda yer alan tüm sorular için ortak bir amaç olarak genelleştirilebilir. Diğer yandan ikinci ve üçüncü sorular ile daha özel olarak, biri diğerinin öz alt kümesi olan iki sonsuz küme arasında nasıl bir ilişki kurulacağının belirlenmesi amacı ile yöneltilmiştir. Bu iki soru arasındaki temel fark üçüncü soruda yer alan asal sayılar kümesinin düzenli bir dağılım göstermemesidir. Dolayısı ile öğrencilerin bu soruda kurallı bir fonksiyon tanımlaması güçtür. Bunun yerine izah edilebilir eşlemelerden yararlanmaları beklenmektedir.

Hazırlanan bu form ile öğrencilerin sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin formal ve informal yaklaşımlarının, sezgisel düşüncelerinin ve (*varsa*) yanılgılarının belirlenmesi amaçlanmıştır.

Genel Uygulama II Formu

Genel Uygulama Formu II genel grup çalışmaları sürecinde uygulanan ikinci formdur. Mantık dersinin ikinci haftasının tamamlanmasından sonra üçüncü hafta yapılacak olan ders öncesinde uygulanmıştır.
Bu formda yer alan sorular, ders kapsamında yer alan aşağıdaki kazanımlara yöneliktir.

- *$\mathbb{N}^2$ Kümesinin N Kümesine Denkliği ve Bu Denkliğin Genelleştirilebilirliği*
- *Açık Aralıkların $\mathbb{R}$, gerçel sayılar Kümesine Denkliğinin Tartışılması*

Uzman görüşü alınarak hazırlanan Genel Uygulama Formu II aşağıdaki iki sorudan oluşmaktadır.

***Soru 1**: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi $\mathbb{Z}^2$ kümesine denk midir? Açıklayınız.*
***Soru 2**: $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi (0,1) aralığına denk midir?*

Soruların cevaplanmasında öğrencilere herhangi bir kısıtlama getirilmemiş ve cevaplama özgürlüğü sağlanmıştır. Soruların cevaplanması için yeterli süre öğrencilere verilmiştir.

Formda yer alan birinci soru ile öğrencilerin önceki çalışmalardan elde ettikleri bilgileri ($\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$ vb.) uygun bir biçimde bir araya getirmeleri bu sentezden yeni bir ispata ulaşmaları beklenmektedir. Böylece öğrencilerin önceki bilgilerinin sonuçlarını genişletmeleri mümkün olabilecektir. Dolayısı ile bu soru ile önceki bilgilerin yeni bir duruma nasıl transfer edilebileceğin belirlenmesi ve kullanılan yaklaşımların incelenmesi amaçlanmıştır.

Formda yer alan ikinci soru ile öğrencilerin sonlu bir kümenin sınırlı bir kümeye denk olup olamayacağını belirlemeleri istenmiştir. Bu soru öğrencilerin iki kavram arasında nasıl bir ilişki kurdukları belirlenebilecektir. Hazırlanan bu form ile öğrencilerin yukarıda bahsedilen kazanımlara ilişkin formal ve informal yaklaşımlarının, sezgisel düşüncelerinin ve varsa yanılgılarının belirlenmesi amaçlanmıştır.

Genel Uygulama III Formu

Genel Uygulama Formu III, genel grup çalışmaları sürecinde uygulanan üçüncü formdur. Mantık dersinin üçüncü haftasının tamamlanmasından sonra dördüncü hafta yapılacak olan ders öncesinde uygulanmıştır.

Bu formda yer alan sorular, ders kapsamında yer alan aşağıdaki kazanımlara yöneliktir.

- *Schröder-Bernstein Teoreminin sonuçları ve uygulamaları*
- *Doğal sayılar kümesine denk olamayacak sonsuz kümelerin belirlenmesi*

Uzman görüşü alınarak hazırlanan Genel Uygulama Formu II formu aşağıdaki iki sorudan oluşmaktadır.

Soru 1: *$\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi [0,1] aralığına denk midir?*

Soru 2: *$\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesine denk midir?*

Formda yer alan iki soru ile öğrencilerden denklik kavramına yaklaşımlarının farklı boyutları ile ele alınması amaçlanmıştır.

İlk soru bir önceki uygulamada ele alınan $\mathbb{R} \overset{?}{\sim} (0,1)$ sorusuna benzerlik göstermektedir. $\mathbb{R}$ ve (0,1) kümelerinin denk olduğu üçüncü haftaki ders içerisinde ispatlanmıştır. Öğrencilerin sunulan durumlar arasında nasıl bir ilişki kuracağı belirlenmek istenmiştir. Başka bir ifade ile denk iki sonsuz kümeden birine eklenen sonlu sayıdaki yeni elemanların öğrencilerin denklik kavramına ilişkin algısını nasıl etkilediğinin belirlenebilmesi amaçlanmıştır. Diğer yandan, bu sorunun formal olarak ispatı Schröder-Bernstein teoremi ile mümkündür. Ancak, dersin mevcut noktasına kadar öğrencilere ilgili teorem sunulmamıştır. Dolayısı ile bu noktada öncelikli amaç, öğrencilerin kümelere ilişkin sezgisel ve informal yaklaşımlarının belirlenmesidir.

Formda yer alan ikinci soruda, öğrencilere denk olmayan iki küme sunulmuş ve onlardan bu kümeler arasındaki ilişkiyi belirlemeleri istenmiştir. Diğer yandan, uygulama sürecinin mevcut aşamasına kadar öğrencilere denk olmayan iki sonsuz küme örneği sunulmamıştır. Dolayısı ile bu soru ile öğrencilerden sonsuz iki kümenin denk olmadığını kendi çabaları ile belirleyebilmeleri ve bunu (*sezgisel de olsa*) uygun bir yol ile ifade edebilmeleri beklenmektedir.

Hazırlanan bu form ile öğrencilerin yukarıdaki başlıklara ilişkin formal ve informal yaklaşımlarının, sezgisel düşüncelerinin ve varsa yanılgılarının belirlenmesi istenmektedir.

Genel Uygulama IV Formu

Genel uygulamaların sonuncusu olan Genel Uygulama IV formunun son derse ait kazanımları da içermesi istendiğinden dördüncü hafta herhangi bir uygulama yapılmamıştır. Bu çalışma, ders sürecinin tamamlanmasından sonra bir tarih belirlenerek gerçekleştirilmiştir

Bu formda yer alan sorular, ders kapsamında yer alan aşağıdaki kazanımlara yöneliktir.

- *Schröder-Bernstein Teoreminin sonuçları ve uygulamaları*
- *Sayılabilir ve Sayılamaz Küme Kavramları*

Genel Uygulama IV formu uzman görüşü alınarak hazırlanmıştır ve aşağıdaki üç sorudan oluşmaktadır.

Soru 1: *$\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin alt kümesi olan ve boştan farklı her hangi bir açık aralığı kapsayan her küme $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesine denktir. İspatlayınız.*

Soru 2: *Sayılabilir sonsuz tane sayılabilir sonsuz kümenin birleşimi sayılabilir sonsuzdur. Gösteriniz.*

Soru 3: *$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi sayılabilir midir? İspatlayınız.*

Bu form öncesi derse ilişkin kazanımlar tamamlandığından, bireylerin bu kazanımları çok boyutlu bir şekilde ilişkilendirmeleri ve istenen ispatlara ulaşabilmeleri beklenmektedir. Bu açıdan Genel Uygulamada IV formunun bir son değerlendirme formu olduğu söylenebilir.

Bu formda yer alan ilk soru ile öğrencilerin kendilerine sunulan teoremi Schröder-Bernstein teoremini kullanarak ispatlaması beklenmiştir. Bu teorem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$A \sim B \;\Leftrightarrow\; (\, A_1 \subset A \Rightarrow\; A_1 \sim B \;\; \Lambda \;\; B_1 \subset B \Rightarrow B_1 \sim A \,)$$

Diğer yandan, önceki soruların aksine soruda öğrencilerin herhangi bir denklik ilişkisine karar vermeleri beklenmemektedir. Tanıma uyan tüm kümelerin $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesine denk olduğu hükmü teorem içerisinde sunulmuştur. Önceki uygulamalarda öğrencilerden genel olarak spesifik iki küme arasındaki denklik ilişkilerini belirlemeleri istenmiştir. Bu soruda ise uygun her küme için geçerli olduğu bilinen genel bir ilişkinin yorumlanması ve kanıtlanması beklenmektedir. Öğrencilerin bu genel ilişkiyi nasıl yorumlayacakları, hangi kavramlar ile nasıl ilişkiler kurarak bir ispat oluşturmaya çalışacakları incelenmek istenmiştir. Böylece öğrencilerin sonsuz kümelerin denkliğine dair genel bir ilişkiyi nasıl yorumlayabildiklerinin anlaşılması mümkün olabilecektir.

Formda yer alan ikinci soru da (*ilk soruya benzer şekilde*) hükmü içerisinde barındırmaktadır. Bu soruya ilişkin formal ispatın oluşturulabilmesi için de sonsuzluk, sonsuz küme ve sayılabilirlik kavramlarının uygun bir biçimde ele alınması ve bunlar arasında doğru ilişkilerin kurulması gerekmektedir. Bu soruda da öğrencilerin nasıl bir

ispat sürecini izleyecekleri, hangi kavramlar arasında nasıl ilişkiler kuracakları belirlenmek istenmiştir. Bu doğrultuda, denklik kavramı açısından önemli bir yer tutan *sayılabilirlik* kavramının öğrenciler tarafından nasıl algılandığının da ortaya konması amaçlanmıştır.

Formda yer alan son soruda öğrencilerden spesifik bir kümenin (*ℚ, rasyonel sayılar*) sayılabilir bir küme olup olmadığını belirlemeleri istenmiştir. Bu soru yöneltilmeden önce, ders içerisinde bu kümeye ilişkin herhangi bir açıklama sunulmamıştır. Dolayısı ile öğrencilerin doğru sonuca kendi çabaları ile ulaşmaları beklenmektedir. Diğer yandan bu soru içerisinde $\mathbb{Q} \overset{?}{\sim} \mathbb{N}$ alt problemini barındırmaktadır. Böylece öğrencilerin sayılabilirlik kavramını, bir denklik ilişkisi çerçevesinde nasıl yorumladıklarının anlaşılabilmesi amaçlanmıştır.

Hazırlanan bu form ile öğrencilerin yukarıda sayılan amaçlara ilişkin formal ve informal yaklaşımlarının, sezgisel düşüncelerinin ve (*varsa*) yanılgılarının belirlenmesi amaçlanmıştır.

Bireysel Uygulama Formlarının Geliştirilmesi

Sınıf içi gözlemlere ve genel uygulama çalışmalarına ek olarak araştırma sürecinde çalışma grubundan 3 katılımcı ile yarı yapılandırılmış görüşmelere de yer verilmiştir. Görüşme, nitel araştırmalarda en sık kullanılan veri toplama tekniğidir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). İnsanların bakış açılarını, öznel deneyimlerini, duygularını, değerlerini ve algılarını ortaya koymada kullanılan oldukça güçlü bir yöntemdir (Karataş, 2015). Cohen ve Manion (1994)' e göre araştırma tekniği olarak görüşme, araştırmacı ile araştırmanın öznesi konumunda yer alan kişi arasında geçen kontrollü ve amaçlı sözel iletişim biçimidir. Punch (2005) görüşmenin başkalarını anlamak için kullanılan en önemli teknik olduğunu belirtmiştir. Görüşme tekniği kendi içinde farklı şekilde sınıflanabilir. Bunlar aşağıda sunulmuştur.

- Yapılandırılmış Görüşme
- Yarı-yapılandırılmış Görüşme
- Yapılandırılmamış Görüşme

Mevcut araştırma sürecinde yarı-yapılandırılmış görüşme tekniği tercih edilmiştir. Genel grup içerisinden seçilen 3 katılımcının her biri ile 4'er defa etkinlik temelli yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Yarı-yapılandırılmış görüşme, soruların önceden belirlendiği ve bu sorularla verilerin toplanmaya çalışıldığı görüşme türüdür

(Karasar, 2008). Sahip olduğu belirli düzeyde standartlık ve aynı zamanda esneklik nedeniyle araştırmalarda sıkça kullanılmaktadır. Bu yöntemde araştırmacı hazırlamış olduğu görüşme formundaki soruların yanı sıra ek sorular sorarak derinlemesine bilgi edinebilir. Bu sayede görüşülen kişinin yanıtlarına bağlı olarak görüşme süreci keşiflere açık hale gelebilir.

Görüşmeler, ders süreci ilerledikçe bireysel olarak ve farklı zaman dilimlerinde yapılmıştır. Her bir görüşme iki farklı açıdan kayıt altına alınmıştır. Analizler bu kayıtlar ve bunların transkriptleri üzerinden yapılmıştır.

Bireysel uygulamaları için *genel uygulama çalışmalarından* sorular uyarlanarak 4 ayrı görüşme formu (*Ek5- Ek6- Ek7- Ek8*) oluşturulmuştur. Her bir form, farklı denklik ilişkilerini çok boyutlu olarak içerisinde barındıran tek bir sorudan oluşmaktadır. Görüşmelerde ele alınan ispat soruları üst düzey bilişsel becerileri içerdiği ve uzun yanıtlı olduğu için soru sayısı sınırlı tutulmuştur. Formlarda yer alan sorular ve yanıtları ile öğrenciler ders sürecinde karşılaştırılmamışlardır. .

Öğrencilerden formlardaki soruyu ispatlamaları istenmiş, ispat yaparken öğrenciler gözlenmiştir. Yapılan görüşmeler bu akışa göre detaylandırılmıştır. Soruları cevaplamada öğrencilere herhangi bir kısıtlama getirilmemiş, cevaplama serbestliği tam olarak sağlanmaya çalışılmıştır. Verdikleri cevaplara ilişkin herhangi bir dönüt sunulmamıştır. Diğer yandan katılımcılardan düşüncelerini sesli bir şekilde açıklayarak ispatı yapmaları istenmiştir. Böylece bireylerin düşünme süreçlerinin daha iyi anlaşılabilmesi amaçlanmıştır.

Sayılan tüm bu tedbirler ile katılımcıların ispat süreçlerinin bilişsel ve duyuşsal boyutları ile ispat imajları açısından derinlemesine analiz edilebilmesine olanak sağlanmaya çalışılmıştır.

Bireysel uygulamalarda öğrencilere yöneltilen sorular uzman görüşü alınarak oluşturulmuştur. Bu formlarda yer alan sorular sırası ile aşağıda sunulmuştur.

Uygulama 1: *Her sonsuz küme birbirine denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirlerine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.*

Uygulama 2: *$\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi boştan farklı herhangi bir açık aralığı kapsayan her alt kümesine denktir. İspatlayın.*

Uygulama 3: *$\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin alt kümesi olan her sonsuz kümenin sayılabilir sonsuz bir alt kümesi vardır. İspatlayın.*

Uygulama 4: *$\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesi sayılabilir midir? Cevabınızı ispatlayınız.*

Yapılan etkinlik temelli görüşmeler ile öğrencilerin sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin oluşturdukları ispat imajlarının içerdiği bileşenler bakımından incelenmesi sağlanmıştır. Görüşmelerden elde edilen veriler, başta RBC soyutlama teorisi ve Kanıt İmajı Teorik çatısı olmak üzere ilgili çerçeveler kapsamında analiz edilmiş ve bulgular elde edilmiştir.

Bireysel Uygulama Çalışmaları

Bireysel Çalışma I (*A'nın olayı ve Bir Kanıt İmajı Hikâyesi*)

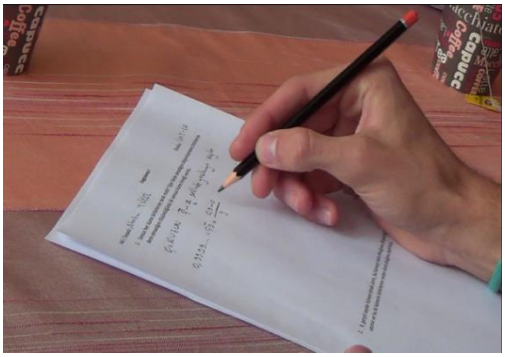
A, olarak isimlendirilen öğrenci Genel Uygulama I çalışmasında yöneltilen sorulara doğru cevaplar verebilmiştir. Ayrıca ders içi tartışmalara istekli olarak katıldığı ve bu tartışmalarda görüşlerini açıkça ifade edebildiği gözlenmiştir. Dolayısı ile yapılacak bireysel çalışmalar için uygun bir aday olduğu düşünülmüştür.

A tarafından gerçekleştirilen çalışma [*ve diğer tüm çalışmalar*] iki farklı açıdan kayıt altına alınmıştır. Teorik analizler bu kayıtlar üzerinden yürütülmüştür.

Şekil 4

A'nın Olayına İlişkin Kayıtlardan Örnekler





Bireysel Uygulama I formu ile aşağıdaki soru bu öğrenciye yöneltilmiştir.

Her sonsuz küme birbirine denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirlerine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.

Bireysel Uygulama I çalışması ilk dersten sonra yapılmıştır. İlk derste aşağıdaki kazanımlar öğrencilerde oluşturulmuştur.

- *Kümelerde Denkliğin Temel Felsefesi*
- *Sonsuz Kümlerin Denklik Açısından Tartışılması*
- *Doğal Sayılara Denk olabilecek Sonsuz Kümelerin Belirlenmesi*

Bu noktada kadar öğrencilere denk olmayan iki sonsuz küme örneği sunulmamıştır. Dolayısı ile Bireysel Uygulama I çalışmasına katılan öğrencilerin kendi çabaları ile bir sonuca ulaşması beklenmektedir. Bu noktada soru öğrencinin hazırbulunuşluk seviyesi gözetilerek sorulmuştur. Dolayısı ile soruya ilişkin görüşünü doğrulayabileceği formal örnekler sunması ve bu ilişkileri matematiksel olarak nedenleri ile açıklayabilmesi beklenmiştir.

Bireysel Çalışma II (*B'nin olayı ve Bir Kanıt İmajı Hikâyesi*)

Bireysel Uygulama II çalışması gözlem sürecinin üçüncü haftasının ardından gerçekleştirilmiştir. Bu üç haftalık süreçte Mantık dersi kapsamında aşağıdaki başlıklara ilişkin kazanımlar öğrencilere sunulmuştur.

- *Kümelerde Denkliğin Temel Felsefesi*
- *Sonsuz Kümlerin Denklik Açısından Tartışılması*
- *Doğal Sayılara Denk olabilecek Sonsuz Kümelerin Belirlenmesi*
- $\mathbb{N}^2$ *Kümesinin* $\mathbb{N}$ *Kümesine Denkliği ve Bu Denkliğin Genelleştirilebilirliği*
- *Açık aralıkların birbirlerine denkliğinin gösterilmesi*
- *Açık Aralıkların* $\mathbb{R}$*, gerçel sayılar Kümesine Denkliğinin Tartışılması*
- *Schröder-Bernstein Teoreminin sonuçları ve uygulamaları*

Bireysel Uygulama II çalışması için B olarak isimlendirilen öğrenci seçilmiş ve ondan aşağıda sunulan teoremi ispatlaması istenmiştir.

$\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin herhangi bir açık aralığı kapsayan her alt kümesi $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesine denktir.

Bu noktada öğrenciden spesifik iki küme arasındaki denklik ilişkisine karar vermesi değil, gerekli koşulu sağlayan tüm kümeler için geçerli olabilecek bir teoremi yorumlaması ve kanıtlaması beklenmektedir.

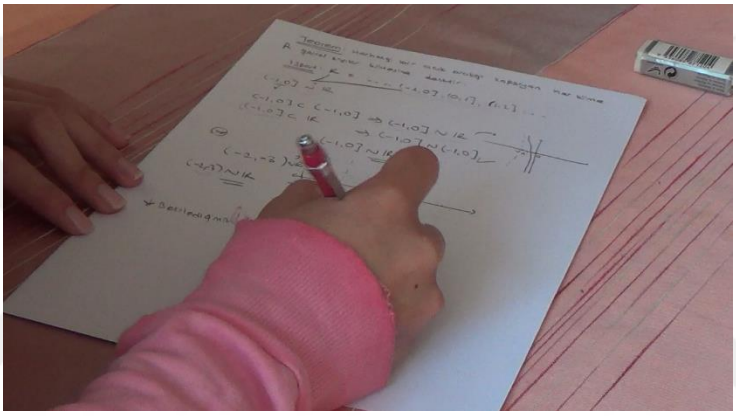
Bu teorem yukarıda sunulan başlıklara ilişkin kazanımları çok boyutlu olarak içerdiği için seçilmiştir. Dolayısı ile teoremin doğru bir şekilde ispatlanabilmesi için sunulan

kazanımlara ilişkin doğru bilgilerin seçilmesi ve bunlar arasında uygun bağlantıların kurulabilmesi gerekmektedir.

Çalışma için uygun görülen B, ders içerisindeki tartışmalara gönüllü olarak katılan ve görüşlerini açık şekilde ifade edebilen bir öğrencidir. Bu süreçte yapılan, Genel Uygulama (I-II) çalışmalarında sunulan sorular için uygun yaklaşımlar sergileyebilmiştir. Bu nedenle ön bilgilerinin yeterli olduğu düşünülmektedir. Diğer yandan yapılacak bireysel çalışmalar için gönüllü olduğunu açıkça ifade etmiştir. Tüm bu sebepler ile bireysel uygulama çalışmaları için uygun bir aday olarak değerlendirilmiştir.

Şekil 5

B'nin Olayına İlişkin Kayıt Örneği



Çalışmada, B tarafından gerçekleştirilen ispat süreci farklı açılardan iki farklı kamera ile kaydedilmiştir. Sürecin yazıya dökülmesinin ardından analiz sürecine başlanmıştır. Analizler Kidron & Dreyfus (2014) tarafından ortaya konan kanıt imajı kavramının *Bilişsel Anlayış* ve *Duygusal His* bileşenleri bağlamında gerçekleştirilmiştir.

Analizlerin amacı, matematiksel açıdan ispatın doğruluğunun veya yanlışlığının belirlenmesi değildir. Bu noktada amaç (*bir önceki çalışmada olduğu gibi*) bilişsel ve duyuşsal eylemlerin yön vermesi ile şekillenen ispat sürecinin anlamlandırılabilmesidir.

Bireysel Çalışma III (*D'nin olayı ve Bir Kanıt İmajı Hikâyesi*)

Bireysel Uygulama III çalışması Mantık dersinin tamamlanmasının ardından gerçekleştirilmiştir. Bu beş haftalık ders sürecinde, Mantık dersinin içeriğini oluşturan aşağıdaki başlıklara ilişkin kazanımlar öğrencilere sunulmuştur.

- *Kümelerde Denkliğin Temel Felsefesi*
- *Sonsuz Kümlerin Denklik Açısından Tartışılması*
- *Doğal Sayılara Denk olabilecek Sonsuz Kümelerin Belirlenmesi*

- *$\mathbb{N}^2$ Kümesinin $\mathbb{N}$ Kümesine Denkliği ve Bu Denkliğin Genelleştirilebilirliği*
- *Açık aralıkların birbirlerine denkliğinin gösterilmesi*
- *Açık Aralıkların $\mathbb{R}$, gerçel Sayılar Kümesine Denkliğinin Tartışılması*
- *Schröder-Bernstein Teoreminin sonuçları ve uygulamaları*
- *Doğal Sayılara Denk Olamayacak Sonsuz Kümelerin Varlığının Tartışılması, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin Doğal Saylar Kümesine denk Olamamasının İspatı*
- *Fonksiyonlar Kümesinin Denklik Açısından Reel Sayılar Kümesinden Büyüklüğünün İspatı*
- *Bir kümenin Kuvvet Kümesine Denk Olamaması ve Bu İfadenin Sonuçlarının Mantıksal İzahı*
- *Sayılabilir ve Sayılamaz Küme Kavramları*

Bireysel uygulama III ve IV çalışmaları, ders sürecinin tamamlanmasının ardından gerçekleştirilmiştir. Bu sayede öğretmen adaylarının, sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin yaklaşımlarının daha kapsamlı bir çerçevede ele alınabilmesi amaçlanmıştır.

Bu başlık altında sunulacak Bireysel Uygulama III çalışması için D olarak isimlendirilen öğretmen adayı seçilmiş ve ondan aşağıda sunulan teoremi ispatlaması istenmiştir.

$\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin alt kümesi olan her sonsuz kümenin, sayılabilir sonsuz bir alt kümesi vardır.

Bu teorem, başta *sayılabilirlik* olmak üzere yukarıda sunulan başlıklara ilişkin pek çok kavramı içerdiği için seçilmiştir. Teoremin, yapılacak çalışmaya uygunluğunun belirlenebilmesi için uzman görüşünden faydalanılmıştır.

Seçilen bu teoremin formal bir şekilde ispatlanabilmesi için sunulan kazanımlara ilişkin doğru bilgilerin seçilmesi ve bunlar arasında uygun bağlantıların kurulması gerekmektedir.

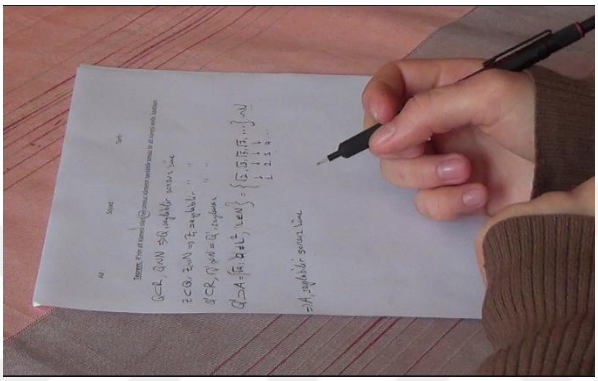
Bu noktada D'den spesifik iki küme arasındaki denklik ilişkisine karar vermesi değil, gerekli koşulu sağlayan tüm kümeler için geçerli olabilecek genel bir ilişkiyi yorumlaması ve kanıtlaması beklenmiştir.

Bireysel çalışmalar için uygun görülen D, ders içerisindeki tartışmalara gönüllü olarak katılan ve görüşlerini açık şekilde ifade edebilen bir öğrencidir. Ayrıca, sınıf içi tartışmalarda sergilediği özgün yaklaşımlar ile araştırmacının dikkatini çekmiştir. Bu

nedenle ispat sürecinde özgün bir bakış açısı sunabileceği düşünülmektedir. Diğer yandan Mantık dersi sürecinde gerçekleştirilen Genel Uygulama çalışmalarının tamamına katılmış ve bu çalışmalarda sunulan sorular için doğru yaklaşımlar sergileyebilmiştir. Bu nedenle, bireysel çalışma için yeterli ön bilgiye sahip olduğu düşünülmektedir. Ayrıca, yapılacak bireysel çalışmalar için gönüllü olduğunu açıkça ifade etmiştir. Tüm bu sebepler ile bireysel uygulama çalışmaları için uygun bir aday olarak değerlendirilmiştir.

Şekil 6

D'nin Olayına İlişkin Kayıt Örneği



Mevcut çalışmada, D tarafından gerçekleştirilen ispat süreci farklı açılardan iki farklı kamera ile kaydedilmiştir. Sürecin yazıya dökülmesinin ardından analiz sürecine başlanmıştır. Analizler Kidron & Dreyfus (2014) tarafından ortaya konan kanıt imajı kavramının *Bilişsel Anlayış* ve *Duygusal His* bileşenleri bağlamında gerçekleştirilmiştir. Analizlerin amacı, matematiksel açıdan ispatın doğruluğunun veya yanlışlığının belirlenmesi değildir. Bu noktada amaç (*önceki çalışmalarda olduğu gibi*) bilişsel ve duyuşsal eylemlerin yön vermesi ile şekillenen ispat sürecinin anlamlandırılabilmesidir.

Veri Toplama Araçlarının Geçerlilik ve Güvenirlikleri

Araştırmada kullanılan Genel Uygulama ve Bireysel Uygulama formlarında yer alan soruların hazırlanma sürecinde geçerliğinin ve güvenilirliğinin sağlanabilmesi için matematik eğitimi alanında görev yapan bir öğretim üyesinden uzman görüşü alınmıştır. Uzman görüşlerinin alınmasının ardından görüşme formlarında yer alan sorularla ilgili gerekli ekleme-çıkarmalar ve diğer düzenlemeler yapılmış, böylece formlara son hali verilmiştir.

Araştırmanın Geçerlilik ve Güvenirliği

Nitel araştırmada toplanan verilerin geçerliliği ve sonuçların doğruluğu önemli bir konu olduğu için araştırmacı, birden çok veri toplama yöntemi kullanarak elde ettiği bilgileri, farklı kaynaklardan teyit ederek kanıtlama çabası göstermelidir Bu amaçla veri toplama sürecinde çeşitleme (*triangulation*) yöntemi benimsenmiştir. Bu yaklaşım ile çalışma içerisinde birden fazla veri toplama yöntem ve tekniğinin bir arada kullanılması sağlanmaya çalışılmıştır. Böylece yapılan çalışmalar ile ilgili değişkenlerin olabildiğince tarafsız bir şekilde gözlenebilmesi amaçlanmıştır. Nitel araştırmalarda en yaygın olarak kullanılan üç tür veri toplama yöntemi görüşme, gözlem ve yazılı doküman incelemesidir (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

Bu araştırmanın geçerliliğini artırmak amacıyla, görüşme ve gözlem yöntemlerine ek olarak öğretmen adayları tarafından cevaplanan ölçeklerden yararlanılmıştır. Bu nedenle çalışmada diğer nitel yöntemlerin (*görüşme ve gözlem*) kullanılmasının yanı sıra doküman incelemesi yöntemi de ek bir bilgi kaynağı olarak kullanılmıştır. Doküman incelemesi, araştırılması hedeflenen olgu(lar) hakkında bilgi içeren yazılı materyallerin analizini kapsar. Bu doğrultuda, öğretmen adaylarının genel ve bireysel çalışmalar kapsamında vermiş oldukları yazılı cevaplar araştırma için birer veri kaynağıdır.

Analiz Süreci

Çalışmaya ilişkin bulgular, haftalık olarak elde edilen veriler üzerinde yapılan analizlerden elde edilmiştir. Yapılan analizler ile verilerin altında yatan kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkarmak amaçlanmıştır.

Araştırma sürecinde 5 hafta boyunca MTÖ 2009 Mantık dersinde gözlem yapılmıştır. Mantık dersi boyunca yapılan gözlemler iki farklı açıdan kayıt altına alınmıştır. Daha sonra kayıtlar üzerinden transkripsiyon işlemi gerçekleştirilmiş ve yazılı dokümanlar elde edilmiştir. Öğretmen adaylarının ders içi etkinliklerde kendilerine yöneltilen sorulara yönelik verdikleri cevaplar, bu süreçte yaptıkları hesaplamalar ve oluşturdukları çizimler gözlem verilerinin analizinde ele alınmıştır. Mevcut çalışmaya katılan öğretmen adayları, Cantor tarafından ortaya eşgüçlülük yaklaşımına ilişkin ön yaşantılara sahip değildirler. Diğer bir ifade ile kendilerine sunulan denklik ilişkileri ile ilk bu ders kapsamında karşılaşmışlardır. Dolayısı ile gözlem verileri üzerinde yapılan analizler ile öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin ilk yaklaşımlarının belirlenebilmesi amaçlanmıştır.

Genel uygulama çalışmalarında 100 öğretmen adayına sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin 4 farklı ispat formu (I-II-III ve IV) uygulanmıştır. Öğrencilerden kendilerine verilen bu formlarda yer alan kümelere ilişkin ispatları yeterli süre içerisinde tamamlamaları istenmiştir. Sürecin ilk haftası öğrencilerin hazırbulunuşluk düzeyi gözetilerek herhangi bir form uygulanmamıştır. Genel uygulamaların analizinde, her bir formda yer alan sorular ayrı ayrı ele alınmıştır. Bu çerçevede ilk olarak, her bir soruya ilişkin genel kategoriler oluşturulmuştur. Daha sonra her bir kategori, içerdiği yaklaşımların çeşitliliğine göre alt kategorilere ayrılmıştır. Böylece çeşitli temalar elde edilmiştir. Her bir tema içerisinde yer alan öğrencilerin, sonsuz kümelerin denkliğini gösterme konusunda kullandıkları yöntemler ve bu süreçte karşılaşılan kavram yanılgıları anlamlandırılmaya çalışılmıştır. Bu temaların güvenilirliğinin değerlendirilmesinde uzman görüşünden yararlanılmıştır.

Bireysel uygulamaların analizlerine görüşmelerin birebir yazıya dökümü ile başlanmıştır. Ardından elde edilen bu yazılı belgeler üzerinde AiC, RBC ve Kanıt İmajı teorik çatılarının ilkelerine göre analizler gerçekleştirilmiştir. Ek olarak Kanıt İmajının duyuşsal boyutunun detaylandırılmasında Selden ve Selden (2007) tarafından ortaya konan *Duygusal Olmayan Bilişsel Hisler*'den yararlanılmıştır. Bu kısımda sayılan teorik çerçevelerden aşağıda kısaca bahsedilmiştir.

Tüm bu analizlerde amaç, sunulan yaklaşımların matematiksel açıdan doğruluğunun veya yanlışlığının belirlenmesi olmamıştır. Bu noktada gözetilen temel unsur, bireylerin yaklaşımlarının altında yatan nedenlerin belirlenmesidir. Başka bir ifade ile öğrencilerin düşünme süreçlerinin açığa çıkarılmasıdır.

Veri Çözümleme Teknikleri

Araştırmanın verilerini ders içi gözlemlerden elde edilen kayıtlar, Genel Uygulama Formları için verilen yazılı cevaplar, Bireysel Uygulamalar için verilen yazılı cevaplar, Bireysel Uygulama kayıtları oluşturmaktadır.

Ders içi gözlemler, Genel Uygulamalar ve Bireysel Uygulamalar, Tablo 1' de sunulan sıra ile gerçekleştirilmiştir.

Tablo 1

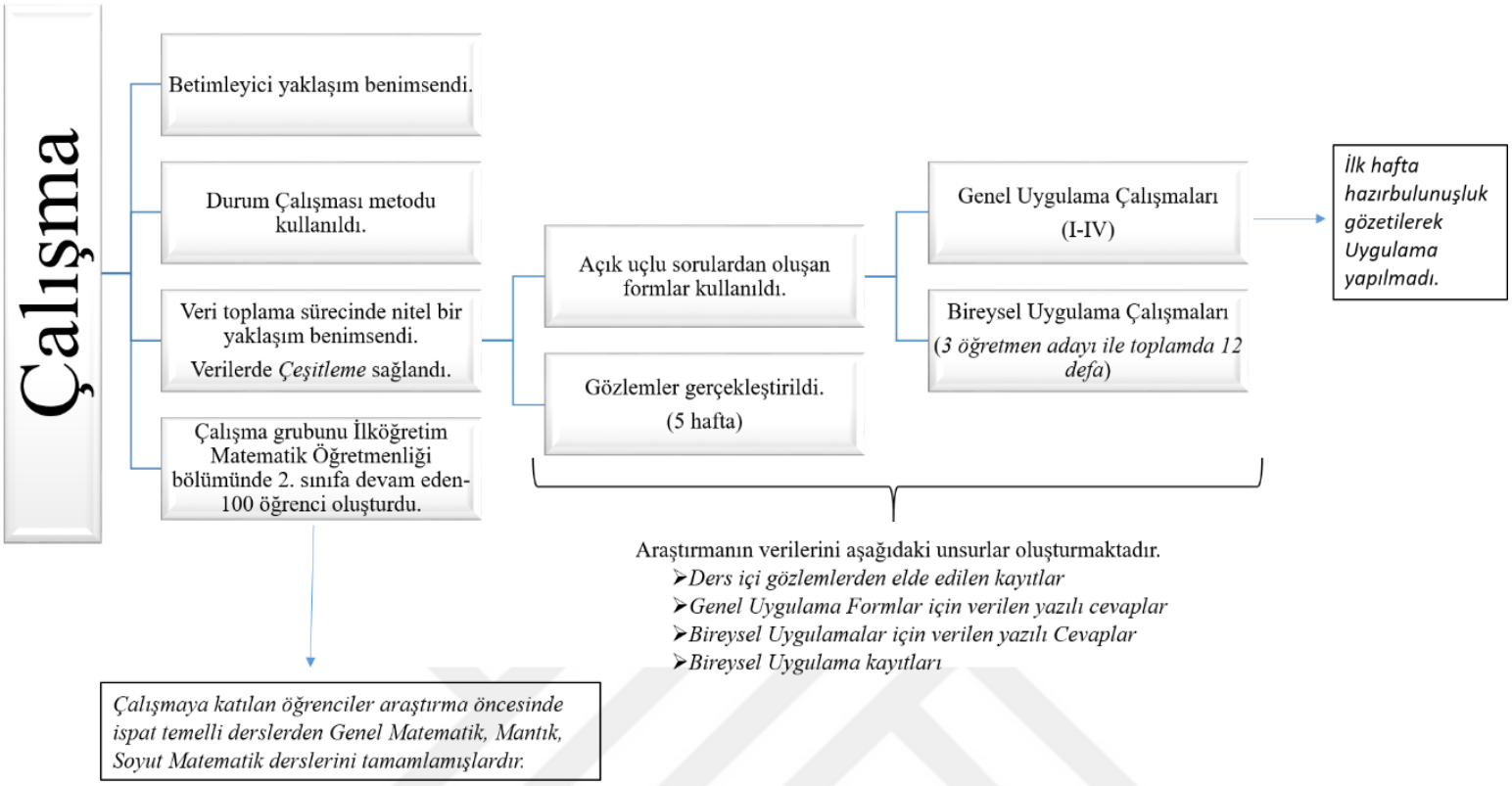
Araştırmanın Sırasıyla Veri Toplama Aşamaları

İşlem Sırası	Veri Toplama Aşamaları
1.	Ders içi gözlem (ilk ders)
2.	Genel Uygulama I
3.	Ders içi gözlem (ikinci ders)
4.	Bireysel Uygulama I
5.	Genel Uygulama II
6.	Ders içi gözlem (üçüncü ders)
7.	Bireysel Uygulama II
8.	Genel Uygulama III
9.	Ders içi gözlem (dördüncü ders)
10.	Ders içi gözlem (beşinci ders)
11.	Genel Uygulama IV
12.	Bireysel Uygulama III
13.	Bireysel Uygulama IV

Ders içi gözlemler ve genel çalışmalardan elde edilen sonuçlar haftalık olarak analiz edilmiştir. Genel grup çalışmalarından elde edilen yazılı cevaplar üzerinde içerik analizi uygulanarak belirli temalar oluşturulmuştur. İçerik analizi sözel, yazılı ve diğer materyallerin nesnel ve sistematik bir şekilde incelenmesine olanak tanıyan bilimsel bir yaklaşımdır (Tavşancıl ve Aslan, 2001). Şimşek ve Yıldırım' a (2006) göre içerik analizinde temelde yapılan işlem, birbirine benzeyen verileri belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirmek ve bunları okuyucunun anlayabileceği bir biçimde düzenleyerek okumaktır. Bu analizlerden elde edilen sonuçlar gözlem kayıtları ile karşılaştırılarak genel sonuçlara ulaşılmaya çalışılmıştır.

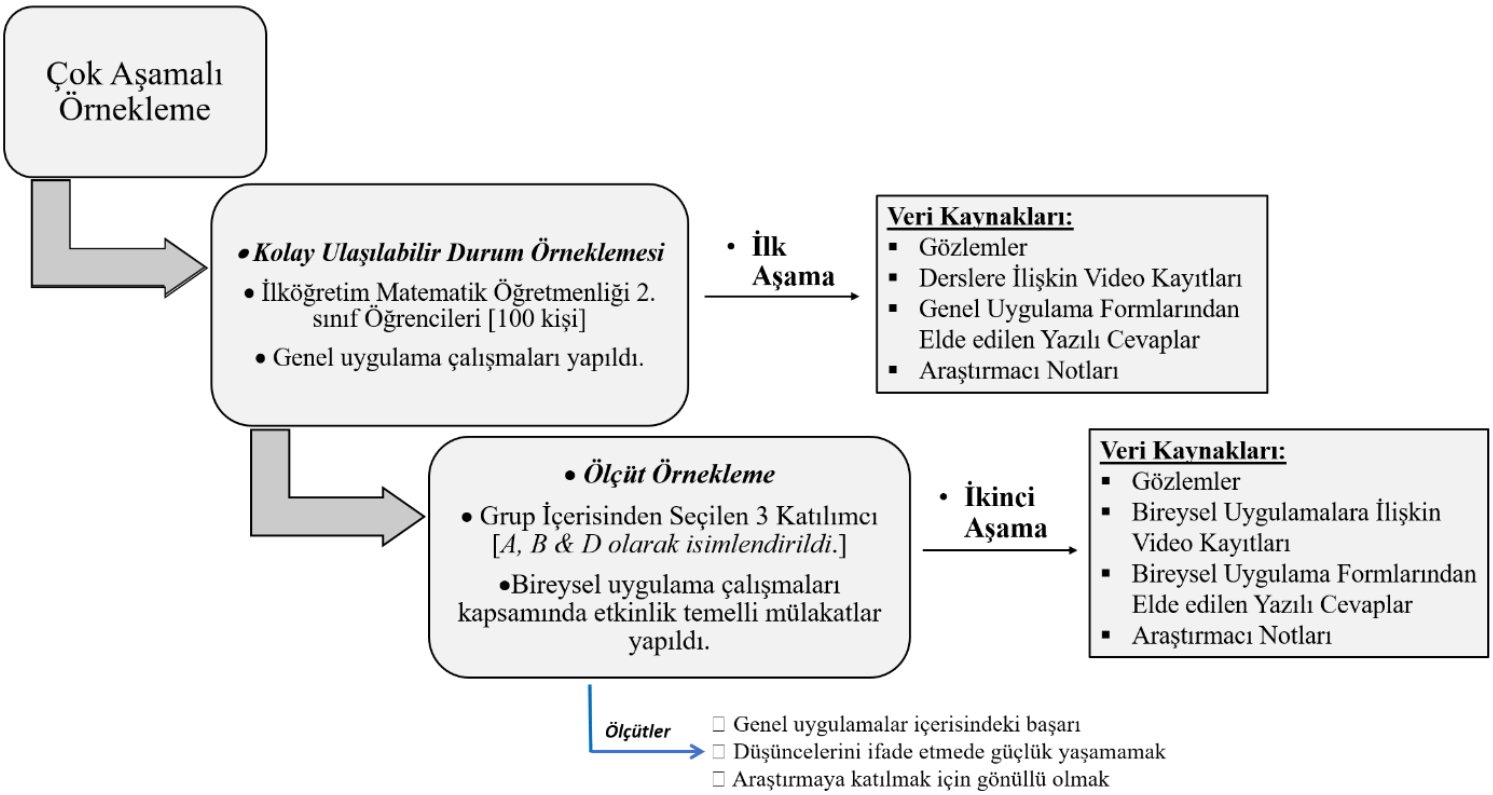
Şekil 7

Çalışma Modeli ve Çalışma Sürecine İlişkin Özet Diyagram



Şekil 8

Örnekleme Sürecine İlişkin Özet Diyagram



IV. BÖLÜM

BULGULAR VE YORUMLAR

Çalışmanın bu aşamasında, elde edilen bulgular ve bu bulgulara ait yorumlar araştırmanın alt problemleri bağlamında sunulacaktır. Birinci alt problem kapsamında öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin genel yaklaşımları incelenmiştir. Bu bağlamda *ders içi gözlemlerden* ve *genel uygulama çalışmaları*ndan elde edilen bulgular bir arada sunulacaktır. Diğer yandan ikinci alt problem kapsamında *bireysel uygulama çalışmaları* gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmalar kapsamında etkinlik temelli mülakatlar yapılmış ve öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğini gösterme sürecinde oluşturdukları kanıt imajları incelenmiştir.

I. Alt Probleme Yönelik Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın birinci alt problemi aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

''İlköğretim matematik öğretmeni adayları sonsuz kümelerin denkliğini göstermede kullandıkları genel yaklaşımlar nelerdir?''

Çalışma grubunu oluşturan öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin düşünme biçimlerinin ve yaklaşımlarının genel bir çerçevede yansıtılabilmesi amacı ile gözlemlerden ve genel uygulamalardan elde edilen bulgular paylaşılacaktır. Oluşturulan her bir temaya ilişkin açıklayıcı örnekler ve bunları destekleyici gözlem verileri bir arada sunulacaktır.

Genel Uygulama I ve Analizi

1.Soruya verilen cevaplar ve analizi

Bu soru ile öğrencilerin denklik kavramının temel felsefesini ve Cantor yaklaşımını ne ölçüde anlamlandırdıkları anlaşılmaya çalışılmıştır. Bu soruya verilen cevaplar üzerinde içerik analizi uygulanmıştır.

Genel Uygulama I formunun ilk sorusuna verilen yanıtlar üzerinde yapılan içerik ana izi sonucu elde edilen kategoriler ve alt kategorilere ait özet tablo aşağıdadır.

Tablo 2

Genel Uygulama I - Birinci soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar

Soru 1: Bir küme öz alt kümesine denk olabilir mi? Örnekler ile açıklayınız.	**Kişi Sayısı**
Denk olabileceğini belirtenler	**64**
i. Sadece *''denk olabilir''* cevabını yazanlar.	10
ii. *Sadece boş küme için geçerlidir,* açıklamasını yapanlar.	4
iii. *Sadece bir elemanlı küme için geçerlidir,* açıklamasını yapanlar.	16
iv. *Sonsuz elemanlı kümeler için geçerlidir,* açıklamasını yapanlar.	11
v. Birebir-Örten eşleme fikrinden yararlananlar.	23
a. Bijektif eşleme fikrini örnek ile detaylandıramayanlar.	11
b. Bijektif eşleme fikrini örnek ile detaylandırabilenler.	12
Soruya cevap vermeyenler	**4**
Denk olamayacağını belirtenler	**30**
i. Sadece *''denk olamaz''* cevabını yazanlar.	1
ii. *Kümenin eleman sayısı öz alt küme sayısına eşit olamaz,* açıklamasını yapanlar.	6
iii. *Öz alt küme daha az eleman içerir,* açıklamasını yapanlar.	16
iv. Bir kümeden öz alt kümesine bijektif fonksiyon tanımlanamayacağını belirtenler.	7
Toplam	**98**

i. Bir kümenin öz alt kümesine denk olabileceğini belirtenler:

Gözlem sürecinin ilk haftası öncesinde öğrenciler, Cantor tarafından ortaya konan Kardinalite Teorisine ilişkin herhangi bir ders almamıştır. Çalışmaya katılan öğrenciler önceki dönemlerden edindikleri sembolik mantık, kümeler, bağıntılar, fonksiyonlar ve ikili işlemler gibi ön bilgileri ile sürece dâhil olmuşlardır.

İlk dersin başlangıcında öğretim görevlisi denklik kavramının tanımını öğrencilere vermeden, onların kümelerin denkliğine ilişkin görüşlerini açıklamalarını istemiş ve ‘’*İki küme ne zaman denk olur?*‘’ sorusunu sınıfa yöneltmiştir.

Bu soruya farklı öğrencilerin verdiği cevaplar maddeler halinde aşağıda sunulmuştur.

- *Eleman sayıları eşit olan kümeler denktir.*

  $s(A) = s(B) \Leftrightarrow A \equiv B$

- *A'nın her elemanını B'nin her elemanına eşleyebilme kapasitesi varsa bu kümeler denktir.*
- *Posetler ile eş sıralı kümeler birbirlerine denktir.*
- *Birbirinin alt kümesi olan kümeler denktir.*

  $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A \sim B$

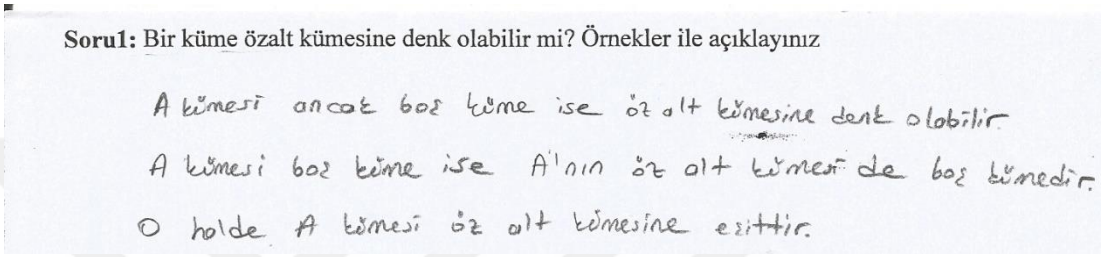
- *Elemanları birbirlerine eşit olan kümeler denktir.*
- *Görüntü kümeleri aynı, değer kümeleri farklı ise iki küme denktir.*
- *A'dan B'ye tanımlı birebir fonksiyon aynı zamanda örtense bu iki küme denktir.*

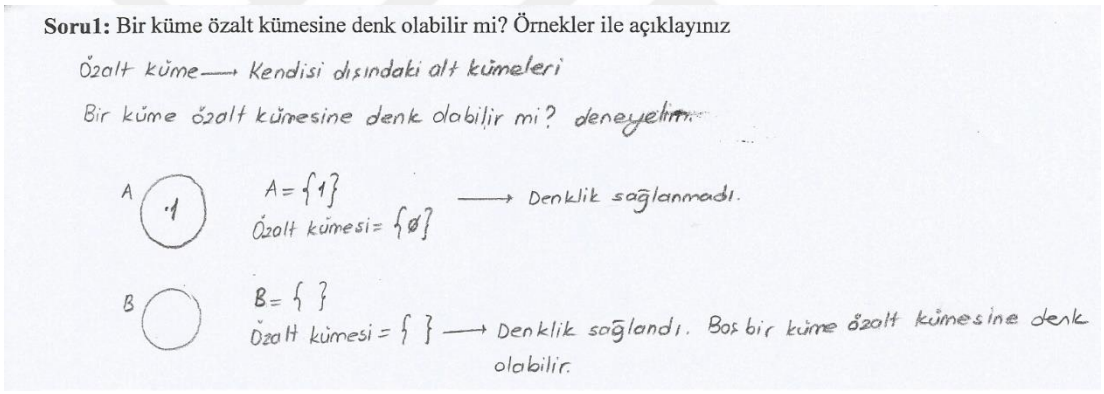
Görüldüğü gibi öğrencilerin denklik kavramına yönelik farklı tanımlamaları ve yaklaşımları mevcuttur. Denklik tanımına ilişkin farklı anlayışlar, uygulamanın birinci sorusuna verilen yanıtlar üzerinde de etkili olmuştur. Dolayısı ile bir kümenin öz alt kümesine denk olabileceğini ifade eden öğrenciler farklı yaklaşımlar kullanmışlardır. Kullanılan yaklaşımlar informal olandan daha formal olana doğru aşağıda açıklanmıştır.

Bir kümenin öz alt kümesine denk olabileceğini belirten öğrencilerin bir kısmı bu görüşlerini detaylandırmamışlardır. Başka bir ifade ile bu öğrenciler fikirlerinin geri planında yatan sebepleri açıkça ifade etmemişlerdir. Sadece

kümelerin denk olduğunu belirtmekle yetinmişlerdir. Bu durumun nedeni öğrencilerin gelişigüzel cevap vermeleri ya da düşündüklerini açıklamaktan çekinmeleri olabilir.

Bazı öğrenciler de sadece boş kümenin öz alt kümesine denk olabileceğini ifade etmişlerdir. Bu öğrencilere göre boş küme hariç hiçbir küme öz alt kümesine denk değildir. Bu alt kategoride yer alan bazı cevaplar aşağıda örnek olarak sunulmuştur.





Bu örnekler incelendiğinde, öğrencilerin denklik kavramını bijektif eşleme fikri ile ilişkilendiremedikleri görülmektedir. İki kümenin denkliğine elemanları saymaya dayalı azlık-çokluk ilişkisini gözeterek yaklaşmaktadırlar. Diğer yandan kümeleri kısıtlı bir çerçevede algılayarak algıladıkları da söylenebilir. Çünkü soruya yanıt bulma sürecinde sadece sonlu kümeleri göz önünde bulundurmuşlardır. Dolayısı ile yaklaşımlarının tek boyutlu ve yetersiz olduğu söylenebilir. Ek olarak bu öğrencilerin öz alt küme kavramı ile ilgili bir yanılgıya sahip oldukları da söylenebilir. Çünkü boş kümenin öz alt kümesi yoktur.

Bu kategoride açıklanan azlık-çokluk yaklaşımına ilişkin örneklere gözlem sürecinde de karşılaşılmıştır. Örneğin, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3...\} \overset{?}{\sim} \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$ sorusu

üzerine yapılan sınıf tartışma sonucunda, bu kümelerin denk olduğu f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^+$, f(x)=x fonksiyonu ile gösterilmiştir. Bu sonuca ulaşılmasının hemen ardından öğretim elemanı ile söz alan bir öğrenci arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir.

Tablo 3

Sınıf İçi Diyalog (1)

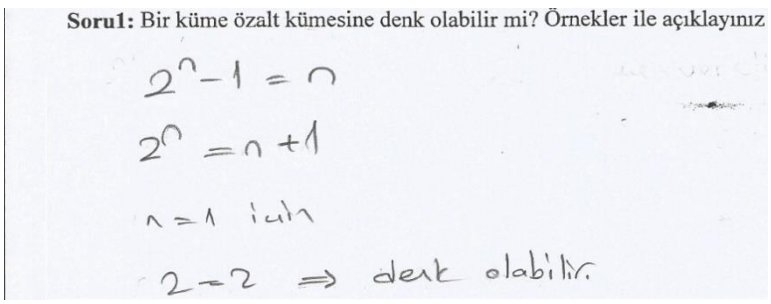
Öğretim Elemanı	Doğal sayıları biz 1 sayısından itibaren başlattık. Bunu 0 sayısından itibaren başlatanlar da var. Mesela ÖSYM müfredatı böyle. Böyle olsa iki küme denk olur mu?
Öğrenci	Kümeler denk olmazdı.
Öğretim Elemanı	Neden böyle düşündün?
Öğrenci	Eğer 0'dan başlasaydı buna bir karşılık bulamazdık. Açıkta eleman kalırdı. Bijektif olmazdı.

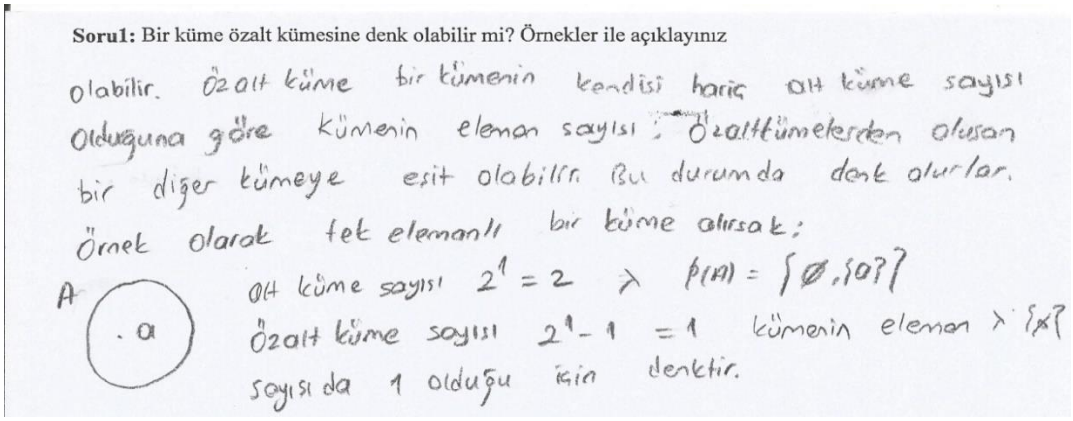
Bu örnekte, söz alarak derse katılan öğrencinin de kümelerin elemanlarını saymaya dayalı azlık çokluk fikri ile sonsuz kümeleri karşılaştırdığı ve Cantor'un yaklaşımını istenen düzeyde kullanamadığı görülmektedir.

Bir önceki alt kategoriye benzer olarak bazı öğrenciler de sadece tek elemanlı bir kümenin öz alt kümelerine denk olabileceğini ifade etmişlerdir. Bu öğrenciler, bir kümenin eleman sayısını, öz alt küme sayısına aşağıdaki eşitleyen denklemi tanımlayarak sonuca ulaşmaya çalışmışlardır.

$$2^n - 1 = n \Leftrightarrow n=1$$

Bu alt kategorideki bazı öğrencilerin cevapları örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



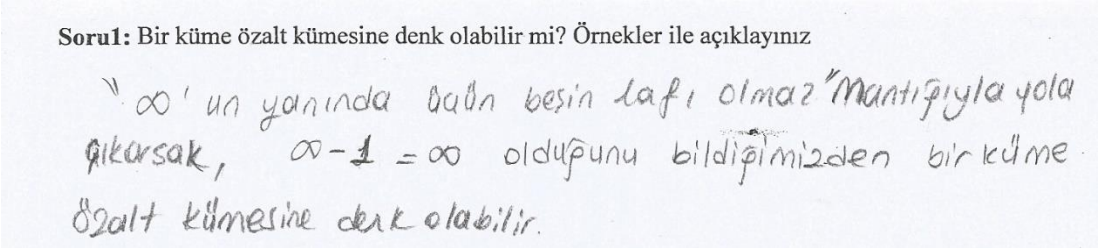


Bu öğrenciler n=1 olduğunda bir kümenin öz alt küme sayısının, kümenin eleman sayısına eşit olduğunu belirleyebilmişlerdir. Ancak bu öğrencilerin, soruyu yanlış tercüme ederek bir sonuca ulaşmaya çalıştıkları söylenebilir. Çünkü öğrenciler ‘’*Bir kümenin eleman sayısı, ne zaman öz alt küme sayısına eşittir?*’’ sorusuna yanıt vermektedirler. Bu durumun temel nedeni, öğrencilerin öz alt küme sayısı ile öz alt kümenin eleman sayısı kavramlarını birbiri yerine kullanmalarıdır. Bu durum pek çok birey tarafından benzer şekilde tekrarlandığından tesadüfi bir hata olarak değerlendirilmemiştir. Sunulan ifadenin algılanış biçimine ilişkin bir yanılgı söz konusudur.

Bir diğer kategoride yer alan öğrenciler, sadece sonsuz elemanlı kümelerin öz alt kümesine denk olabileceğini bijektif eşleme kullanmadan ifade etmişlerdir. Bu öğrenciler ilk olarak aşağıdaki denklemi oluşturmuşlardır. Daha sonra, bunun çözümünden hareketle bir sonuca ulaşma çabasına girişmişlerdir.

$$n - 1 = n \Leftrightarrow n = \infty$$

Birebir-örten eşleme fikrini kullanmayan bu öğrenciler, $n=\infty$ olduğunda $n-1=\infty$ olacağını belirterek, sonsuz elemanlı bir kümenin öz alt kümesine denk olabileceği sonucuna ulaşmışlardır. Bu kategoride yer alan cevaplardan biri örnek olarak aşağıda sunulmuştur.

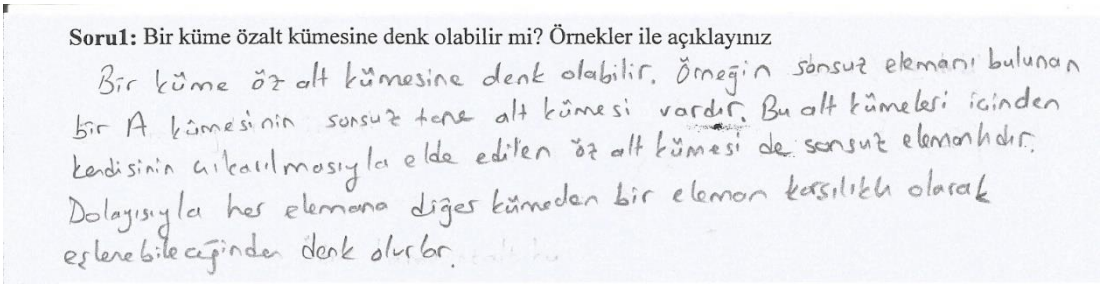

Soru1: Bir küme özalt kümesine denk olabilir mi? Örnekler ile açıklayınız

"∞'un yanında üçün beşin lafı olmaz" Mantığıyla yola çıkarsak, ∞ − 1 = ∞ olduğunu bildiğimizden bir küme özalt kümesine denk olabilir.

Bu öğrencilerin yaklaşımlarının da bir yanılgı içerdiği söylenebilir. Matematiksel olarak *n -1 = n* denkleminin bir çözümü yoktur. Oysaki öğrencilere göre böyle bir denklemin çözümü vardır ve Ç.K = {∞} olarak ifade edilebilir. Bu durumun temel sebebi öğrencilerin ∞ simgesini cebirsel bir sayı olarak kullanmaya çalışmalarıdır. Oysaki her iki tarafın limiti alındığında eşitliğin sağlanıyor olması bu limit değerinin denklemin çözümüne eşit olduğu anlamına gelmez. Matematiksel olarak sonsuz bir nesne değildir. Sonsuz, belli bir yönde daima büyümeyi ya da küçülmeyi anlatan bir sıfattır (Nesin, 2010). Dolayısı ile adına ∞ denen bir nesne olmadığı için ∞ simgesinin cebirsel bir sayı olarak kullanılması da yanlış olacaktır. Özetle bu öğrencilerin ulaştıkları sonuç doğru olsa da yaklaşımları Cantor teorisi açısından uygun kabul edilemez.

Bir kümenin öz alt kümesine denk olabileceğini belirten bazı öğrenciler de birebir-örten eşleme fikrinden yararlanmışlardır. Bu fikirden yararlanan öğrencilerin bir kısmı görüşlerini destekleyebilecek uygun örnekler üretebilmişlerdir. Diğer yandan bir kısmı da bu görüşlerini açıklayacak örnek oluşturamamıştır. Bu öğrenciler sadece küme ile öz alt kümesi arasında uygun eşleme oluşturulabileceği ifade etmekle yetinmişlerdir.

Bu kategorideki öğrencilerden birinin açıklaması örnek olarak aşağıda sunulmuştur.

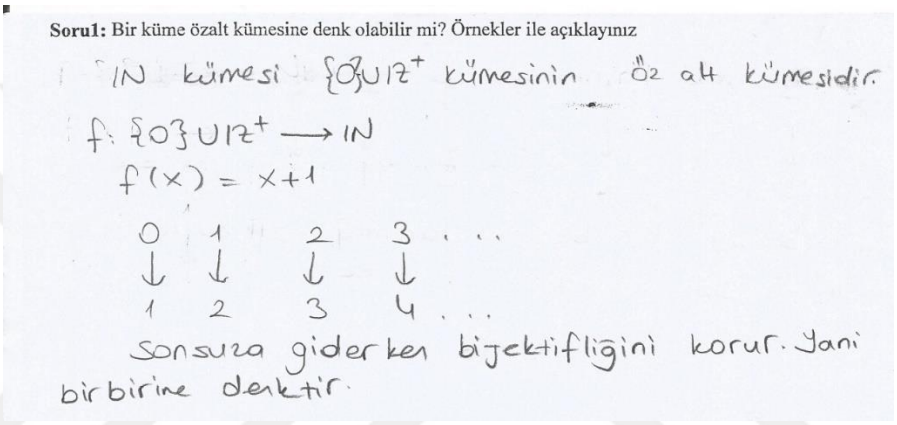

Soru1: Bir küme özalt kümesine denk olabilir mi? Örnekler ile açıklayınız

Bir küme öz alt kümesine denk olabilir. Örneğin sonsuz elemanı bulunan bir A kümesinin sonsuz tane alt kümesi vardır. Bu alt kümeleri içinden kendisinin çıkarılmasıyla elde edilen öz alt kümesi de sonsuz elemanlıdır. Dolayısıyla her elemana diğer kümeden bir eleman karşılıklı olarak eşlenebileceğinden denk olurlar.

Görüldüğü gibi öğrenci sonsuz bir küme ile öz alt kümesi arasında uygun eşleme yapılabileceğini belirtmiş ancak bu görüşünü destekleyebilecek bir örnek

sunamamıştır. Bu böyle bir yaklaşımla hareket eden öğrencilerin duruma sezgisel olarak yaklaştıkları söylenebilir. Çünkü izah edilebilir bir eşleme örneği sunmadan böyle bir eşlemenin yapılabileceğinin belirtilmesi bir varsayımın ötesine geçemeyecektir.

Birebir-örten eşleme fikrini benimseyen bazı öğrenciler de bu görüşlerini uygun örnekler ile ifade edebilmişlerdir. Bu öğrencilerin mevcut soruda Cantor tarafından ortaya konan denklik yaklaşımını uygun bir şekilde kullandıkları söylenebilir. Bu öğrencilerden birinin cevabı aşağıda örnek olarak sunulmuştur.


Soru1: Bir küme özalt kümesine denk olabilir mi? Örnekler ile açıklayınız

$\mathbb{N}$ kümesi $\{0\} \cup \mathbb{Z}^+$ kümesinin öz alt kümesidir.

$f: \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$

$f(x) = x+1$

0 1 2 3 ...
↓ ↓ ↓ ↓
1 2 3 4 ...

Sonsuza giderken bijektifliğini korur. Yani birbirine denktir.

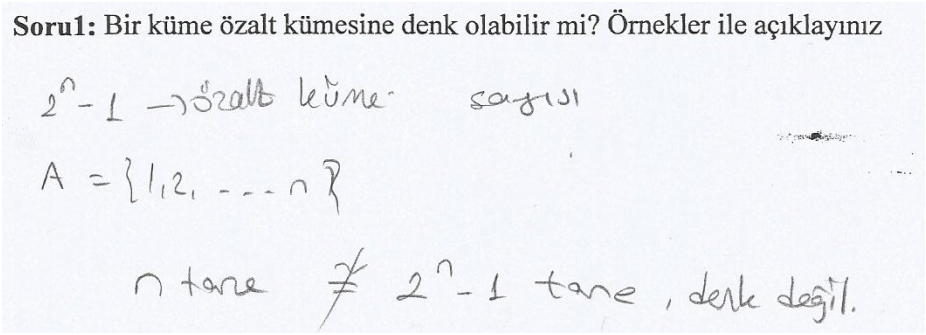
ii. Bir kümenin öz alt kümesine denk olamayacağını belirtenler:

Soruya cevap veren öğrencilerin bir kısmı, herhangi bir kümenin öz alt kümesine denk olamayacağını ifade etmişlerdir. Bu kategoride yer alan öğrenciler düşünme biçimlerine göre hiyerarşik olarak aşağıda sunulmuştur.

Bir kümenin herhangi bir öz alt kümesine denk olamayacağını ifade eden öğrencilerin bir kısmı bu görüşlerini detaylandırmamışlardır. Sadece düşüncelerinin sonucunu ifade etmişlerdir. Bu öğrencilerin sunulan soruya gelişigüzel cevap verdikleri ya da düşüncelerini açıklamaktan kaçındıkları sonucuna ulaşılabilir.

Diğer yandan bazı öğrenciler bir kümenin eleman sayısı öz alt küme sayısına eşit olamaz sonucuna ulaşmışlardır. Bu öğrencilerin, kendilerine verilen soruyu yanlış yorumladıkları söylenebilir. Çünkü bu soruda bir kümenin eleman sayısının, öz alt kümesinin eleman sayısına eşit olup olamayacağı sorgulanmaktadır.

Soruyu yanlış yorumlayan bu bireyler cebirsel eşitlikler oluşturarak düşüncelerini kanıtlamaya çalışmışlardır. Bu kategoride yer alan bireylerden ikisinin cevapları örnek olarak aşağıda sunulmuştur.

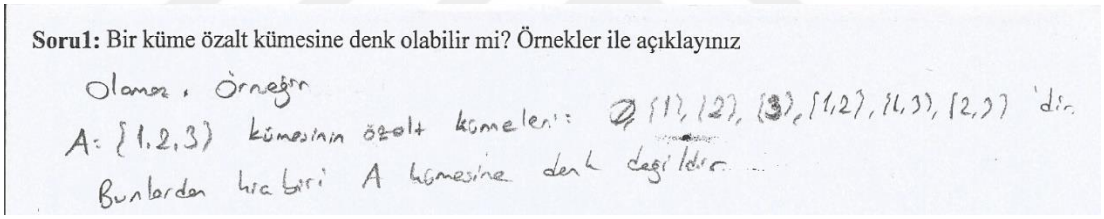

Soru1: Bir küme özalt kümesine denk olabilir mi? Örnekler ile açıklayınız

$2^n - 1$ → özalt küme sayısı

$A = \{1, 2, \ldots n\}$

n tane $\neq$ $2^n - 1$ tane, denk değil.

Bir kümenin öz alt kümesine denk olamayacağını ifade eden öğrencilerden bazıları sonlu kümeler için uygun örnekler vererek bu sonucu tüm kümelere genellemişlerdir. Bu kategoride yer alan bazı öğrencilerin vermiş oldukları cevaplar örnek olarak aşağıda sunulmuştur.


Soru1: Bir küme özalt kümesine denk olabilir mi? Örnekler ile açıklayınız

Olamaz, örneğin

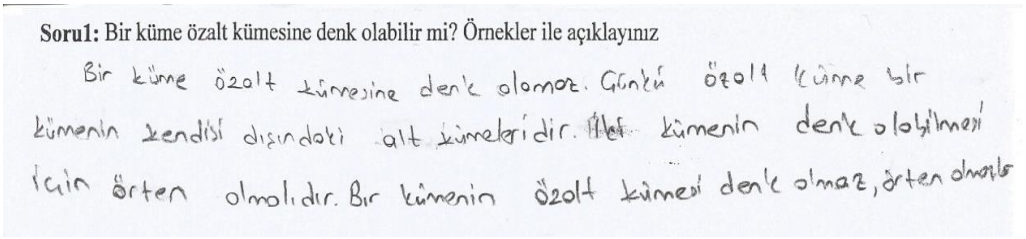
A: {1,2,3} kümesinin özalt kümeleri: ∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3} 'dir.

Bunlardan hiçbiri A kümesine denk değildir.

Bu öğrencilerin, farklı düşünme biçimlerinin etkisi ile yanılgıya düştükleri söylenebilir. Bu durumun birinci sebebi öğrencilerin küme kavramını kısıtlı bir anlayışla ele almaları olabilir. Başka bir ifade ile öğrenciler, tüm kümelerin sonlu olduğunu varsayarak böyle bir sonuca ulaşmış olabilirler. Diğer yandan öğrencilerin genelleyici bir düşünceden hareketle böyle bir sonuca ulaşmış olmaları da olasıdır. Çünkü sonlu kümeler için geçerli olabilecek bir kuralın sonsuz kümeler için de geçerli olacağı varsayılmıştır. Böyle düşünen öğrencilerin gerçek yaşam deneyimlerine dayanan *bütün, parçadan daha büyüktür* düşüncesini genelledikleri söylenebilir. Dolayısı ile bu öğrencilerin düşünme biçimlerinin şekillenmesinde gerçek dünyaya ait algıların önemli bir rol oynadığı sonucuna ulaşılabilir.

Bir kümenin öz alt kümesine denk olamayacağını belirten bazı öğrenciler birebir-örten eşleme fikrinden yararlanmışlardır. Ancak bu öğrencilerin yorumuna

göre bir kümesi ile öz alt kümesi arasında birebir-örten eşleme yapılamamaktadır. Bu kategoride yer alan öğrencilerden birinin açıklaması örnek olarak aşağıda sunulmuştur.


Soru1: Bir küme özalt kümesine denk olabilir mi? Örnekler ile açıklayınız

Bir küme özalt kümesine denk olamaz. Çünkü özalt küme bir kümenin kendisi dışındaki alt kümeleridir. Her kümenin denk olabilmesi için örten olmalıdır. Bir kümenin özalt kümesi denk olmaz, örten olmaz

Bir önceki kategoriye benzer olarak bu öğrencilerin de gerçek yaşamdan getirdikleri sezgi ile duruma yaklaştıkları ve bütünün parçadan daha büyük olması gerektiği düşüncesine sahip oldukları söylenebilir. Bu öğrencilerin de sonlu kümelere ilişkin algılarını sonsuz kümelere genişlettikleri sonucuna ulaşılabilir. Ancak bu durumu bir eşleme yapılamayacağı fikri ile ilişkilendirmişlerdir. Başka bir ifade ile denklik ilişkisinin birebir-örten eşleme ile ifade edilmesi gerektiğinin farkındadırlar ancak bu yaklaşımı uygun bir biçimde kullanamamışlardır.

Öğrencilerin bir kısmı sunulan soruya yanıt vermemişlerdir. Bu öğrencilerin soruyu anlamlandıramadıkları için cevap vermedikleri ya da düşüncelerini ifade etmekten çekindikleri söylenebilir.

2.Soruya verilen cevaplar ve analizi

Genel Uygulama I formunun ikinci ve üçüncü sorusuna verilen yanıtlar üzerinde yapılan içerik analizi sonucu elde edilen kategoriler ve alt kategorilere ait özet tablo aşağıda sunulmuştur.

Her iki sorunun da ortak amacı sonsuz bir küme ile bir öz alt kümesi arasındaki ilişkinin belirlenmesidir. Dolayısı ile bu iki soruda öğrenciler benzer yaklaşımlar geliştirmişlerdir. Okuma kolaylığı açısından bu veriler tek tabloda sunulmuştur.

İkinci soruda sunulan küme $\mathbb{Z}$ kümesinden sonsuz sayıda eleman çıkarılması ile elde edilen bir öz alt kümesidir. Öğrenciden bu küme ile $\mathbb{Z}$ kümesini karşılaştırmaları istenmiştir. Soruda verilen {51,52,…} kümesi, $\mathbb{Z}$ kümesinden

sonsuz eleman çıkarılması ile elde edilen bir öz alt kümesidir. Bu iki küme arasındaki denklik ilişkisinin araştırılması ile öğrencilerin biri diğerinin öz alt

kümesi olan iki küme arasındaki ilişkiyi nasıl yorumlayacağı incelenebilecektir. Böylece sonsuz eleman eksik olma durumunun öğrenciler tarafından nasıl yorumlanacağı ve bunun denkliğin temel felsefesi ile nasıl ilişkilendirileceği gözlenebilecektir.

Bu soruya verilen cevaplar üzerinde içerik analizi uygulanmış ve aşağıdaki kategoriler oluşturulmuştur.

Tablo 4

Genel Uygulama I - İkinci ve Üçüncü soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar

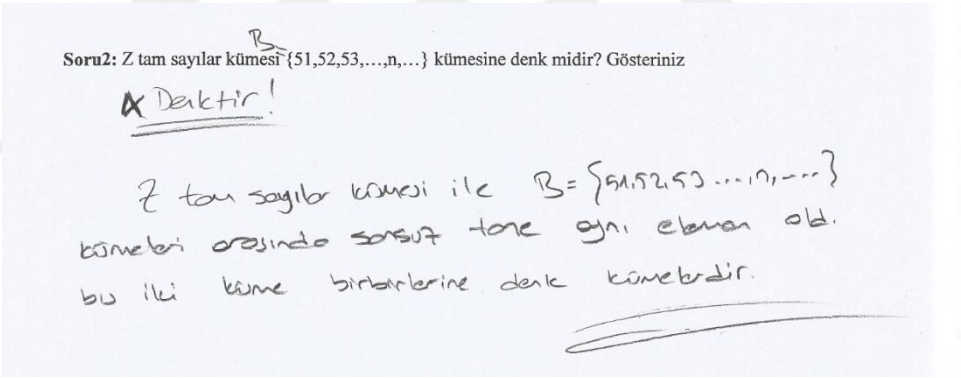
Soru2 : ℤ tam sayılar kümesi {51,52,...} kümesine denk midir? Gösteriniz *Soru 3: ℤ tam sayılar kümesi ℙ asal sayılar kümesine denk midir? Gösteriniz.*	***Kişi Sayısı***	
	S2	***S3***
Denk olabileceğini belirtenler	***75***	**75**
i. Sadece ''denk olabilir'' cevabını yazanlar.	*8*	5
ii. Her iki kümenin sonsuzluğundan hareketle denk olduklarını belirtenler.	*17*	28
iii. Kümelerin denk olduğunu belirtip bunu uygun bir eşleme ile ifade edemeyenler.	*25*	10
iv. Kümelerin denk olduğunu birebir örten eşleme ile gösterebilenler.	*25*	23
Soruya cevap vermeyenler	***7***	**7**
Denk olamayacağını belirtenler	***16***	**17**
i. Sadece ''denk olamaz'' cevabını yazanlar.	*1*	4
ii. Z kümesinde daha fazla eleman olduğu için denk olamayacağını belirtenler.	*8*	6
iii. İki küme arasında birebir ve örten bir eşleme tanımlanamayacağını söyleyenler.	*7*	7
Toplam	***98***	

i. Kümelerin Denk Olduklarını Belirtenler:

Kümelerin denk olduğunu ifade eden öğrencilerin farklı yaklaşımlar kullandıkları görülmüştür. Kullanılan yaklaşımlar, informal olandan daha formal olana doğru aşağıda açıklanmıştır.

Az sayıdaki öğrenci hiçbir açıklamada bulunmadan bu kümelerin denk olduklarını belirtmişlerdir. Bu öğrenciler için iki durum söz konusu olabilir. Bazıları yeterince düşünmeden soruya gelişigüzel cevap vermiş olabilirler. Diğer yandan düşüncelerini uygun bir dil yardımı ile ifade edememiş olabilirler. Başka bir neden de öğrencilerin düşüncelerini paylaşmak istememeleri olabilir. Her ne sebeple olursa olsun bu öğrenciler düşüncelerinin sonucunu ifade etmişler ve bu sonucun nedenini ifade edememişlerdir.

Diğer yandan bazı öğrenciler iki kümenin de sonsuz olduğunu belirterek bunların denk olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Bir eşleme olmaksızın sonsuz kümelerin denk olduğunu söyleyen bu öğrencilerin düşüncesi aşırı genelleme içermektedir. Bu öğrenciler bijektif eşleme fikrini yeterince kullanmadan bu sonuca ulaşmışlardır. Bu kategoride yer alan bazı öğrencilerin sundukları cevaplardan bir örnek aşağıda sunulmuştur.



Bu alt kategorideki öğrencilerin sonsuz kümeler için kullanılabilecek denklik tanımını formal olarak oluşturamadıkları ve s(A) = s(B) ⇔ A≡B tanımından hareketle kümelerin denkliğini belirlemeye çalıştıkları söylenebilir. Sonlu sayıdaki eleman için uygun olan bu tanımlamayı sonsuz eleman için geçerli de kabul eden bu öğrencilerin sezgileri ile bir sonuca ulaştıkları söylenebilir. Çünkü öğrenciler sayılamayacak kadar çok eleman içeren iki küme arasında elemanları saymaya dayalı azlık-çokluk ilişkisi kurarak bu sonuca ulaşmışlardır. Oysaki elemanları gerçekten saymaları mümkün olmadığı için denklik yargısına ulaşmaları bir kabulden ibarettir. Bu nedenle yaklaşımları formal kabul edilemez.

Diğer yandan ders içi gözlemlerde de benzer yanılgılar ile karşılaşılmıştır. Örneğin, gerçekleştirilen ilk derste $\mathbb{N} \overset{?}{\sim} A = \{53, 54, 55, ...\}$ sorusuna, ilgili kümeler arasında tanımlanan f : ℕ→A, f(x) = x+52 fonksiyonundan hareketle ℕ ∼A yanıtı verildikten sonra öğrencilerden biri söz istemiş ve öğretim elemanı arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir.

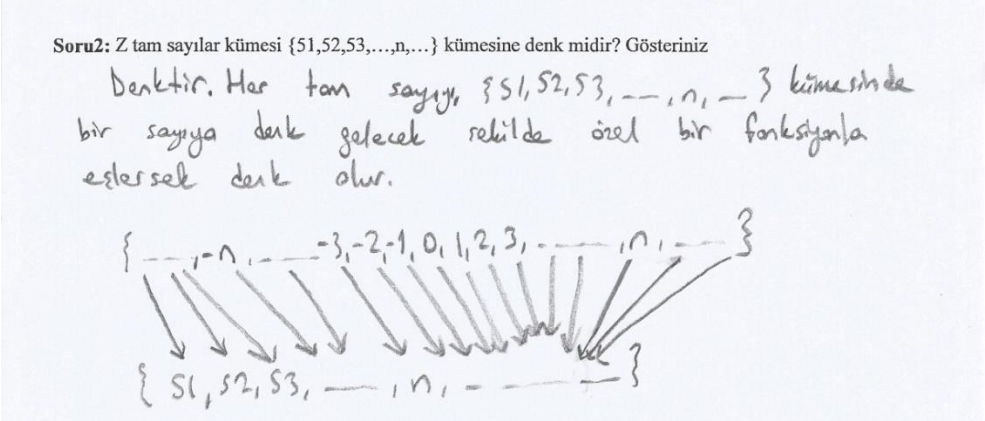
Tablo 5

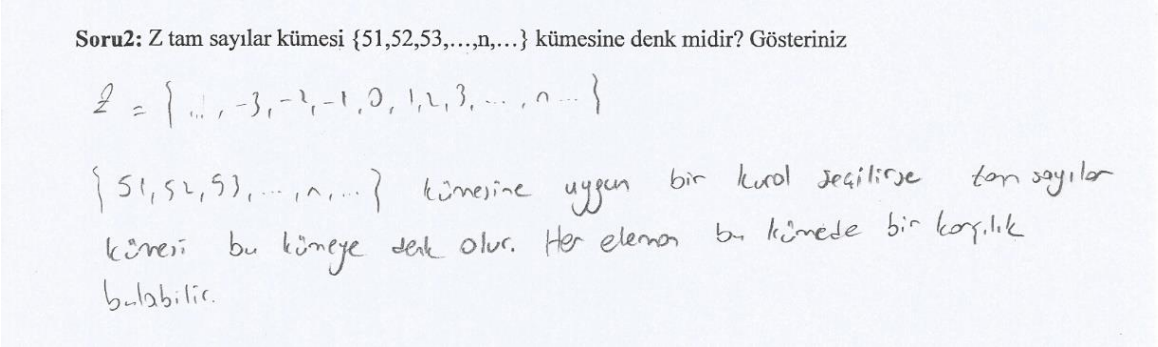
Sınıf İçi Diyalog (2)

Öğrenci	Doğal sayılar kümesinin öz alt kümesine denk olduğunu gördük. Peki, o zaman doğal sayılar kümesi [0,1] kapalı aralığına denk midir?
Öğretim Elemanı	Sence denk midir?
Öğrenci	Her ikisi de sonsuz olduğu için aralarında mutlaka birebir-örten bir fonksiyon tanımlanabilmeli. Bence denktir.

Görüldüğü gibi öğrenci aslında tüm sonsuz kümelerin birbirlerine denk olabileceğini düşünmektedir. Dolayısı ile bijektif eşleme yaklaşımını yeterince kullanamamaktadır. Yukarıda sunulan açıklamalar bu örnek için de geçerlidir.

Soruya verilen yanıtların analizinde, bazı öğrencilerin kümelerin denk olduğunu belirttiği ancak bunu edilebilir uygun bir eşleme ile gösteremedikleri görülmüştür. Bu alt kategorideki öğrencilerin cevaplarından bazıları aşağıda sunulmuştur.




Soru2: Z tam sayılar kümesi {51,52,53,…,n,…} kümesine denk midir? Gösteriniz

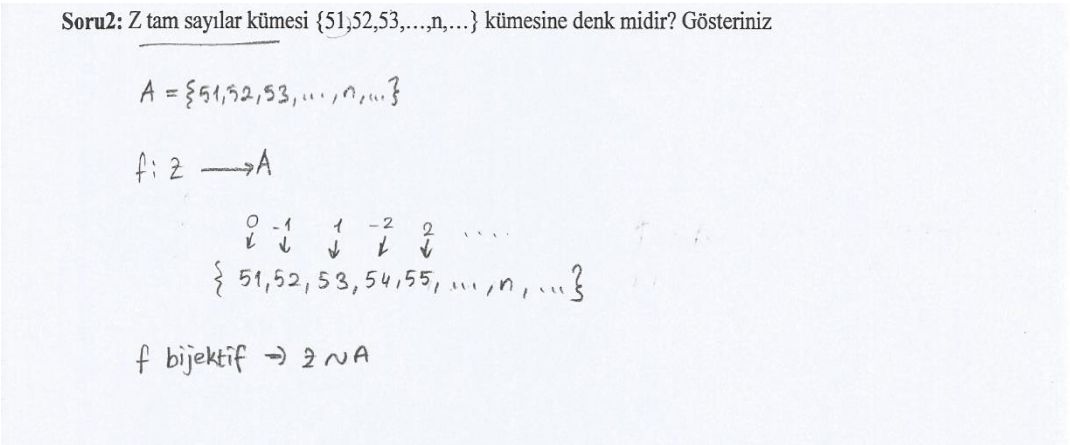
$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n \ldots\}$

$\{51, 52, 53, \ldots, n, \ldots\}$ kümesine uygun bir kural seçilirse tam sayılar kümesi bu kümeye denk olur. Her elemanı bu kümede bir karşılık bulabilir.

Sunulan örnekler incelendiğinde, öğrencilerin izah edilebilir eşlemeler oluşturamadığı görülebilir. Bu öğrenciler açısından ilginç olan nokta uygun bir eşleme üretememiş olsalar bile kümelerin denk olduğu düşüncesinden vazgeçmemiş olmalarıdır. Böyle bir eşlemeyi kendileri üretemeseler de, üretilebileceğini varsaymaları sezgisel düşünce bağlamında yorumlanabilir.

Bu kümelerin denk olduğunu belirten öğrencilerin bir kısmı da bu düşüncelerini birebir-örten bir eşleme ile kanıtlayabilmişlerdir. Bu öğrencilerin büyük kısmı birebir-örten kurallı bir fonksiyon oluşturmak yerine izah edilebilir bir eşleme oluşturarak sonuca ulaşmışlardır.

Aşağıda bu kategoride yer alan öğrencilerden birinin kullandığı yaklaşım sunulmuştur.


Soru2: Z tam sayılar kümesi {51,52,53,…,n,…} kümesine denk midir? Gösteriniz

$A = \{51, 52, 53, \ldots, n, \ldots\}$

$f: Z \longrightarrow A$

$0 \to 51,\ -1 \to 52,\ 1 \to 53,\ -2 \to 54,\ 2 \to 55,\ \ldots$

$\{51, 52, 53, 54, 55, \ldots, n, \ldots\}$

f bijektif $\Rightarrow Z \sim A$

Bu öğrencilerin birebir-örten eşleme fikrini uygun bir şekilde kullanabildikleri sonucuna ulaşılabilir.

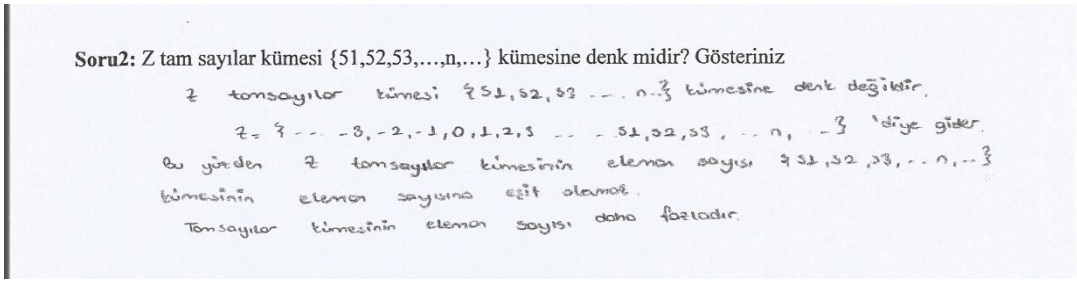
ii. Kümelerin Denk Olmadıklarını Belirtenler:

Öğrencilerin büyük bir çoğunluğu bu soruda kümelerin denk olduklarını belirtmişlerdir. Ancak bu kümelerin denk olmadığını belirtenler de vardır. Bu kategoride yer alan öğrenciler de düşünme biçimlerine göre hiyerarşik olarak aşağıda sunulmuştur.

Soruya denk olamaz yanıtını veren öğrenciler içerisinden bir kişi hiçbir açıklamada bulunmadan sadece bu kümelerin denk olmadığını söylemekle yetinmiştir. Önceki benzer kategorilerde söylendiği gibi bu öğrencinin gelişigüzel cevap verdiği ya da düşüncelerini ifade etmekte zorlandığı söylenebilir.

Diğer yandan kümelerin denk olmadığını belirten bazı öğrenciler $\mathbb{Z}$, tam sayılar kümesinin {51,52,53, ...} kümesinden daha çok eleman içerdiğini belirtmişlerdir. Bu öğrencilerin birebir örten eşleme fikrini oluşturamadıkları söylenebilir. Diğer bir ifade ile kümeler arasındaki denkliği sonlu kümeler için geçerli olabilecek $s(A) = s(B) \Leftrightarrow A \equiv B$ tanımından hareketle incelemeye çalıştıkları söylenebilir. Bu tanımdan hareketle bir sonuca ulaşmaları denklik kavramını (*sezgisel olarak*) azlık-çokluk fikri ile ilişkilendirdiklerinin bir göstergesi olabilir. Ayrıca bu öğrencilerin sonlu kümelere ait algılarını sonsuz kümelere genelledikleri sonucuna da ulaşılabilir. Çünkü öğrencilerin düşünme biçimlerinin temelinde *bütün, parçadan daha büyüktür* anlayışının yer aldığı söylenebilir.

Bu kategoride yer alan öğrencilere ait örnek açıklamalar aşağıda sunulmuştur.

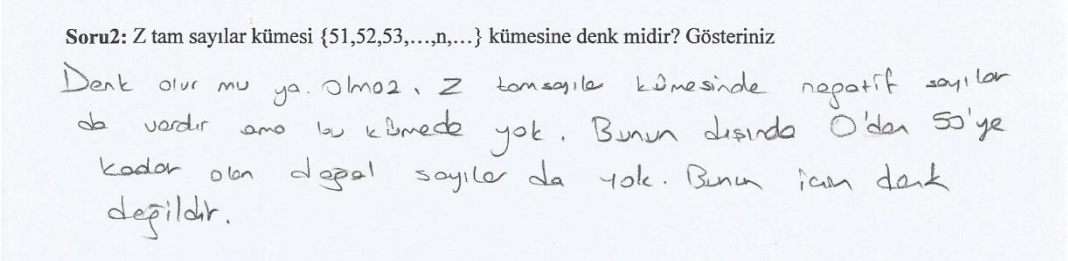

Soru2: Z tam sayılar kümesi {51,52,53,…,n,…} kümesine denk midir? Gösteriniz

Z tamsayılar kümesi {51,52,53 ... n...} kümesine denk değildir.

Z = {... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ... -51, 52, 53, ... n, ...} 'diye gider.

Bu yüzden Z tamsayılar kümesinin eleman sayısı {51,52,53,... n,...} kümesinin eleman sayısına eşit olamaz.

Tamsayılar kümesinin eleman sayısı daha fazladır.

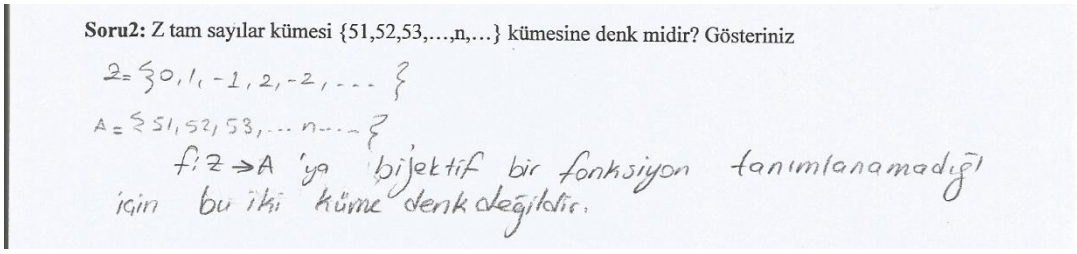

Soru2: Z tam sayılar kümesi {51,52,53,…,n,…} kümesine denk midir? Gösteriniz

Denk olur mu ya. Olmaz. Z tamsayılar kümesinde negatif sayılar da vardır ama bu kümede yok. Bunun dışında 0'dan 50'ye kadar olan doğal sayılar da yok. Bunun için denk değildir.

Sonuç olarak bu öğrencilerin kümelerin denkliği ile ilgili bir kavram yanılgısına sahip oldukları sonucuna ulaşılabilir.

İki kümenin denk olmadığını düşünen öğrencilerden bazıları da bu durumu bijektif eşleme fikri ile açıklamaya çalışmışlardır. Bu öğrencilere göre iki küme arasında bijektif bir fonksiyon tanımlanamayacağı için kümeler denk değildir. Bu öğrencilerin düşünme biçimleri de bir önceki kategoride sunulan düşünme biçimine benzerdir. Diğer yandan bu öğrencilerin sonsuz kümelerin denkliğini belirlemedeki ölçütlerinin Cantor tarafından ortaya konan bijektif eşleme yaklaşımı olduğu söylenebilir. Ancak bu yaklaşımı verilen duruma uygun bir şekilde kullanamamış ve yanılgıya düşmüşlerdir.

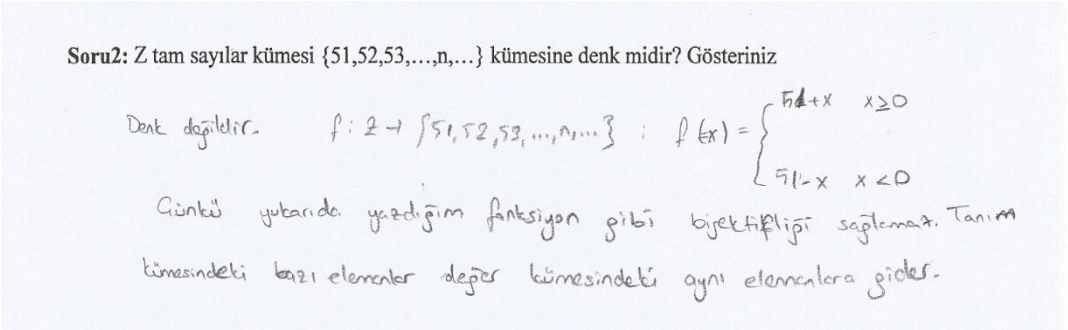
Bu kategoride yer alan öğrencilerin vermiş oldukları cevaplardan bazıları aşağıda sunulmuştur.


Soru2: Z tam sayılar kümesi {51,52,53,…,n,…} kümesine denk midir? Gösteriniz

Z = {0, 1, -1, 2, -2, ...}

A = {51, 52, 53, ... n, ...}

f: Z → A 'ya bijektif bir fonksiyon tanımlanamadığı için bu iki küme denk değildir.


Soru2: Z tam sayılar kümesi {51,52,53,…,n,…} kümesine denk midir? Gösteriniz

Denk değildir. $f: Z \to \{51, 52, 53, \ldots, n, \ldots\}$: $f(x) = \begin{cases} 51+x & x \geq 0 \\ 51-x & x < 0 \end{cases}$

Çünkü yukarıda yazdığım fonksiyon gibi bijektifliği sağlamaz. Tanım kümesindeki bazı elemanlar değer kümesindeki aynı elemanlara gider.

Görüldüğü gibi öğrenciler, uygun bir bijektif fonksiyon tanımlanamayacaklarını düşündükleri için kümelerin denk olmadığı sonucuna ulaşmışlardır. Başka bir ifade ile uygun fonksiyonu üretemedikleri için verilen kümelerin denk olamayacağına karar vermişlerdir. Bu öğrencilerin yöntem bilgisi açısından bir yanılgıya sahip oldukları söylenebilir. Çünkü sonsuz iki kümenin denk olduğunun gösterilebilmesi için bir ve yalnız bir bijektif fonksiyon tanımlanması yeterlidir. Diğer yandan kümelerin denk olmadığının gösterilebilmesi için iki küme arasındaki sonsuz fonksiyondan *hiçbirinin* bijektif olmadığının gösterilmesi gerekir. Öğrencilerin sınırlı sayıda örnekten hareketle kümelerin denk olamayacağını ifade etmesi matematiksel yöntem açısından bir yanılgıdır.

Bu soruda kümelerin denk olduğunu yanıtını veren ve kümelerin denk olmadığı yanıtını veren öğrencilerin yanı sıra yanıt vermeyen öğrenciler de olmuştur. Bu öğrencilerin soruyu anlamlandıramadıkları için cevap vermedikleri ya da düşüncelerini ifade etmekten çekindikleri söylenebilir.

3. Soruya verilen cevaplar ve analizi

Bu soru ile bir önceki soru arasında benzerlik yönünden bir ilişki kurulabilir. Çünkü $\mathbb{P}$ asal sayılar kümesi de tıpkı {51,52, …} kümesi gibi $\mathbb{Z}$ kümesinin sonsuz sayıda elemana sahip bir öz alt kümedir. Diğer yandan $\mathbb{P}$ asal sayılar kümesinin dağılımı düzgün değildir. Dolayısı ile öğrencilerin iki küme arasında y=f(x) şeklinde bir kural ile tanımlanabilecek, cebirsel bir fonksiyon üretmeleri mümkün olmayacaktır. Bu soru ile öğrencilerin cebirsel fonksiyon tanımlayamadıkları durumlarda izah edilebilir bir eşlemeyi nasıl oluşturabilecekleri incelenmek istenmiştir.

Bu soruya verilen cevaplar üzerine de içerik analizi uygulanmıştır. Diğer yandan Genel Uygulama I formunun 3.sorusunda kullanılan yaklaşımlar 2. Soruda kullanılan yaklaşımlara büyük oranda paralellik göstermektedir. Dolayısı ile bu soruda elde edilen alt kategoriler (*bkz. Sayfa 59 Tablo 4*) büyük oranda bir önceki sorudan elde edilen alt kategorilere benzerdir.

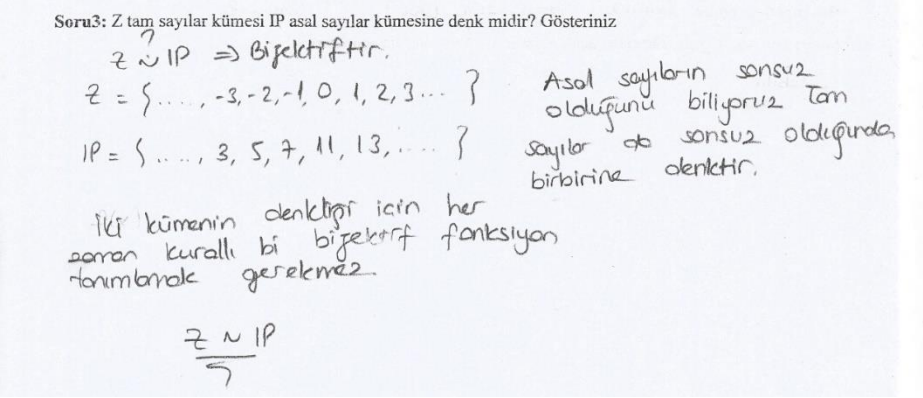
i. Kümelerin Denk Olduklarını Belirtenler:

Kümelerin denk olduğunu ifade eden öğrencilerin farklı yaklaşımlar kullanmışlardır. Kullanılan yaklaşımlar informalden formal olana doğru aşağıda açıklanmıştır.

Bu soruda da ilk grupta yer alan öğrenciler önceki sorularda olduğu gibi hiçbir açıklamada bulunmadan bu kümelerin denk olduklarını belirtmişlerdir. Önceki sorular için belirtilen gerekçeler bu öğrenciler için de geçerlidir.

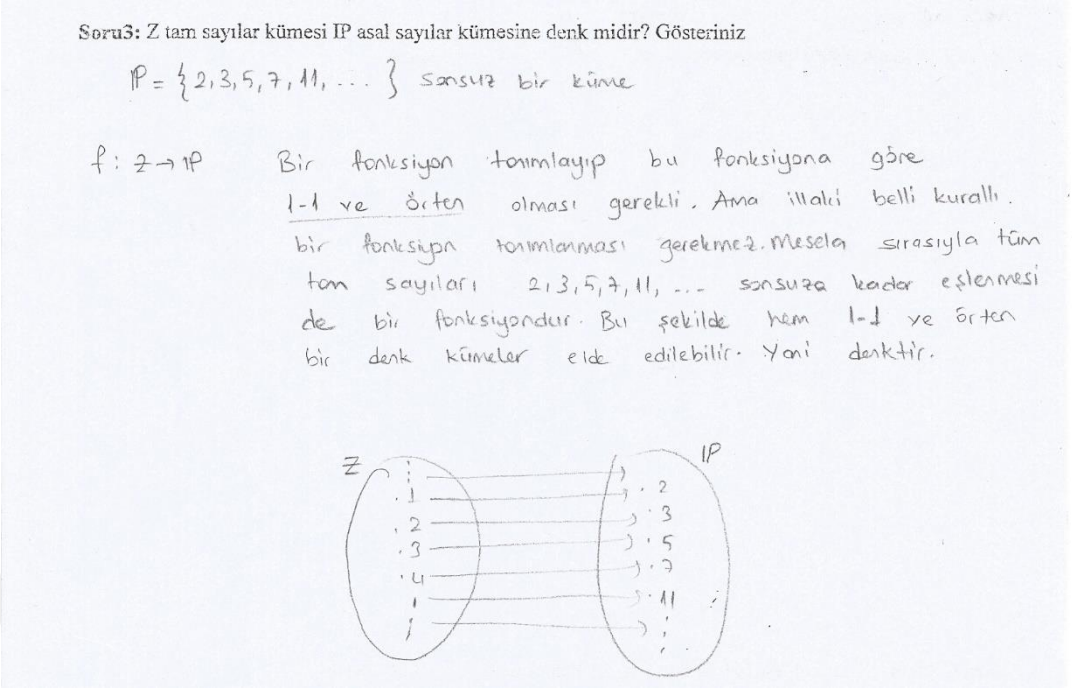
Kümelerin denk olduğunu ifade eden bazı öğrenciler bijektif eşleme fikrini yeterince kullanmadan bu sonuca ulaşmışlardır. Bu öğrenciler her iki kümenin de sonsuz olduğunu belirterek denk olmaları gerektiğini ifade etmişlerdir.

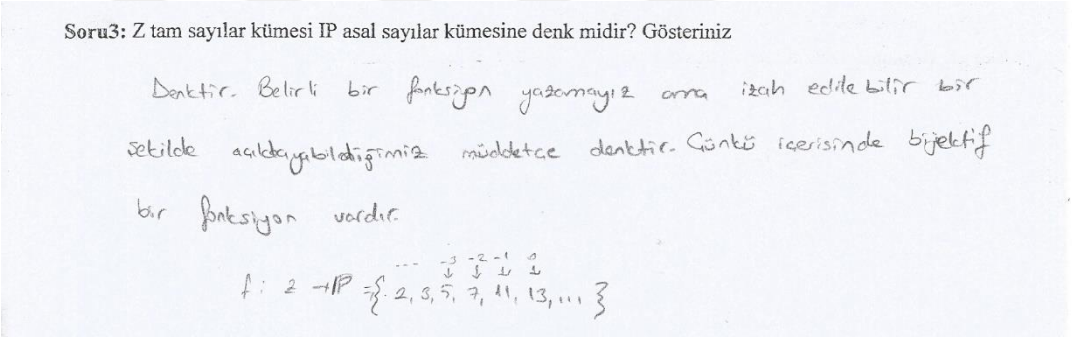
Bu kategoride yer alan bir öğrencinin verdiği cevap örnek aşağıda sunulmuştur.



Görüldüğü gibi öğrenci iki kümenin sonsuz olmalarını denk olmaları için yeterli olarak görmektedir. Bir önceki soruda benzer kategori için yapılan açıklamalar bu durum için de tekrarlanabilir. Öğrencilerin gerçek yaşam deneyimlerine dayanan sezgisel bir yaklaşım sergiledikleri ve aşırı genelleyici bir düşünme biçimi ile hareket ettikleri sonucuna ulaşılabilir.

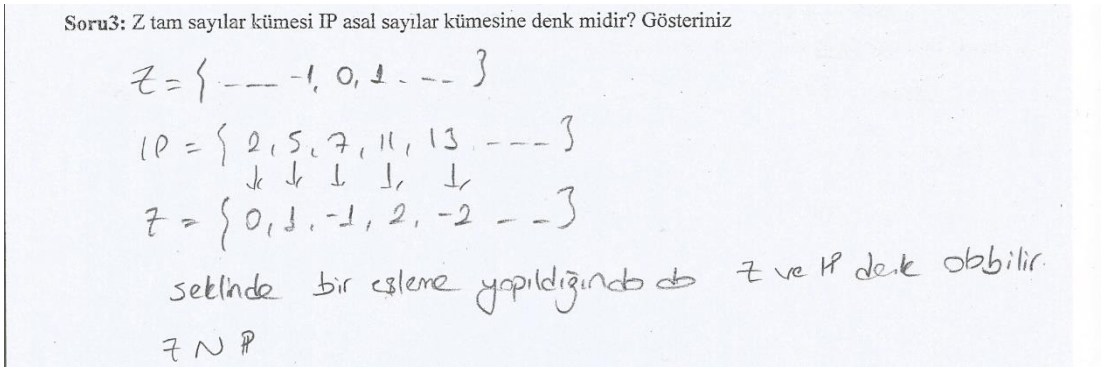
Kümelerin denk olduğunu ifade eden bazı öğrenciler iki küme arasında birebir-örten bir eşleme tanımlanması gerektiğini ifade etseler de izah edilebilir bir eşleme tanımlayamamışlardır. Diğer yandan uygun bir eşleme tanımlayamamalarına rağmen bu düşüncelerinden vazgeçmemişlerdir.





Öğrencilerin uygun bir eşleme tanımlayamasalar da bu denklik iddiasından vazgeçmemeleri kümelerin denkliklerine ilişkin geliştirdikleri sezgisel düşünce ile açıklanabilir. Başka bir ifade ile öğrencilerin en başta kümelerin denk olduğunu sezgisel olarak varsaydıkları ve uygun bir eşleme üretememiş olsalar bile bu düşüncelerinden vazgeçmedikleri söylenebilir.

Kümelerin denk olduğunu ifade eden bazı öğrenciler bu denkliği birebir-örten eşlemeler kullanarak gösterebilmişlerdir. Bu öğrencilerin tamamı kendilerinden beklendiği gibi kurallı bir fonksiyon oluşturmak yerine izah edilebilir bir eşleme oluşturarak denkliği gösterebilmişlerdir. Kurallı bir fonksiyon oluşturulamamasının temel nedeninin asal sayıların düzensiz dağılımı olduğu söylenebilir.


Soru3: Z tam sayılar kümesi IP asal sayılar kümesine denk midir? Gösteriniz

Z = { ... -1, 0, 1 ... }

IP = { 2, 5, 7, 11, 13 ... }

Z = { 0, 1, -1, 2, -2 ... }

şeklinde bir eşleme yapıldığında da Z ve IP denk olabilir.

Z ~ IP

Bu yaklaşımı kullanan öğrencilerin Cantor tarafından ortaya konan bijektif eşleme fikrini (bu soruda) uygun bir şekilde kullanabildikleri sonucuna ulaşılabilir.

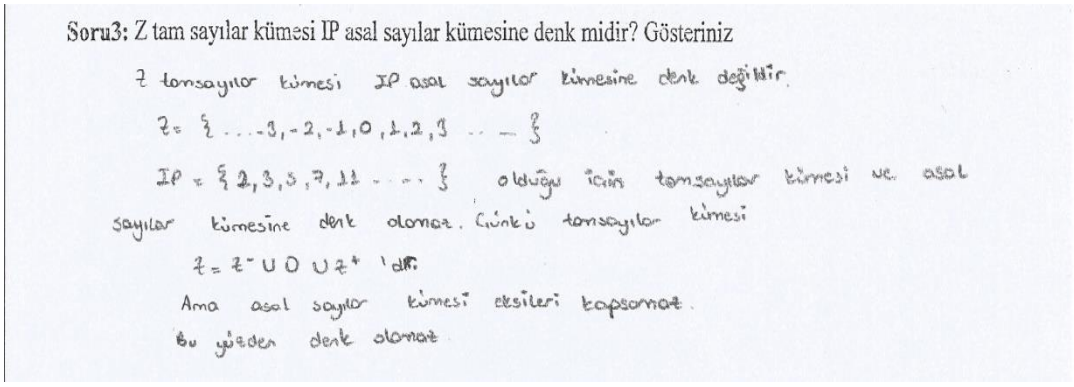
ii. Kümelerin Denk Olmadıklarını Belirtenler:

Bu soruda da tıpkı bir önceki soruda olduğu gibi öğrencilerin büyük bir çoğunluğu kümelerin denk olduklarını belirtmişlerdir. Ancak bu kümelerin denk olmadığını belirtenler de vardır. Bu kategoride yer alan öğrenciler de düşünme biçimlerine göre hiyerarşik olarak aşağıda sunulmuştur.

Bu soruda da bazı öğrenciler önceki sorularda olduğu gibi yeterli açıklamada bulunmadan kümelerin denk olamayacağını belirtmişlerdir. Önceki sorular için belirtilen gerekçeler bu öğrenciler için de geçerlidir.

Bu öğrencilere ek olarak kümelerin denk olamayacağını belirten bazı öğrenciler bu durumun nedenini $\mathbb{Z}$ kümesinin daha fazla eleman içermesi olarak ifade etmişlerdir. Başka bir ifade ile bu öğrencilere göre $\mathbb{Z}$ kümesi, $\mathcal{P}$ asal sayılar kümesinin bir üst kümesi olduğu için bu kümeye denk olamamaktadır. Bu öğrencilerin düşünme biçimleri incelendiğinde önceki sorularda sunulan gerçek yaşam tecrübelerine dayalı bütün-parça ilişkisi nedeni ile yanılgıya düştükleri söylenebilir. Çünkü bu öğrenciler sonsuz kümenin denkliklerini birebir-örten eşleme ile belirlemek yerine azlık-çokluk miktar yaklaşımı ile belirlemeye çalışmaktadırlar. Sezgilere dayalı olarak şekillenen bu düşünme biçiminin öğrencileri yanılgıya götürdüğü sonucuna ulaşılabilir.

Bu kategoride yer alan bazı öğrencilerin verdikleri cevaplar örnek olarak aşağıda sunulmuştur.


Soru3: Z tam sayılar kümesi IP asal sayılar kümesine denk midir? Gösteriniz

Z tamsayılar kümesi IP asal sayılar kümesine denk değildir.

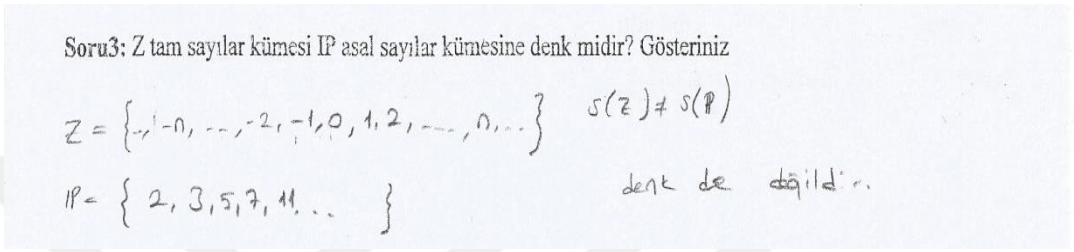
Z = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ... }

IP = { 2, 3, 5, 7, 11 ... } olduğu için tamsayılar kümesi ve asal sayılar kümesine denk olmaz. Çünkü tamsayılar kümesi

Z = Z⁻ ∪ 0 ∪ Z⁺ 'dir.

Ama asal sayılar kümesi eksileri kapsamaz.

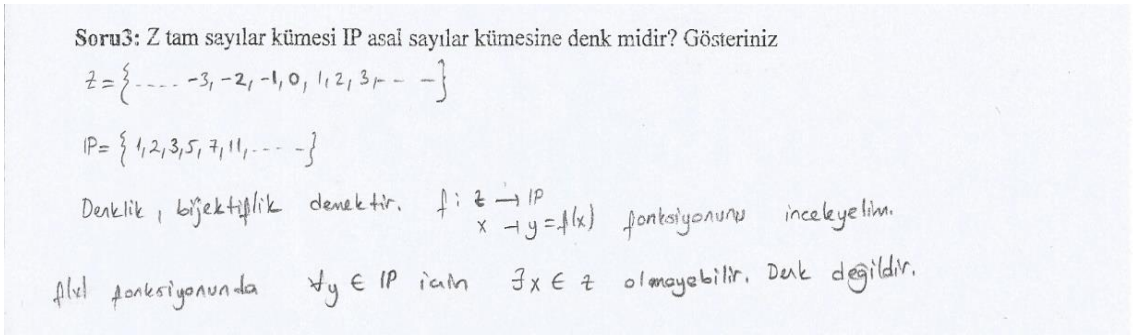
Bu yüzden denk olamaz


Soru3: Z tam sayılar kümesi IP asal sayılar kümesine denk midir? Gösteriniz

Z = { ..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ... } s(Z) ≠ s(P)

IP = { 2, 3, 5, 7, 11 ... } denk de değildir.

Kümelerin denk olamayacağını belirten bazı öğrenciler de önceki soruda olduğu gibi birebir-örten eşleme fikrini kullanmaya çalışmış ancak bu fikri uygun biçimde kullanamayarak hatalı sonuçlara ulaşmışlardır. Bu öğrencilere göre iki kümenin denkliğinin belirlenebilmesi için bijektif bir eşleme tanımlanabilmelidir. Bu açıdan bakıldığında öğrencilerin, kümelerin denkliğinin belirlenmesine yönelik doğru bir anlayış geliştirdikleri söylenebilir. Ancak bu öğrenciler, uygun örnekler veremedikleri için kümelerin denk olamayacağını ifade etmişlerdir. Bu kategoride yer alan öğrencilerin verdikleri cevaplardan biri örnek olarak aşağıda sunulmuştur.


Soru3: Z tam sayılar kümesi IP asal sayılar kümesine denk midir? Gösteriniz

Z = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ... }

IP = { 1, 2, 3, 5, 7, 11, ... }

Denklik, bijektiflik demektir. f : Z → IP, x → y = f(x) fonksiyonunu inceleyelim.

f(x) fonksiyonunda ∀y ∈ IP için ∃x ∈ Z olmayabilir. Denk değildir.

Örnekten de görüldüğü gibi bu öğrencilere göre verilen $\mathbb{Z}$ kümesi P kümesinden daha büyük olduğu için bijektif bir eşleme tanımlanamaz. Bu öğrencilerin de iki noktada yanılgıya düştükleri söylenebilir. İlki yöntem açısından

değerlendirilebilir. Bu öğrencilerin de ispat yöntemi açısından bir yanılgıya sahip oldukları açıktır.

Çünkü sınırlı sayıda örnekten genellemeye ulaşmışlardır. Ayrıca öğrencilerin sonlu kümelere ve gündelik yaşam deneyimlerine dayalı olarak geliştirdikleri sezgilerine dayanarak hatalı yorumlar yaptıkları için yanılgıya düştükleri söylenebilir.

Bu soruya da kümelerin denk olduğuna ya da denk olmadığına ilişkin yanıt veren öğrencilerin yanı sıra hiç yanıt vermeyen öğrenciler de olmuştur. Bu öğrencilerin soruyu anlamlandıramadıkları için cevap vermedikleri ya da düşüncelerini ifade etmekten çekindikleri söylenebilir.

Genel Uygulama II ve Analizi

Bu soru ile öğrencilerden önceki hafta derste ele alınan $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$ ispatını genişletmeleri ve bilgilerini yeni duruma nasıl transfer etmeleri beklenmiştir. Bu sorudan elde edilen cevaplar üzerine içerik analizi uygulanmış ve elde edilen kategoriler aşağıda sunulmuştur.

1.Soruya verilen cevaplar ve analizi

Genel Uygulama II formunun ilk sorusuna verilen yanıtlar üzerinde yapılan içerik analizi sonucu elde edilen kategoriler ve alt kategorilere ait özet tablo aşağıda sunulmuştur.

Tablo 6

Genel Uygulama II - Birinci soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar

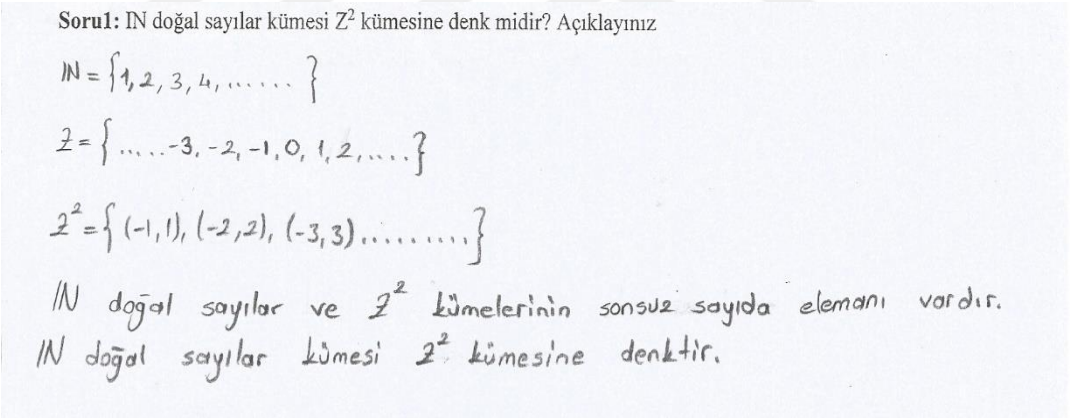
Soru: $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi $\mathbb{Z}^2$ kümesine denk midir? Açıklayınız.	**Kişi Sayısı**
Denk olabileceğini belirtenler	**81**
i. Sadece ‘’*denk olabilir*’’ açıklamasını yapanlar.	9
ii. Her iki kümenin sonsuzluğundan hareketle denk olduklarını belirtenler.	14
iii. Z^2 kümesinin, karesel sayılardan oluştuğunu düşünerek denkliğe ulaşanlar	4
v. $\mathbb{N}x\mathbb{N} = \mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ eşitliğini varsayarak $\mathbb{Z}^2$ kümesi yerine $\mathbb{N}^2$ kümesi ile denkliği gösterenler.	5
vi. İki kümenin denk olduğunu düşünüp bu denkliği uygun biçimde gösteremeyenler.	41
vii. Kümelerin denk olduğunu birebir örten eşleme ile gösterebilenler.	8
Soruya cevap vermeyenler	**7**
Denk olamayacağını belirtenler	**11**
i. $\mathbb{Z}^2$ kümesinde daha fazla eleman olduğu için denk olamayacağını belirtenler.	7
ii. İki küme arasında birebir ve örten bir eşleme tanımlanamayacağını söyleyenler.	4
Toplam	**99**

i. Kümelerin Denk Olduklarını Belirtenler:

Kümelerin denk olduğunu ifade eden öğrenciler, farklı yaklaşımlar kullanmışlardır. Kullanılan yaklaşımlar informal olandan daha formal olana doğru aşağıda açıklanmıştır.

$\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesinin $\mathbb{Z}^2$ kümesine denk olduğunu belirten öğrencilerin bir kısmı bu görüşlerini detaylandırmamışlardır. Sadece denkliğe ilişkin görüşlerini kısaca ifade etmişlerdir. Bu öğrencilerin sunulan soruya gelişigüzel cevap verdikleri ya da çeşitli sebeplerle düşüncelerini açıklamaktan kaçındıkları söylenebilir.

Bir önceki uygulamada olduğu gibi bu uygulamada da bazı öğrencilerin, kümeleri karşılaştırmak için ‘’*sonsuzluk*’’ kavramını temel referans noktası olarak ele aldıkları görülmüştür. Bu öğrencilere göre sunulan kümeler sonsuz oldukları için birbirlerine denk olmalıdır. Bu kategoride yer alan öğrencilerden birinin vermiş olduğu cevap örnek olarak aşağıda sunulmuştur.


Soru1: IN doğal sayılar kümesi Z^2 kümesine denk midir? Açıklayınız

$IN = \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\}$

$Z = \{\ldots\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots\}$

$Z^2 = \{(-1,1), (-2,2), (-3,3) \ldots\ldots\ldots\}$

IN doğal sayılar ve Z^2 kümelerinin sonsuz sayıda elemanı vardır.

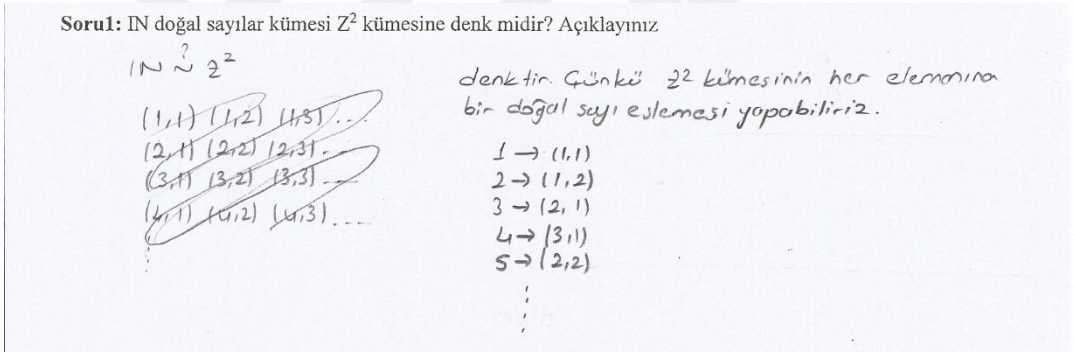
IN doğal sayılar kümesi Z^2 kümesine denktir.

Sunulan kategoride yer alan öğrencilerin, Cantor tarafından ortaya konan birebir-örten eşleme fikrini istenen düzeyde kullanamadıkları söylenebilir. Bunun yerine kümelerin eleman sayısını saymaya temel alan yaklaşımı benimsemişlerdir. Bu yaklaşım ile denkliğe ilişkin formal bir delil üretmeseler de kümelerin denk olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Dolayısı ile bu öğrencilerin, mevcut duruma sezgisel olarak yaklaştıkları sonucuna ulaşılabilir. Çünkü bir delil olmaksızın ulaştıkları bu sonuç bir varsayımdır. Bu varsayımsal düşüncenin nedeni de kümelerin eleman sayılarına ilişkin bir genellemedir. Diğer bir ifade ile bu öğrencilere göre her sonsuz küme denktir.

Kavram yanılgılarının ispat sürecine etkileri farklı örnekler ile gözlenebilmektedir. Örneğin, bu kümelerin denk olduğunu ifade eden bazı öğrencilerin de kartezyen çarpım kavramı ile ilgili kavram yanılgısına sahip oldukları gözlenmiştir. Bu kategoride yer alan öğrencilerin $\mathbb{Z}^2$ kümesini $\mathbb{Z}^2 = \{1,4,9,16, \ldots\} = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ kabul ettikleri ve $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z}^2$ kümeleri arasında $f(x)=x^2$ kuralı ile bir fonksiyon tanımlayarak denkliği ifade ettikleri gözlenmiştir. Ancak öğrencilerin yaklaşımları açıkça yanılgı içerdiğinden hatalıdır.

Kavram yanılgılarına farklı örnekler vermek de mümkündür. Örneğin kümelerin denk olduğunu ifade eden bazı öğrenciler de $\mathbb{N}^2$ kümesini $\mathbb{Z}^2$ kümesi ile özdeş kabul etmişlerdir.

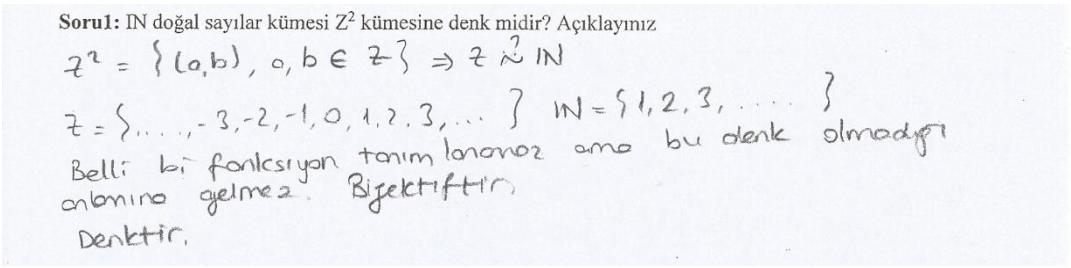
Bu yaklaşımı kullanan öğrencilerden birinin kullanmış olduğu ispat yaklaşımı aşağıda sunulmuştur.



Sunulan yanılgının temel sebebi $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$ denkliğini $\mathbb{N}=\mathbb{Z}$ şeklinde yorumlamaları olabilir. Başka bir ifade ile öğrenciler yanlış tercüme ile kavramları birbirleri yerine kullandıkları için $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}^2$ ispatından hareketle $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}^2$ sonucuna ulaştıklarını varsaymışlardır. $\mathbb{N}\sim\ \mathbb{Z}^2$ sonucu doğru olsa da bir yanılgı barındırdığından bu ispat yeterli kabul edilemez.

Diğer yandan, $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z}^2$ kümelerinin denk olduğunu göstermek isteyen bazı öğrenciler de birebir-örten (bijektif) eşleme fikrinden yararlanmak istemişlerdir. Bu yaklaşımı kullanan öğrencilerden bazıları uygun ispatı oluşturabilirken bazıları da uygun bir ispat oluşturamamışlardır.

Bijektif eşleme fikri ile uygun bir eşleme oluşturamayan öğrencilerin yaklaşımları ilginçtir. Çünkü bu öğrenciler, iki küme arasında bijektif bir eşleme tanımlayamasalar da kümelerin denk olduğunu ifade etmişlerdir. Bijektif eşleme fikrini kullanan ancak uygun bir eşleme üretemeyen bu öğrencilerden bazılarının verdikleri cevaplar örnek olarak aşağıda sunulmuştur.

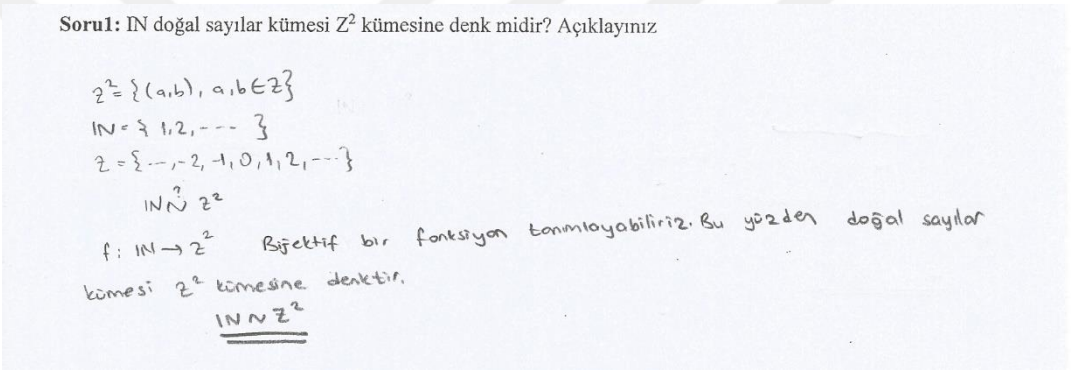

Soru1: IN doğal sayılar kümesi Z^2 kümesine denk midir? Açıklayınız

$Z^2 = \{(a,b), a,b \in Z\} \Rightarrow Z \stackrel{?}{\sim} IN$

$Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ $IN = \{1,2,3,\ldots\}$

Belli bi fonksiyon tanımlanamaz ama bu denk olmadığı anlamına gelmez. Bijektiftir.

Denktir.


Soru1: IN doğal sayılar kümesi Z^2 kümesine denk midir? Açıklayınız

$Z^2 = \{(a,b), a,b \in Z\}$

$IN = \{1,2,\ldots\}$

$Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$

$IN \stackrel{?}{\sim} Z^2$

$f: IN \to Z^2$ Bijektif bir fonksiyon tanımlayabiliriz. Bu yüzden doğal sayılar kümesi Z^2 kümesine denktir.

$IN \sim Z^2$

Bu öğrencilerin, mevcut duruma sezgisel bir çerçeveden yaklaştıkları söylenebilir. Çünkü öne sürdükleri yaklaşıma göre iki kümenin denk olması için aralarında bijektif bir fonksiyon tanımlanmalıdır. Ancak bu bireyler uygun bir eşleme tanımlamasalar da kümelerin denk olduğunu ifade etmişlerdir. Bu tarz yaklaşımlar birer varsayımdır ve formal açıdan bir ispat olarak değerlendirilemez. Çünkü elde edilen hükmü destekleyecek herhangi bir delil yoktur. Bu noktada, öğrencileri hükme götüren onların (*çeşitli*) ön kabulleri olabilir. Örneğin, her sonsuz kümenin denk olduğu düşüncesi üstü kapalı da olsa bu noktada bireylerin düşünme biçimleri üzerinde etkili olmuş olabilir. Benzer olarak, $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$ ilişkisinin $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}^2$ şeklinde genellenmiş olma olasılığı da söz konusudur. Bu tarz örnekler çeşitlendirilebilir. Ancak bu düşünme biçimlerinin ortak noktası, bireyi düşünme sürecinin en başında etkilemeleri ve onu daha en baştan bir sonuca yönlendirmeleridir. Burada olduğu gibi bireylerin herhangi bir delil üretmeksizin

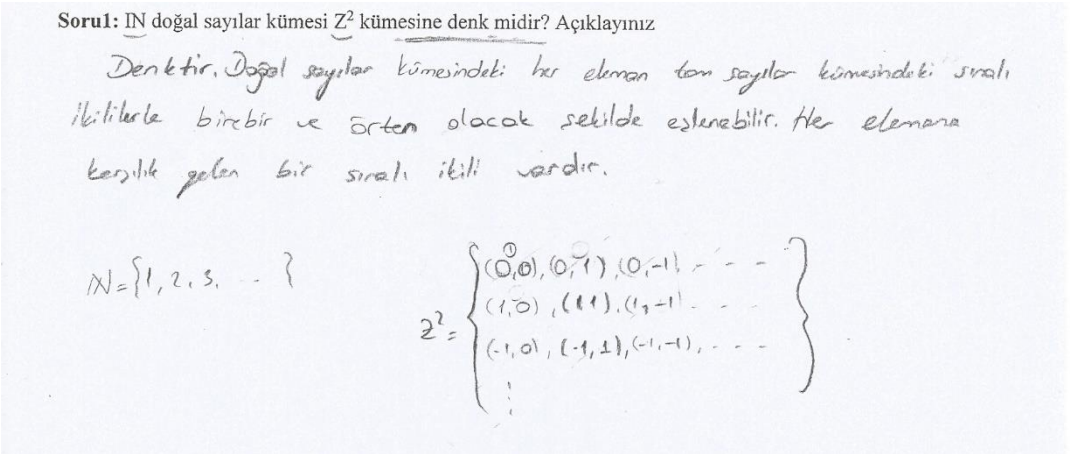
geçerli kabul ettiği bu sonuçların, onların durumu belirli kabuller çerçevesinde ve kısıtlı bir anlayışa indirgeyerek ele almalarından kaynaklandığı söylenebilir.

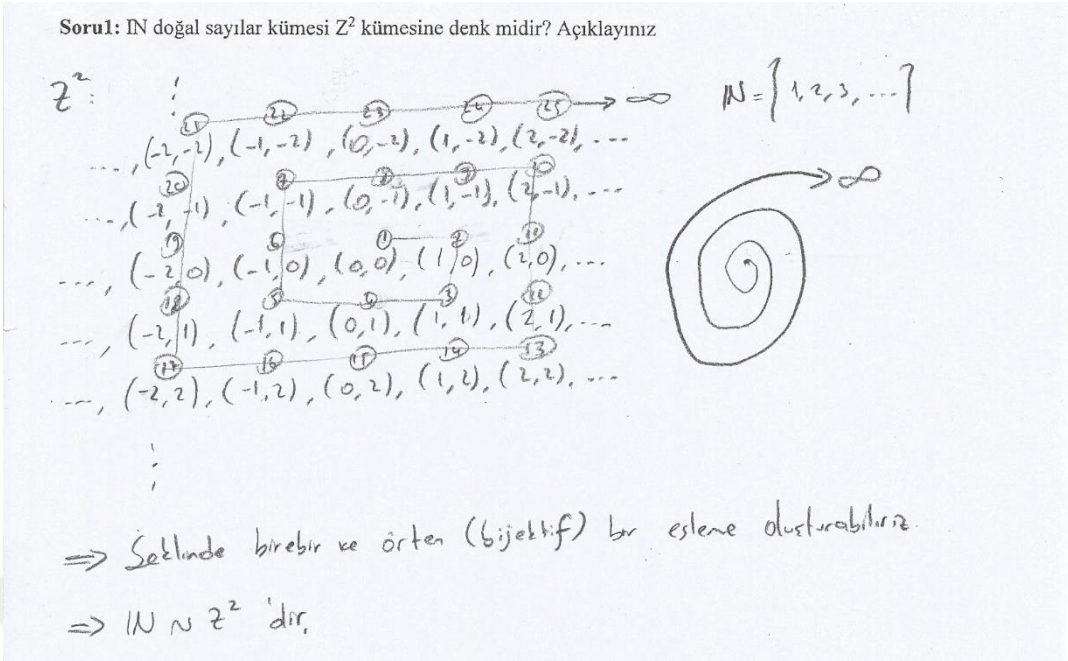
Yapılan ders içi gözlem süreçlerinde de benzere rastlanmıştır. Örneğin, $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{N}^2$ kümelerinin denkliğinin tartışıldığı bir noktada öğrencilerden biri söz alarak aşağıdaki yaklaşımı önermiştir.

'' *$\mathbb{N}^2$ kümesinin birinci elemanı ile $\mathbb{N}$ kümesinin birinci elemanının eşlenebilir, sonrasında ikinci elemanlar eşlenebilir ve böylece devam edilebilir. Dolayısı ile bu kümeler denktir.* ''

Görüldüğü gibi öğrenci, her iki kümenin uygun bir şekilde sıralanarak eşlenebileceğini ifade etmektedir. Ancak eşlemenin izah edilebilirliği ile ilgili herhangi bir açıklaması yoktur. Mesela, $\mathbb{N}^2$ kümesinin ilk elemanının hangi ikili olduğu bu açıklamada belirsizdir. Öğrenci kümelerin denkliğinin gösterilebilmesi için bir eşleme tanımlanması gerektiğini ifade etmiş ancak bu eşlemeyi izah etmeksizin kümelerin denk olduğu sonucuna ulaşmıştır. Dolayısı ile sunduğu yaklaşım yetersizdir. Bir önceki kategori için sunulan açıklamalar bu örnek için de geçerlidir.

Diğer yandan bijektif eşleme fikrinin kullanılabileceğini belirten öğrencilerden bir kısmı da uygun eşlemeleri üretebilmişlerdir. Bu öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlardan bazıları aşağıda örnek olarak sunulmuştur.



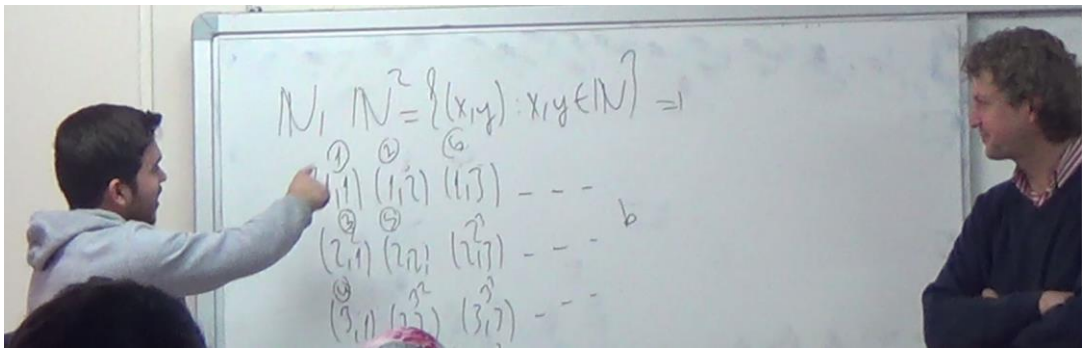


Örneğin sunulan ilk örnekteki yaklaşımı kullanan birey, $\mathbb{Z}^2$ kümesini düzenli bir şekilde sıralayarak köşegensel eşlemenin olabileceğini ifade etmiştir. İkinci örnekteki yaklaşımı kullanan birey de $\mathbb{Z}^2$ kümesini belirli bir noktadan başlayarak doğal sayılara eşleyecek bir yöntem önermiştir.

Bu noktada öğrenciler tarafından kullanılan izah edilebilir eşleme yöntemi ile ders içi gözlemlerde de karşılaşılmıştır. Örneğin $\mathbb{N}$ kümesi ile $\mathbb{N}^2$ kümesinin denk olduğunu ifade eden bir öğrenci $\mathbb{N}^2$ kümesini uygun bir şekilde sıralayarak doğal sayılara eşleyebilmiştir.

Şekil 9

$\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^2$ olduğunu göstermek için söz alan öğrencinin yaklaşımı

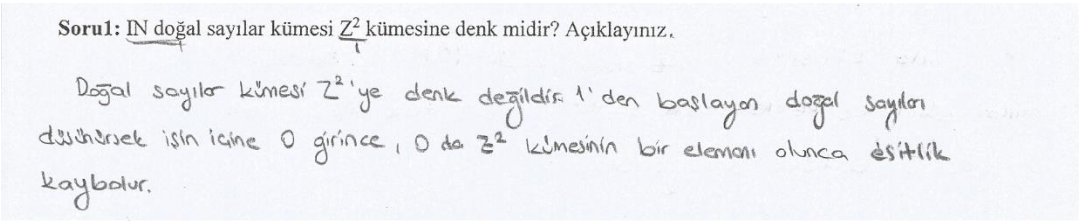


Söz alarak tahtaya kalan bu öğrenci sıralı ikililerin doğal sayılara yuvarlaklar içerisinde belirtilen numara sırası ile (*köşegen boyunca hizalama*) eşlenebileceğini ifade etmiştir. Bu bireylerin denkliğin temel felsefesini ve bijektif eşleme yaklaşımını etkin bir şekilde kullandıkları sonucuna ulaşılabilir.

ii. Kümelerin Denk Olmadığını Belirtenler:

Genel Uygulama (II) formunda yer alan birinci soruya cevap veren öğrencilerin büyük bir kısmı $\mathbb{N}$ kümesinin $\mathbb{Z}^2$ kümesine denk olduğunu ifade etmişlerdir. Diğer yandan, bu kümelerin denk olmadığını belirten öğrenciler de olmuştur. Bu kategori altında sunulacak alan bireylerin Cantor tarafından ortaya konan birebir-örten eşleme yaklaşımını etkin bir şekilde kullanamadıkları söylenebilir.

İki kümenin denk olmadığını ifade eden öğrencilerin büyük çoğunluğu $\mathbb{Z}^2$ kümesinin $\mathbb{N}$ kümesinden daha çok eleman içerdiğini belirtmişlerdir. Bu öğrencilerin de (*önceden rastlandığı gibi*) kümeler arasında azlık-çokluk ilişkisi kurarak yanılgıya düştükleri söylenebilir. Çünkü bu bireylerin yaklaşımları, daha önce de açıklandığı gibi formal bir delile dayanmaz ve sezgisel kabulleri temel alır. Dolayısı ile ulaşılan sonuç bir varsayım olarak değerlendirilebilir. Bu açıklamaları yapan öğrencilerin Cantor tarafından ortaya konan birebir-örten eşleme fikrini yeterince anlamlandıramadıkları sonucuna ulaşılabilir.

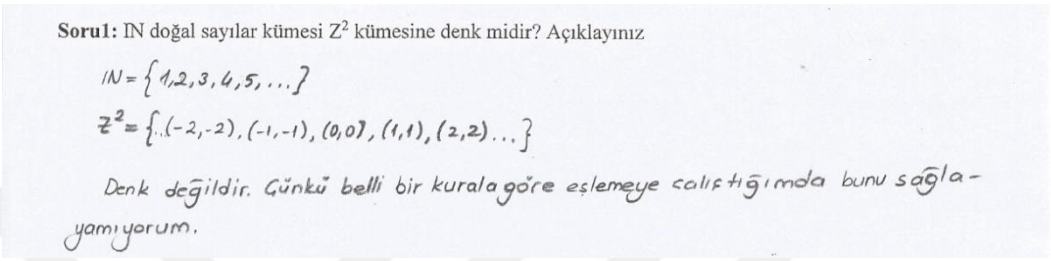

Soru1: IN doğal sayılar kümesi Z^2 kümesine denk midir? Açıklayınız.

Doğal sayılar kümesi Z^2'ye denk değildir. 1'den başlayan doğal sayıları düşünürsek işin içine 0 girince, 0 da Z^2 kümesinin bir elemanı olunca eşitlik kaybolur.

Bu örnekte de görüldüğü gibi öğrenci $\mathbb{N}$x$\mathbb{N}$ kümesinin daha büyük boyutlu olduğunu söyleyerek iki küme arasında bir eşleme yapılamayacağını ifade etmiştir. Yukarıdaki kategori için sunulan açıklama bu örnek durum için de geçerlidir. Öğrenci birebir-örten eşleme fikrini kullanmayı düşünse de sahip olduğu yanılgı nedeni ile uygun sonuca ulaşamamıştır. Dolayısı ile bu alt kategorideki öğrencilerin

ispatın başlangıcında uygun bir yöntem seçmelerine rağmen kavramsal ve yöntemsel açıdan yetersiz kaldıkları ve yanlış bir sonuca ulaştıkları söylenebilir.

Diğer yandan bazı öğrenciler de $\mathbb{N}$ kümesi ile $\mathbb{Z}^2$ kümesi arasında birebir-örten bir eşleme tanımlanamayacağını belirterek bu kümelerin denk olamayacağı sonucuna ulaşmışlardır. Bu alt kategoriye ait örnek cevaplardan biri aşağıda sunulmuştur.


Soru1: IN doğal sayılar kümesi Z^2 kümesine denk midir? Açıklayınız

$IN = \{1,2,3,4,5,\ldots\}$

$Z^2 = \{\ldots(-2,-2),(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2)\ldots\}$

Denk değildir. Çünkü belli bir kurala göre eşlemeye çalıştığımda bunu sağlayamıyorum.

Bu öğrenciler doğrudan azlık-çokluk ilişkisi kurmamışlardır. İki kümenin denkliğinin bijektif bir eşleme ile gösterilmesi gerektiğinin farkındadırlar. Ancak uygun bir eşlemeyi üretemedikleri için yanılgıya düşmüş ve kümelerin denk olmadığını ifade etmişlerdir. Ancak yaklaşımları hatalıdır. Çünkü daha önce de belirtildiği gibi iki kümenin denk olmadığını göstermek için aralarında hiçbir bijektif eşleme yapılamayacağını göstermek gerekir. Bu noktada sınırlı denemeden hareketle kümelerin denk olmayacağını söylemek yeterli olmayacaktır. Ders içi gözlemler sırasında da bu kategoridekine benzer yaklaşımlar ile karşılaşılmıştır. Öğretim elemanı sınıfa $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ kümesinin denk olup olamayacağı sorusunu yönelttiğinde söz alan öğrencilerden biri ile aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir.

Tablo 7

Sınıf İçi Diyalog (3)

Öğrenci	Denk olduğunu göstermek için elemanlar eşlemek gerek. Bir fonksiyon gerek.
Öğretim Elemanı	Yani denk olduğunu mu söylüyorsun?
Öğrenci	Boyutları farklı.
Öğretim Elemanı	Neyi kastettiğini açıklar mısın?
Öğrenci	Birini iki boyutlu diğerini bir boyutlu olarak düşünürsek eleman sayıları eşit olamaz. Bunları eşleyemeyiz. Denk değildir.

2.Soruya verilen cevaplar ve analizi

Genel Uygulama II formunun ikinci sorusuna verilen yanıtlar üzerinde yapılan içerik analizi sonucu elde edilen kategoriler ve alt kategorilere ait özet tablo aşağıda sunulmuştur.

Tablo 8

Genel Uygulama II - İkinci soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar

Soru: ℝ, gerçel sayılar kümesi (0,1) aralığına denk midir?	**Kişi Sayısı**
Denk olabileceğini belirtenler	**78**
i. Sadece ‘’denk olabilir’’ cevabını yazanlar.	3
ii. Her iki kümenin sonsuzluğundan hareketle denk olduklarını belirtenler.	25
iii. Açık aralıkların denkliğini genelleyenler.	10
iv. Perspektif çizimlerinde yanılgıya düşenler.	26
v. İki kümenin denk olduğunu düşünüp bu denkliği uygun biçimde gösteremeyenler.	9
vi. Kümelerin denk olduğunu birebir örten eşleme ile gösterebilenler.	5
Soruya cevap vermeyenler	**1**
Denk olamayacağını belirtenler	**20**
i. Sadece ‘’denk değil’’ açıklamasını yapanlar.	4
ii. ℝ kümesinde daha fazla eleman olduğu için denk olamayacağını belirtenler.	5
iii. ℝ kümesinin sınırlı bir kümeye denk olamayacağını ifade edenler.	6
iii. İki küme arasında birebir ve örten bir eşleme tanımlanamayacağını söyleyenler.	6
Toplam	**99**

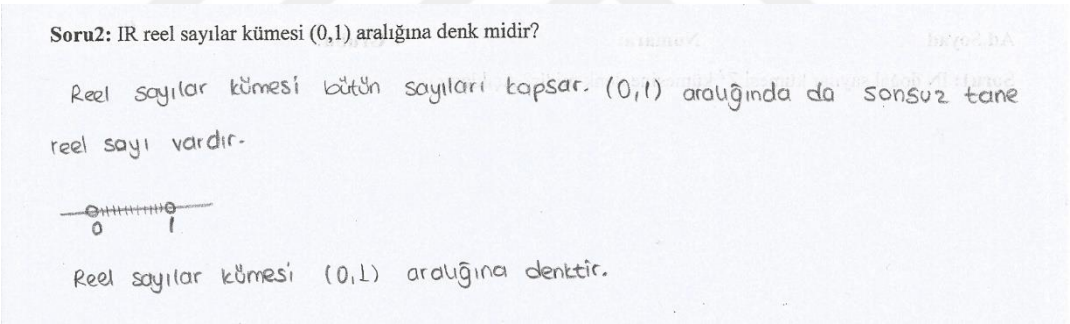
Bu soru ile öğrencilerin sonlu bir kümenin sınırlı bir kümeye denk olup olamayacağını belirlemeleri istenmiştir. Böylece öğrencilerin iki kavram arasında nasıl bir ilişki kurdukları belirlenmeye çalışılmıştır. Bu sorudan elde edilen cevaplar üzerine içerik analizi uygulanmış ve elde edilen kategoriler aşağıda sunulmuştur.

i. Kümelerin Denk Olduklarını Belirtenler:

Çalışmaya katılan öğrencilerin büyük çoğunluğu ℝ, gerçel sayılar kümesinin (0,1) aralığına denk olduğunu belirtmişlerdir. Bu sonuca ulaşan öğrencilerin farklı yaklaşımları kullandıkları görülmüştür. Analiz sürecinde tespit edilen bu yaklaşımlar aşağıda sunulmuştur.

İki kümenin denk olduğunu söyleyen öğrencilerden 3 tanesi bu görüşlerini detaylandırmamışlardır. Sadece kümelerin denk olduğunu belirtmişlerdir. Bu bireylerin çeşitli sebeplerle düşüncelerini açıklamaktan çekindikleri ya da gelişigüzel cevap verdikleri söylenebilir.

Diğer yandan önceki soruda olduğu gibi bu soruda da azımsanmayacak sayıdaki öğrenci iki her kümenin sonsuz olmasını denklik için tek başına yeterli bir koşul olarak ifade etmişlerdir. Bu kategoride yer alan öğrencilerden birinin cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.


Soru2: IR reel sayılar kümesi (0,1) aralığına denk midir?

Reel sayılar kümesi bütün sayıları kapsar. (0,1) aralığında da sonsuz tane reel sayı vardır.

0 1

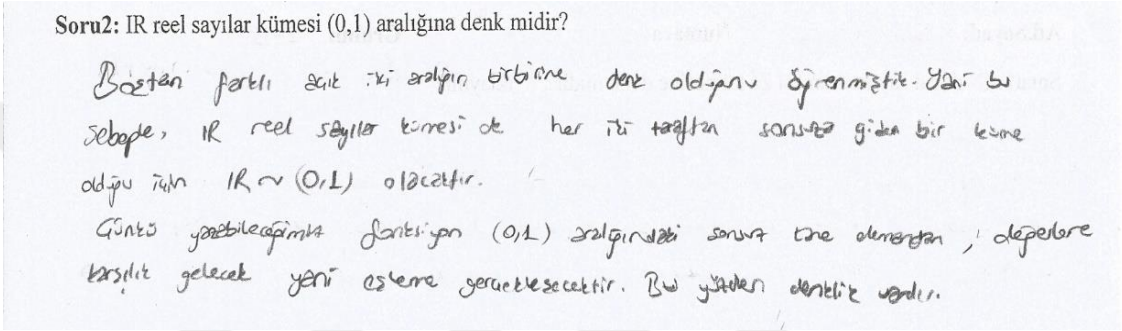
Reel sayılar kümesi (0,1) aralığına denktir.

Daha önce de açıklandığı gibi bu kategorideki öğrenciler Cantor tarafından ortaya konan birebir-örten eşleme fikrini kullanamamaktadırlar. Bu öğrenciler sonsuz kümelerin denkliğine sezgisel olarak yaklaşmaktadırlar. İki kümenin denkliğini delil olmaksızın ifade etmeleri bir kabul olarak nitelendirilebilir. Bir ispat olarak nitelendirilemez. Çünkü formal bir ispatta her bir sonuç bir argüman ile desteklenmelidir. Formal bir ispatta, hükmün sadece doğruluğunun değil, neden doğru olduğunun da izah edilebilmesi beklenir. Dolayısı ile öğrencilerin ulaştıkları sonuç doğru olsa da yaklaşımları (*formal*) bir ispat olarak kabul edilmez.

Diğer yandan, kümelerin denk olduğunu ifade eden bazı öğrenciler daha önce öğrendikleri aşağıdaki teoremden yararlanmak istemişlerdir.

‘’*Gerçel sayılar kümesinin, alt kümesi olarak açık aralıklar birbirlerine denktir*.‘’

Ancak bu öğrencilerin yaklaşımı da bir yanılgı içermektedir. Çünkü bu öğrenciler gerçel sayılar kümesini $\mathbb{R}$= (-∞,∞) şeklinde ifade ederek bu kümenin (0,1) aralığına denk olması gerektiğini belirtmişlerdir. Bu öğrencilerden birinin yapmış olduğu açıklamalar örnek olarak aşağıda sunulmuştur.


Soru2: IR reel sayılar kümesi (0,1) aralığına denk midir?

Bazıtan farklı açık iki aralığın birbirine denk olduğunu öğrenmiştik. Yani bu sebeple, IR reel sayılar kümesi de her iki taraftan sonsuza giden bir kesme olduğu için IR ~ (0,1) olacaktır.

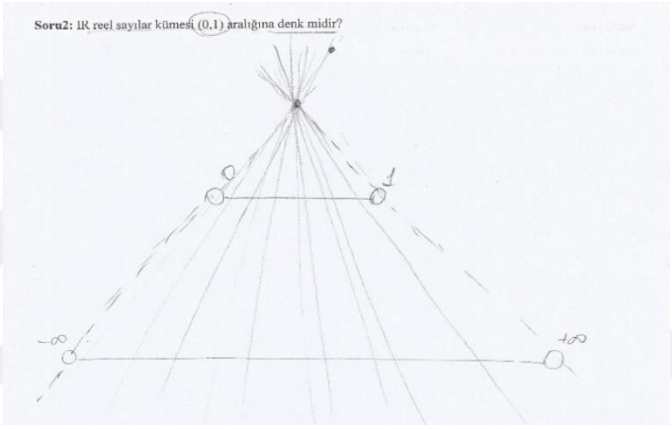
Çünkü yapabileceğimiz fonksiyon (0,1) aralığındaki sonsuz tane elemanları, değerlere karşılık gelecek yeni eşlemeler gerçekleşecektir. Bu yüzden denklik vardır.

Bu öğrencilerin ulaştıkları sonuç doğru olsa da yaklaşımları matematiksel açıdan yeterli kabul edilemez. Çünkü sunulan iki küme arasındaki eşlemenin niteliği ortaya konmamıştır. Örneğin (0,1) aralığında yer alan $\frac{1}{2}$ elemanın hangi gerçel sayı ile eşlenebileceği sorusuna yanıt verilmemiştir. Başka bir ifade ile bijektif olduğu kanıtlanmış izah edilebilir bir eşleme sunulmamıştır. Bu öğrencilerin, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesine $\mp\infty$ elemanlarını da ekleyerek elde ettikleri genişletilmiş gerçel sayılar kümesini sınırlı bir küme olarak ele aldıkları soncuna ulaşılabilir. Bu kümeyi sınırlı kabul ettikleri için herhangi bir açık aralığa denk olması gerektiğini varsaymış olabilirler. Ancak $\mathbb{R}$ = (-∞,∞) ve (0,1) kümelerinin denkliğini anlamayı sağlayabilecek formal bir argüman ortaya koyamamışlardır. Sadece bir teoremden hareketle oluşturdukları sezgisel argümanlar ile her iki kümenin denk olması gerektiğini ifade etmişlerdir.

Diğer yandan bazı öğrenciler de bir odak noktasından geçen perspektif çizimleri ile bu kümelerin denkliğini (*geometrik olarak*) göstermeye çalışmışlardır. Bu yönteme göre $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin alt kümesi olan açık (veya kapalı) aralıkların birbirlerine denkliği bir odak noktasından çizilen ışınlar ile oluşturulan

geometrik bir yaklaşım ile gösterilebilir. Bu alt kategoride yer alan öğrenciler (0,1) aralığını sınırlı bir aralık olarak gösterdikleri gibi ℝ, gerçel sayılar kümesini de (0,1) aralığından daha büyük ancak sınırlı bir aralık olarak göstermişlerdir. Denkliğin, bu iki doğru parçası arasındaki geometrik çizim ile gösterilebileceğini belirtmişlerdir. Ancak bu öğrencilerin, oluşturdukları çizimlerde ℝ, gerçel sayılar kümesini sınırlı bir küme olarak kabul ettikleri ve bu nedenle formal bir ispata ulaşamadıkları söylenebilir.

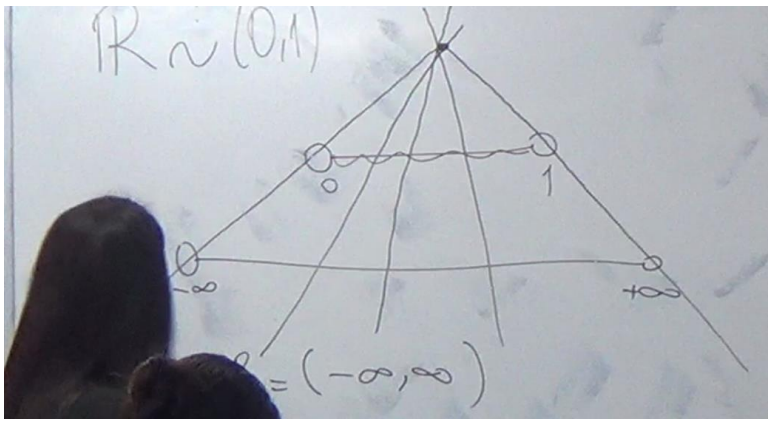
Bu kategoride yer alan öğrencilerden birinin yaptığı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



Benzer örnekler ile gözlemler sırasında da karşılaşılmıştır. Derste, iki kümenin denkliği üzerine yapılan tartışma esnasında öğrencilerden biri tahtaya kalkarak (*aşağıdaki*) benzer çizimi oluşturmuştur.

Şekil 10

Ders içerisinde gözlenen perspektif (odak) çizimi yaklaşımı



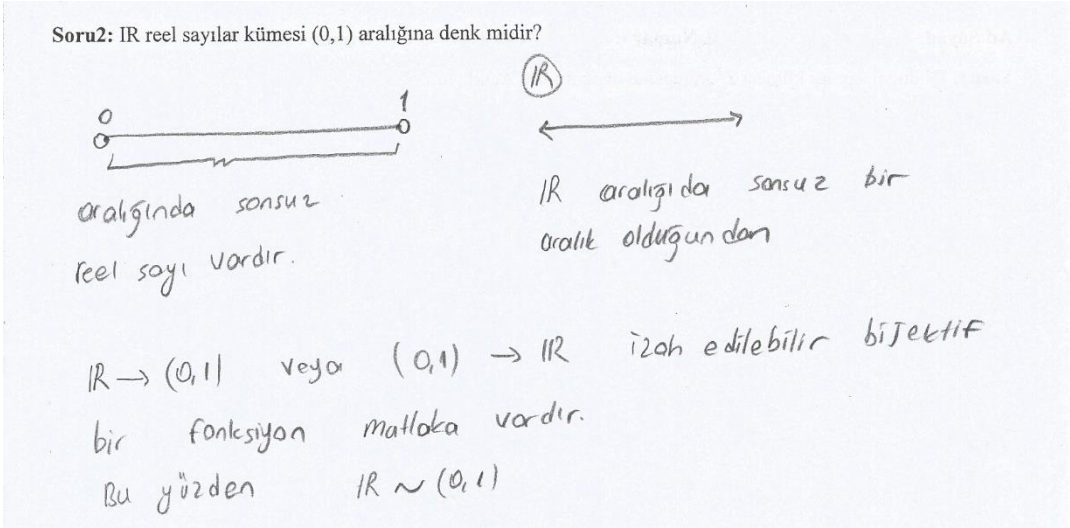
Bu alt kategori bağlamında ulaşılan sonuçlar doğru olsa yeterli kabul edilmemiştir. Çükü ℝ, gerçel sayılar kümesi sınırlı bir küme değildir. Dolayısı ile sınırlı aralıklar ile temsil edilmesi de bir kavram yanılgısı içermektedir.

Genel Uygulama II formunun birinci sorusunda olduğu gibi bu soruda da bazı öğrenciler, kümeler arasında uygun bir (*bijektif*) fonksiyon tanımlanabileceğini belirterek bunların denk olduğunu ifade etmişlerdir. Ancak birebir-örten eşleme yaklaşımını kullanmak isteyen bu öğrencilerin tamamı formal bir ispata ulaşamamışlardır.

Bu fikri benimseyen ancak formal ispata ulaşamayan öğrencilerin yaklaşımları üç alt kategoriye ayrılabilir.

- (0,1) aralığı ve ℝ, gerçel sayılar kümesi arasında bir fonksiyon tanımlamaya çalışsalar da başarılı olamayıp bu çabadan vazgeçenler.
- Uygun iki küme arasında olmayan eşlemeler üretenler.
- (0,1) aralığı ve ℝ, gerçel sayılar kümesi arasında uygun bir fonksiyon tanımlanabileceğini söyledikleri halde böyle bir çabaya girişmeyenler.

Bu öğrencilerden birinin vermiş olduğu cevap, örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



Örnekten de görüldüğü gibi öğrenci, iki küme arasında bijektif bir eşleme yapılabileceğini ifade etse de bu eşlemeyi üretmek için herhangi bir çabada

bulunmamıştır. Diğer yandan izah edilebilir bir eşleme ortaya koymadığı halde kümelerin denklini ifade etmiştir.

Bir eşleme üretmeden kümelerin denkliğini ifade eden öğrencilerin, sezgisel yaklaşım ile kümelerin denkliğini varsaydıkları söylenebilir. Çünkü bu yaklaşıma sahip bireyler bir hipotez üretmiş, sezgisel bir varsayım ile bunu doğru kabul ederek hükme ulaşmışlardır. Diğer yandan yaklaşımlarını destekleyecek herhangi bir (formal) delil üretememişlerdir. Başka bir ifade ile hipotez ile hüküm arasındaki bağlayıcı adımlar/deliller bu süreçte ortaya konmamıştır. Dolayısı ile bu tarz yaklaşımlar formal açıdan bir ispat olarak değerlendirilemez. Formal bir ispatın iki yönü vardır. Birincisi iddianın neden doğru olduğunu gösteren mantıksal bir yaklaşım, ikincisi de bu yaklaşımı açıklayan uygun matematiksel bir dildir. Bu alt kategori her iki bileşeni de tam olarak içermemektedir.

Bu alt kategoride sunulanlara benzer yaklaşımlar ile ders içi gözlemlerde de karşılaşılmıştır. Aynı kümelerin denkliği üzerine yapılan ders içi tartışmada söz alan bir öğrenci özgün bir yaklaşım ile (0,1) aralığının ve $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin çember şeklinde gösterilmesi ile sonuca ulaşılabileceğini belirtmiştir. Bu görüşünü detaylandırması için tahtaya davet edildiğinde aşağıdaki çizimi oluşturmuştur.

Şekil 11

Ders içerisinde gözlenen çember yaklaşımı

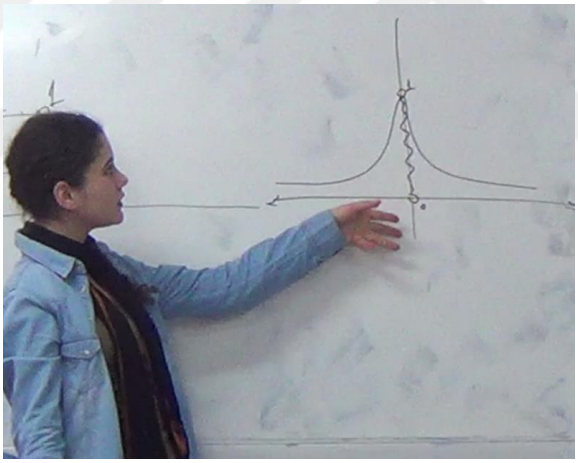


Bu öğrencinin yaklaşımına göre (0,1) aralığının bükülmesi ile yarıçapı sonlu olan bir çember ve $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesini oluşturan sayı doğrusunun (*tamamının*) bükülmesi ile yarıçapı sonsuz olan eş merkezli çember elde edilebilir. Ayrıca ortak merkezden geçen her doğru parçası (0,1) aralığındaki bir noktayı gerçel sayılardaki tek bir noktaya eşlemektedir. Öğrencinin yaklaşımı orijinal olsa da sonsuz uzunlukta sayı doğrusunu sonlu kabul ederek çizimi oluşturduğu görülmektedir. Dolayısı ile uygun bir yaklaşım değildir.

Diğer yandan, bu yaklaşıma ek olarak söz alan başka bir öğrenci de koordinat sisteminde grafiksel bir yaklaşım kullanarak denkliği gösterebileceğini ifade etmiş ve aşağıdaki çizimi oluşturmuştur.

Şekil 12

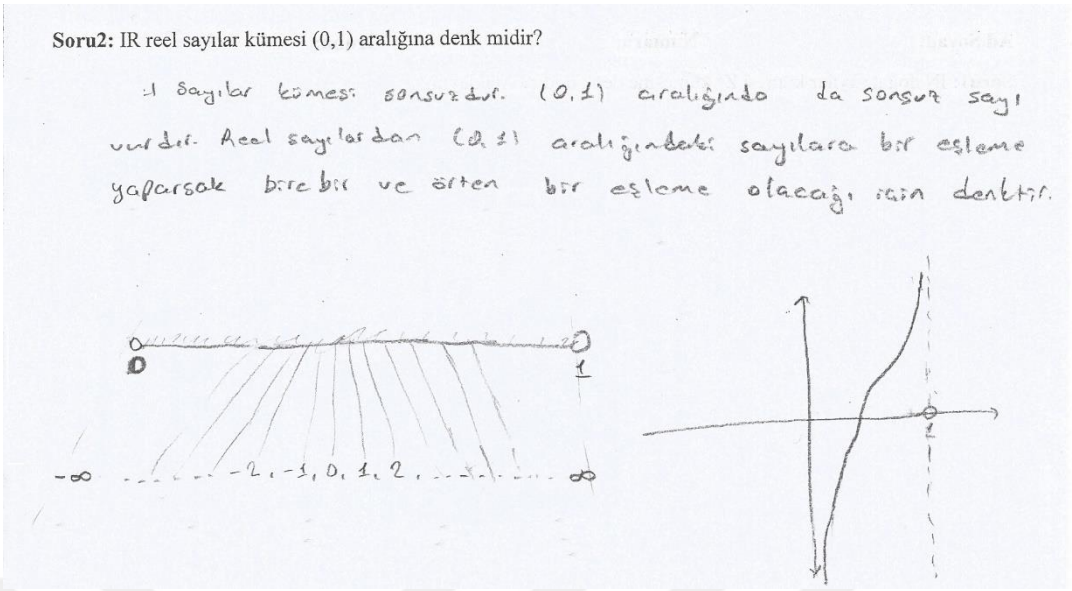
(0,1) ve $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi arasında (*birebir olmayan*) grafiksel yaklaşım



Bu öğrencinin yaklaşımı uygun olsa da formal ispat için yeterli değildir. Çünkü oluşturulan grafik birebir değildir. Dolayısı ile öğrenci bijektif olmayan bir eşleme ile denkliği gösterme çabasına girişmiştir.

Kümelerin denk olduğunu ifade eden öğrencilerden bazıları da bu denkliği uygun bir eşlemeler oluşturarak gösterebilmişlerdir. Bu öğrencilerin tamamı kurallı bir fonksiyon oluşturmak yerine izah edilebilir bir (*grafiksel*) eşleme oluşturmuşlardır.

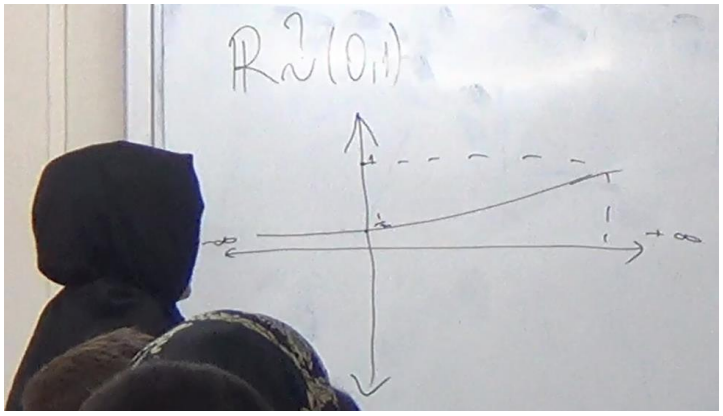
Bu öğrencilerden birinin oluşturduğu yaklaşım örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



Bu alt kategoride sunulanlara benzer yaklaşımlar ile ders içi gözlemlerde de karşılaşılmıştır. Aynı kümelerin denkliği üzerine yapılan ders içi tartışmada söz alan bir öğrenci aşağıdaki grafiği oluşturarak kümelerin denk olduğunu ifade etmiştir.

Şekil 13

(0,1) ve ℝ, gerçel sayılar kümesi arasında oluşturulan (*bijektif*) yaklaşım

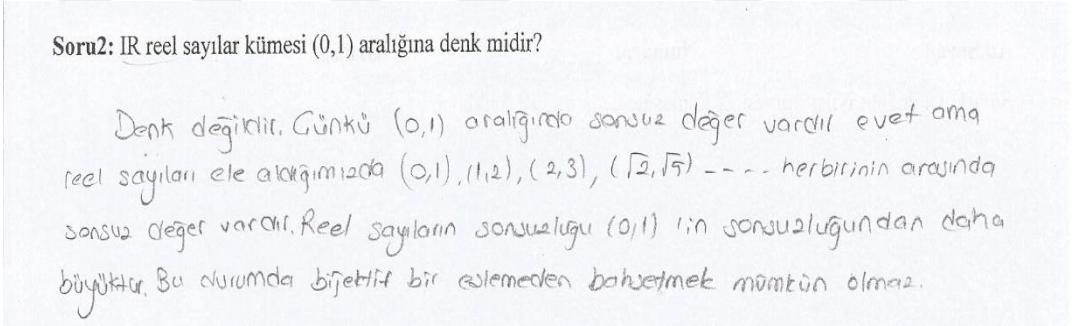


Bu kategoride yer alan öğrencilerin Cantor tarafından ortaya konan birebir eşleme fikrini bu soru için uygun bir çerçevede kullandıkları sonucuna ulaşılabilir.

ii. Kümelerin Denk Olmadığını Belirtenler:

Bu soruya yanıt veren öğrencilerin büyük bir kısmı, kümelerin birbirine denk olduğunu belirtmişlerdir. Diğer yandan az sayıdaki öğrenci kümelerin denk olmadığı sonucuna ulaşmıştır. Kümelerin denk olamayacağını ifade eden öğrencilerden 4 tanesi bu görüşlerini detaylandırmamışlardır.

Diğer yandan 5 öğrenci de $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin (0,1) kümesinden daha büyük bir küme olduğunu ifade etmişlerdir. Bu öğrencilere göre (0,1) kümesi $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin bir öz alt kümesi olduğundan bu kümeye denk olamaz. Bu yaklaşımı benimseyen öğrencilerin, gerçek yaşam deneyimlerine dayalı *parça-bütün ilişkisine* odaklanarak yanılgıya düştükleri söylenebilir. Çünkü bu yaklaşımı benimseyen öğrenciler (*sonlu kümelerde olduğu gibi*) bütünün parçadan daha büyük olması gerektiğini düşünmektedirler. Dolayısı ile bu öğrencilerin düşünme biçimlerine sonlu kümeler üzerinde edindikleri deneyimlerinin ve gerçek yaşama dayanan sezgilerinin etkisi olduğu söylenebilir. Bu kategoride yer alan öğrencilerden birinin vermiş olduğu cevap örnek olarak aşağıda sunulmuştur.


Soru2: IR reel sayılar kümesi (0,1) aralığına denk midir?

Denk değildir. Çünkü (0,1) aralığında sonsuz değer vardır evet ama reel sayıları ele aldığımızda (0,1), (1,2), (2,3), ($\sqrt{2}$,$\sqrt{5}$) ---- herbirinin arasında sonsuz değer vardır. Reel sayıların sonsuzluğu (0,1) in sonsuzluğundan daha büyüktür. Bu durumda birebir bir eşlemeden bahsetmek mümkün olmaz.

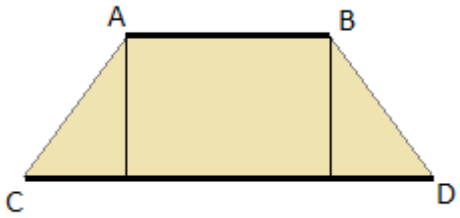
Yapılan ders içi gözlemlerde de benzer yanılgılar ile karşılaşılmıştır. Örneğin, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi ve (0,1) kümelerinin denkliği üzerine yapılan tartışmada bir öğrenci aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

‘’*Biz ispat yaparken her seferinde parçaların sonsuzluğuna iniyoruz. Aksini yapıp yukardan baksak… Mesela 0 ile 1 arasında yer alan sayıları 1 parça kabul edersek reel sayılarda bunun gibi sonsuz tane vardır. Yani, bu küme sonsuz bir küme ise reel sayılar kümesinde bu sonsuz kümeden sonsuz tane vardır. O yüzden bu kümeler denk olamazlar.*’’

Bu öğrencinin, Tall (1980) tarafından belirtilen sonsuzluğu ölçme anlayışına sahip olduğu söylenebilir.

Şekil 14

Kardinaliteleri eşit doğru parçaları



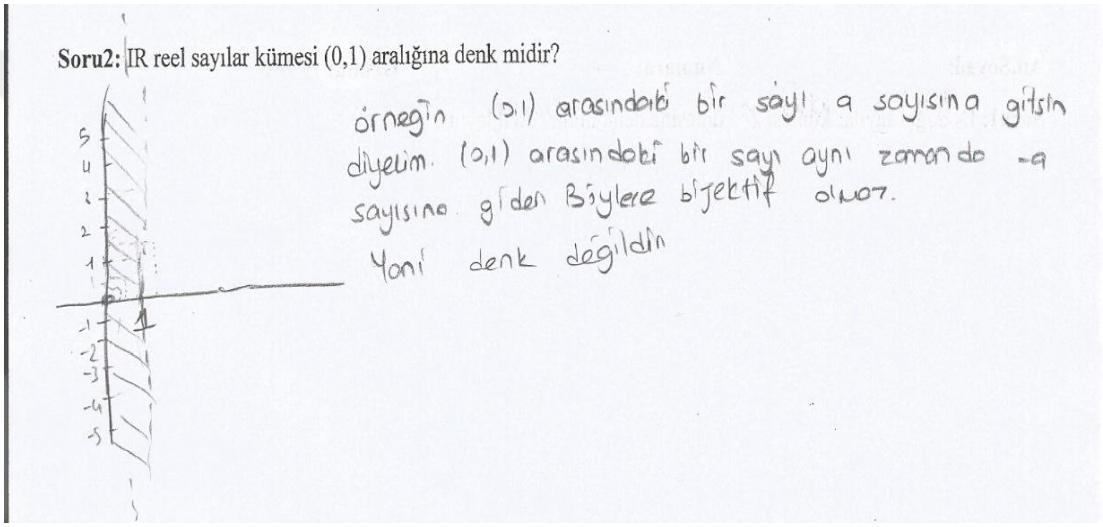
Sonsuzluğu ölçme yanılgısına göre A ve B noktalarını birleştiren doğru parçasının, C ve D noktalarını birleştiren doğru parçasından daha kısa olduğu referans alınır ve bu doğru parçaları üzerinde yer alan noktaların sayısının eşit olamayacağı sonucuna ulaşılır. Diğer yandan Cantor tarafından ortaya konan kardinalite yaklaşımına göre her iki doğru parçası üzerindeki nokta sayıları eşittir. Çünkü [AB] üzerindeki her nokta, [CD] üzerindeki bir ve yalnız bir nokta ile eşlenir.

Kümelerin denk olamayacağı sonucuna ulaşan bazı öğrenciler de sınırlılık/sınırsızlık kavramlarını referans almışlardır. Bu öğrenciler, kümelerin eleman sayılarını karşılaştırırken (0,1) kümesinin sınırlı olduğunu belirterek $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesine denk olamayacağını ifade etmişlerdir. Başka bir ifade ile bu öğrencilere göre $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi sınırsız bir küme olduğundan (0,1) aralığından daha büyük olmalıdır. Bu öğrencilerin, sınırlı kümeleri kısıtlı bir çerçevede algılamaya ilişkin yanılgıya sahip oldukları söylenebilir. Çünkü bu öğrenciler, yetersiz anlayışları nedeni ile sınırlı kümelerin sınırsız kümelerden daha küçük olması gerektiğini varsaymışlardır. Bu yanılgının sebebi, sınırlı kavramının sonlu kavramı yerine kullanılıyor olması da olabilir. Başka bir ifade ile öğrenciler sınırlı kümeleri sonlu kabul ediyor olabilirler. Gerçek yaşama dayanan (informal) deneyimler, sınırlı bir kümenin sonlu olacağı algısını bireylerde oluşturuyor olabilir. Dolayısı ile öğrencilerin, bu algıyı sonsuz kümelere doğrudan transfer ederek bir yanılgıya düştükleri sonucuna ulaşılabilir.

Kümelerin denk olamayacağını söyleyen bazı öğrenciler de ℝ, gerçel sayılar kümesi ile (0,1) aralığı arasında uygun bir bijektif fonksiyon tanımlanamayacağını belirterek bu görüşlerini savunmuşlardır.

Bu alt kategoride yer alan öğrenciler, iki kümenin denkliğinin uygun bir (*bijektif*) eşleme ile gösterilmesi gerektiğini açıkça ifade etmişlerdir. Ancak bu ispat sürecinde hatalı eşlemeler üreterek yanılgıya düşmüşlerdir.

Bu yaklaşımı benimseyen bireylerden birinin yaptığı açıklamalar örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



Sunulan yaklaşımı benimseyen öğrenci (0,1) aralığındaki her elemanın (*x=1 doğrusu boyunca)* birden fazla gerçel sayı ile eşleneceğini ifade etmiştir. Buradan hareketle, kümeler arasında tanımlanabilecek hiçbir eşlemenin bijektif olamayacağı sonucuna ulaşmıştır. Bu öğrencinin yaklaşımı, ispat sürecinin doğasına uygun değildir. Bunun nedeni, sonlu sayıda başarısız denemenin ardından ortaya konan kabuldür. Diğer bir ifade ile bu ve benzeri yaklaşımları benimseyen bireyler, ortaya attıkları kabulden hareketle kümeler arasında uygun bir eşleme olabileceği ihtimalini göz ardı etmişlerdir.

Genel Uygulama III ve Analizi

1.Soruya verilen cevaplar ve analizi

Genel Uygulama III formunun ilk sorusuna verilen yanıtlar üzerinde yapılan içerik analizi sonucu elde edilen kategoriler ve alt kategorilere ilişkin özet tablo aşağıda sunulmuştur.

Tablo 9

Genel Uygulama III - Birinci soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar

Soru : ℝ, gerçel sayılar kümesi [0,1] aralığına denk midir?	**Kişi Sayısı**
Denk olabileceğini belirtenler	**55**
i. Sadece *''denk olabilir''* cevabını yazanlar.	3
ii. Her iki kümenin sonsuzluğundan hareketle denk olduklarını belirtenler.	7
iii. Perspektif çizimlerinde yanılgıya düşenler.	10
iv. Grafik çiziminden hareketle sonuca ulaşanlar.	20
v. İki kümenin denk olduğunu düşünüp izah edilebilir bir biçimde gösteremeyenler.	8
vi. $\mathbb{R} \sim [0,1]$ denkliğini geçerli önermeler ile açıklayabilenler.	7
Soruya cevap vermeyenler	**8**
Denk olamayacağını belirtenler	**25**
i. Sadece *''denk değil''* açıklamasını yapanlar.	1
ii. $\mathbb{R}$ kümesinin sınırlı bir kümeye denk olamayacağını söyleyenler.	5
iii. $\mathbb{R}$ ve (0,1) denktir, bu nedenle $\mathbb{R}$ ve [0,1] denk olamaz yorumunu yapanlar.	12
iv. İki küme arasında birebir ve örten bir eşleme tanımlanamayacağını söyleyenler.	7
Toplam	**88**

Genel Uygulama III formu kapsamında öğrencilere yöneltilen ilk soru, öğrencilerin bir önceki uygulamada yanıt bulmaya çalıştıkları $\mathbb{R} \overset{?}{\sim} (0,1)$ sorusuna (*biçimsel*

açıdan) oldukça benzemektedir. Genel Uygulama II kapsamında öğrencilere yöneltilen $\mathbb{R} \overset{?}{\sim} (0,1)$ sorusuna, Mantık dersinin IV haftasında işlenen derste yanıt aranmıştır. Gerçekleştirilen IV. ders kapsamında $\mathbb{R} \sim (0,1)$ denkliği, öğretim elemanının rehberliğinde ortaya konmuştur. Diğer yandan, Genel Uygulama III formunda bireylere yöneltilen yeni soru, benzer ilişkilerin [0,1] kümesi bağlamında ele alınmasını gerektirmektedir. Bu sorunun öğrencilere yöneltilmesindeki iki temel amaç gözetilmiştir.

i. Sonlu sayıdaki elemanın sonsuz kümelerin denkliğine etkisinin, öğrenciler tarafından nasıl yorumladıklarını belirleyebilmek.
ii. Öğrencilerin, önceki haftalarda edindikleri bilgileri bu yeni durum çerçevesinde nasıl ele aldıklarını belirleyebilmek.

Genel Uygulama III kapsamında sunulan bu sorunun formal olarak ispatı Schröder-Bernstein teoremi ile yapılabilmektedir. Ancak ders sürecinde (*mevcut ana kadar*) ilgili teorem öğrencilere sunulmamıştır. Dolayısı ile bu soru ile öğrencilerin belirtilen hususlara ilişkin sezgisel ve informal yaklaşımlarının belirlenmesi öncelikle amaçtır. Bu sorudan elde edilen cevaplar üzerine içerik analizi uygulanmış ve elde edilen kategoriler aşağıda sunulmuştur.

i. Kümelerin Denk Olduklarını Belirtenler:

Çalışmaya katılan öğrencilerin büyük çoğunluğu $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin [0,1] aralığına denk olduğunu belirtmişlerdir. Bu sonuca ulaşan öğrenciler farklı yaklaşımları kullanmışlardır. Bunlar yaklaşımlar aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin [0,1] aralığına denk olduğunu belirten öğrencilerden 3 tanesi bu görüşlerini detaylandırmamışlardır. Bu alt kategoride yer alan bireylerin bu soru için gelişigüzel cevap verdikleri ya da çeşitli sebepler nedeni ile düşüncelerini açıklamaktan çekindikleri söylenebilir.

Bu kümelerin denk olduğunu belirten bazı öğrenciler de her iki kümenin sonsuz sayıda elemana sahip olmasını temel referans noktası olarak belirlemişlerdir.

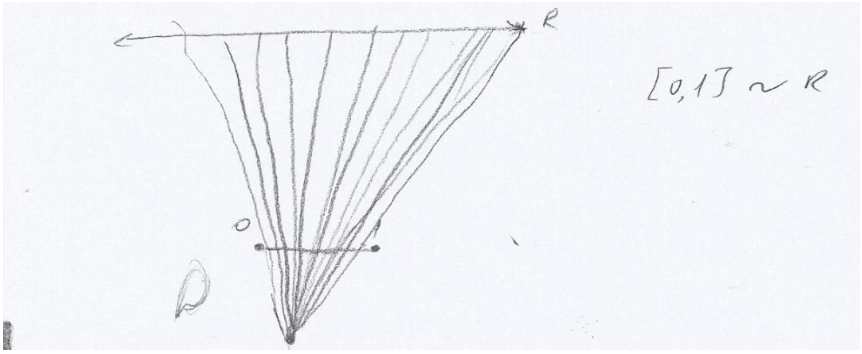
Benzer kategori ile Genel Uygulama I-II formlarının analizinde de karşılaşılmıştır. Dolayısı ile önceki aşamalarda sunulan ayrıntılı açıklamaların bu çalışma için de geçerli olduğu söylenebilir. Bu düşünme biçimine sahip bireylerin, bijektif eşleme fikrinin yeterince kullanamadıkları açıktır. Bunun yerine, elemanları sayma fikrini temel alan tanım çerçevesinde denklik sürecine yaklaştıkları söylenebilir. Diğer yandan sonlu kümelere ait düşünceleri ve sezgisel kabulleri de bu sonuca ulaşmalarına etki etmiş olabilir.

Genel Uygulama III çalışması bağlamında dikkat çeken bir husus, yukarıda belirtilen iki kategoride (*özellikle ikincisinde*) yer alan öğrencilerin sayısının büyük oranda azalma göstermiş olmasıdır. Uygulamanın ilk haftalarında öğrencilerin azımsanmayacak bir kısmının bijektif eşleme fikrini kullanmaksızın, doğrudan sonsuzluğu referans alarak sonuca ulaşmaya çalıştıkları görülmüştür. Diğer yandan Genel Uygulama III formunun analizlerinde bu yaklaşımları kullanan bireylerin sayısında büyük azalma olduğu gözlenmiştir. Bu durum, bireylerin *''sonsuzluğu''* denklik için yeterli bir ölçüt olarak kabul etmekten vazgeçmeye başladıklarının bir göstergesi olarak yorumlanabilir.

Diğer yandan, kümelerin denk olduğunu ifade eden öğrencilerden bazıları da bir önceki hafta sorulan $\mathbb{R} \overset{?}{\sim} (0,1)$ sorusunda olduğu gibi perspektif çiziminden yararlanmak istemişlerdir. Bu öğrencilerin genel olarak iki noktada yanılgıya düştükleri görülmüştür.

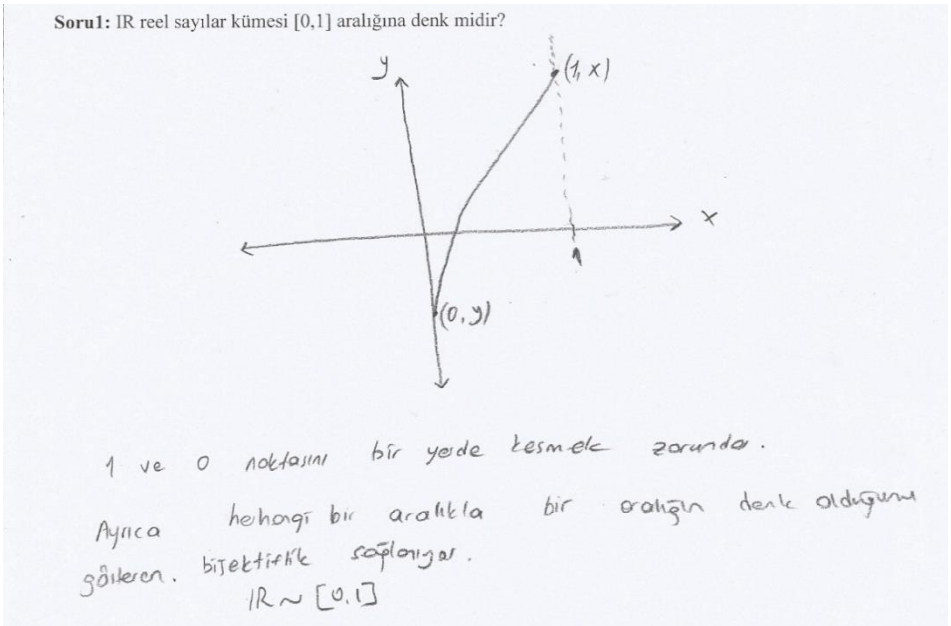
- Bazı öğrenciler oluşturdukları bu çizimlerde $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesini sınırlı bir aralık olarak gösterdiklerinden yanılgıya düşmüşlerdir.
- Bazı öğrenciler de $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi ile [0,1] aralığı arasında yapılan eşlemede $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinde açıkta eleman kaldığını açıkça görmelerine rağmen kümelerin denk olduğunu ifade etmişlerdir.

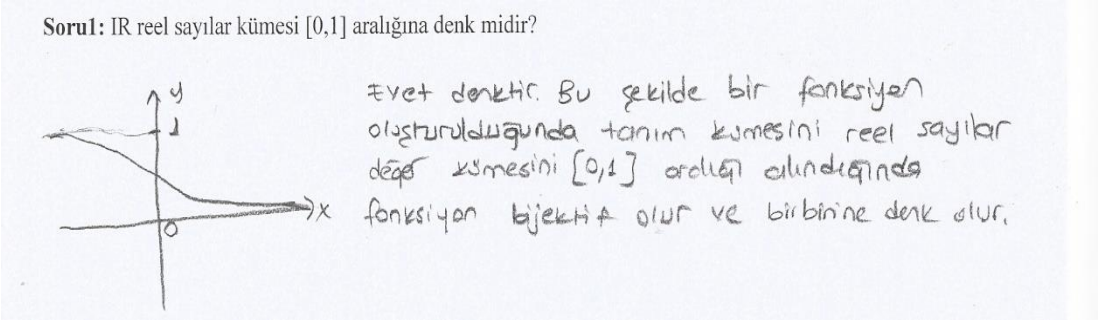
Bu alt kategoride yer alan öğrencilerden birinin cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



Sunulan çizimi oluşturan birey kümeleri eşleyen odak doğrularını çizdiğinde $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi üzerinde boşta eleman kaldığını açıkça görmesine rağmen bu kümelerin denk olduğunu ifade etmiştir. Bu durum, bireyin denklik sürecine belirli kabuller çerçevesinde yaklaşması ile açıklanabilir. Yani, birey (*önceki yaşantılarının etkisi ile*) kümelerin denk olduğunu kabul ederek çizime başlamış olabilir. Diğer yandan, yapmış olduğu çizim sonucunda sezgisi ile çelişen bir sonuç elde ettiğinde bunu görmezden gelerek kümelerin denkliği sonucuna ulaşmış olabilir. Yani öğrenci, uygun bir çizim oluşturamamasına rağmen kümelerin bijektif olarak eşlenebileceğini varsaymıştır. Bu düşünce herhangi bir delile dayanmadığından bir sezginin (*ya da bir kabulün*) ötesine geçemez.

Kümelerin denk olduğunu düşünen bazı öğrenciler de bunların denkliğini uygun bir grafik çizimi ile göstermeye çalışmışlardır. Bu alt kategoride yer alan öğrencilerden bazılarının cevapları örnek olarak aşağıda sunulmuştur.





Sunulan örnekler incelendiğinde, çizilen grafiklerin kümelerin denkliğini ifade etmediği görülebilir. Çünkü $\mathbb{R}\sim(0,1)$ için oluşturulan grafiklerin aksine bu örneklerde uç noktalardan geçen doğrular birer asimptot değildir. Başka bir ifade ile grafikler sınırlıdır. Dolayısı ile tüm gerçel sayılar kümesi eşlenememektedir.

Açıklanan bu durum çizimi oluşturan bireyler tarafından açıkça görülmüştür. Buna rağmen $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin [0,1] aralığına denk olduğunu belirtmişlerdir. Sunulan örnek ve buna benzer durumlar çok sayıda birey tarafından tekrarlandığından anlık hata ile açıklanamaz Bu durumun temel nedeni öğrencilerin (*bir önceki kategoride açıklandığı gibi*) $\mathbb{R}\sim(0,1)$ denkliğinden hareketle $\mathbb{R}\sim[0,1]$ denkliğini varsaymaları olabilir. Öğrenciler, önceki deneyimlerinde bu denkliği zihinlerinde konumlandırdıklarından yeni durum için de kümelerin denk olması gerektiği düşüncesi ile hareket ediyor olabilirler. Dolayısı ile sezgileri ile çelişen noktaları görmezden gelerek denklik soncuna ulaşmış olabilirler. Bir önceki alt kategoride yapılan açıklamaların bu alt kategori için de geçerli olduğu söylenebilir. Bu yöntem ile ulaşılan sonuç tıpkı bir önceki alt kategoride olduğu gibi doğrudur. Ancak sonuca ulaşmayı sağlayan yöntem doğru kabul edilemez.

Yukarıda sunulan iki kategoride yer alan örnekler ile ispat sürecinde ön sezgilerin ve ön kabullerin önemli roller oynayabileceği sonucuna ulaşılabilir. Bazı durumlarda bu önseziler bireyler açısından birer ön yargıya dönüşebilmektedir. Bu durumda bireyler sezilerini mevcut durum içerisinde yorumlayarak tekrardan konumlandırmak yerine mevcut durumu sezilerine uydurma yoluna gidebilmektedirler. Böylece bazı sonuçların görmezden gelinmesi veya deliller içerisinden sadece işe yarar olduğu varsayılanların doğru kabul edilmesi gibi

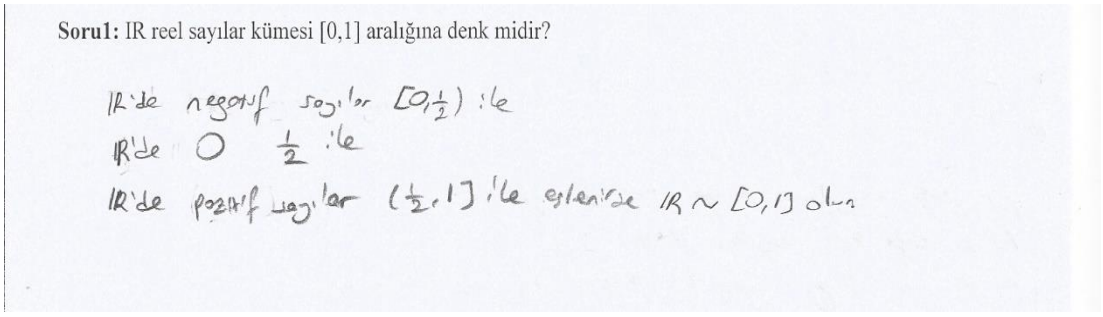
sonuçlar ile karşılaşılabilir. Bu bağlamda ispat sürecinin bireyin deneyimlerinden, bilişsel hislerinden ve duyuşsal özelliklerinden etkilendiği sonucuna ulaşılabilir.

Kümelerin denk olduğunu ifade eden bazı öğrenciler de bu iki küme arasında kurallı bir fonksiyon tanımlamayı önermişlerdir. Ancak, bu yaklaşımı kullanmak isteyen öğrencilerin hiçbiri formal ispata ulaşamamışlardır. Diğer yandan az sayıdaki öğrenci bu yaklaşımı çerçevesinde uygun gerekçeler sunarak kümelerin denk olduğunu ifade edebilmişlerdir.

Bu fikri benimseyen öğrencilerin yaklaşımları dört alt kategoriye ayrılabilir.

- [0,1] ve $\mathbb{R}$ arasında bir fonksiyon tanımlamaya çalışsalar da başarılı olamadığı için vazgeçenler.
- Uygun iki küme arasında olmayan eşlemeler üretenler.
- [0,1] ve $\mathbb{R}$ arasında uygun bir fonksiyon tanımlanabileceğini söyledikleri halde böyle bir çabaya girişmeyenler.
- Kümeler arasında uygun bir fonksiyon tanımlanabileceğini geçerli önermelere dayandırabilenler.

Sonuç olarak ilk üç yaklaşımı benimseyenler öğrenciler, kümelerin neden doğru olduğunu açıklayabilecekler herhangi bir (*formal*) delil sunmaksızın kümelerin denk olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Bu alt kategoride yer alan bireylerden birinin cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.


Soru1: IR reel sayılar kümesi [0,1] aralığına denk midir?

IR'de negatif sayılar $[0,\frac{1}{2})$ ile
IR'de 0 $\frac{1}{2}$ ile
IR'de pozitif sayılar $(\frac{1}{2},1]$ ile eşlenirse $IR \sim [0,1]$ olur

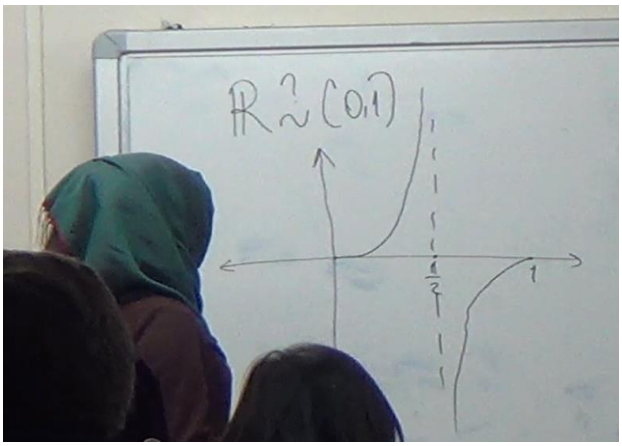
Uygun bir fonksiyon ortaya koymadan kümelerin denk olduğunu ifade eden bu öğrencilerin, varsayımları ile duruma yaklaştıkları söylenebilir. Diğer bir ifade ile öğrenciler, kümelerin denk kabul etmiş ve bu kabulden hareketle kümeler arasında bir fonksiyon tanımlanabileceği sonucuna ulaşmışlardır.

Bu bireylerin yaklaşımları formal olarak değerlendirilemez. Çünkü ortaya bir delil konmaksızın hükme ulaşılması ispatın doğasına uygun değildir. Diğer bir ifade ile bir hüküm ile sonuçlanan her süreç bir ispat değildir. Formal bir ispat, hipotez ile hüküm arasında bağlayıcı (*ara*) deliller içermelidir. Yani ispat süreci ile bir önermenin sadece doğru olduğunun değil, neden doğru olduğunun da açıklanması beklenir. Dolayısı ile formal bir ispat, hem bileşenleri arasında mantıksal bağlar içermeli hem de bu bağları ifade edecek uygun matematiksel dile sahip olmalıdır. Bu açıdan bakıldığında sunulan yaklaşımın hipotez ile hüküm arasındaki bağlayıcıları içermediği ve dolayısı ile formal olarak nitelenemeyeceği söylenebilir. Herhangi bir önermenin delil sunulmaksızın doğruluğunun ifade edilmesi durumunda, bir kabul niteliği aldığı söylenebilir. Dolayısı ile bu tarz örnekler, sezgisel düşünmenin ispat sürecine etkisini açıklaması bakımından önemlidir.

Yapılan ders içi tartışmalarda da $\mathbb{R}$~[0,1] denkliğini kanıtlamak isteyen bazı öğrencilerin bu kümeler arasında uygun fonksiyonlar tanımlamaya çalıştıkları görülmüştür. Bu amaçla tahtaya kalkan pek çok öğrenci $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi ile [0,1] aralığı uygun fonksiyon grafikleri oluşturmaya çalışmışlardır. Öğrencilerin oluşturdukları çizimlerden bazıları aşağıda sunulmuştur.

Şekil 15

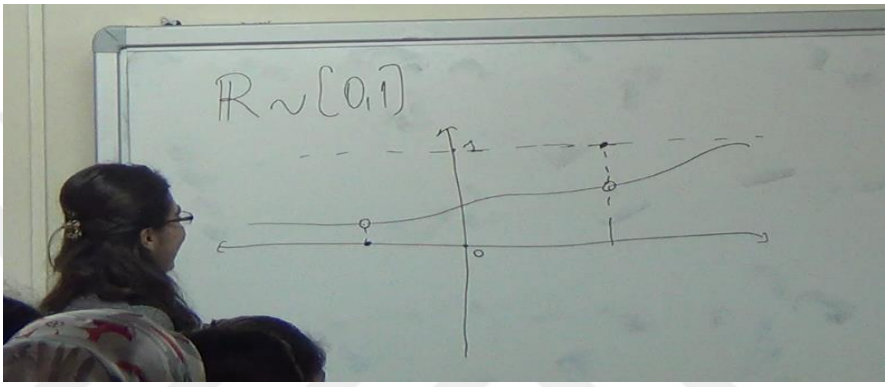
[0,1] ve $\mathbb{R}$, gerçel sayıları kümesi arasında bijektif olmayan yaklaşım (1)



Örneğin yukarıdaki çizimi oluşturan öğrenci, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar ve [0,1] aralığı arasında tanımladığı eşlemenin bijektif olduğunu düşünmüştür. Ancak $x = \frac{1}{2} \in [0,1]$ bir düşey asimptot olduğundan bunu hiçbir gerçel sayı ile eşleyemeyeceğini fark ederek bu yaklaşımından vazgeçmiştir.

Şekil 16

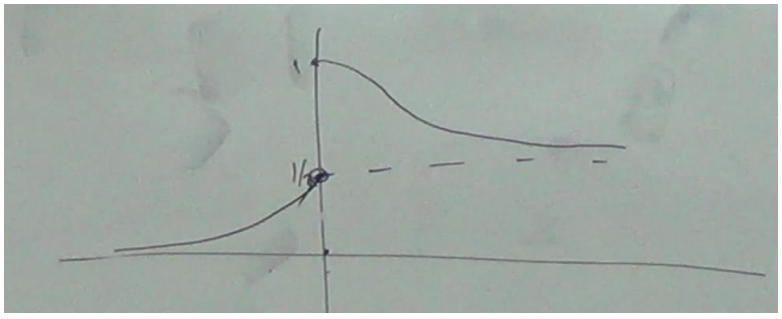
[0,1] ve $\mathbb{R}$, gerçel sayıları kümesi arasında bijektif olmayan yaklaşım (2)



Söz alan başka bir öğrenci de yukarıdaki grafik yardımı ile denkliği gösterdiğini ifade etmiştir. Bu öğrenciye göre kümeler arasında uygun bir eşlemenin oluşturulamamasının temel nedeni uç noktaların (0 ve 1) eşlemeye dâhil edilememesidir. Dolayısı ile o, [0,1] aralığında yer alan iki keyfi elemanı eşlemeden çıkarmış ve bunların yerine uç noktaları gerçel sayılar ile eşlemiştir. Diğer yandan eşlemenin tamamlanmış olması için sadece uç noktaların eşlemeye dâhil edilmesi de tek başına yeterli değildir. Çünkü yeni durumda [0,1] kümesine ait olan iki eleman açıkta kaldığından bijektif eşleme oluşturulamamıştır.

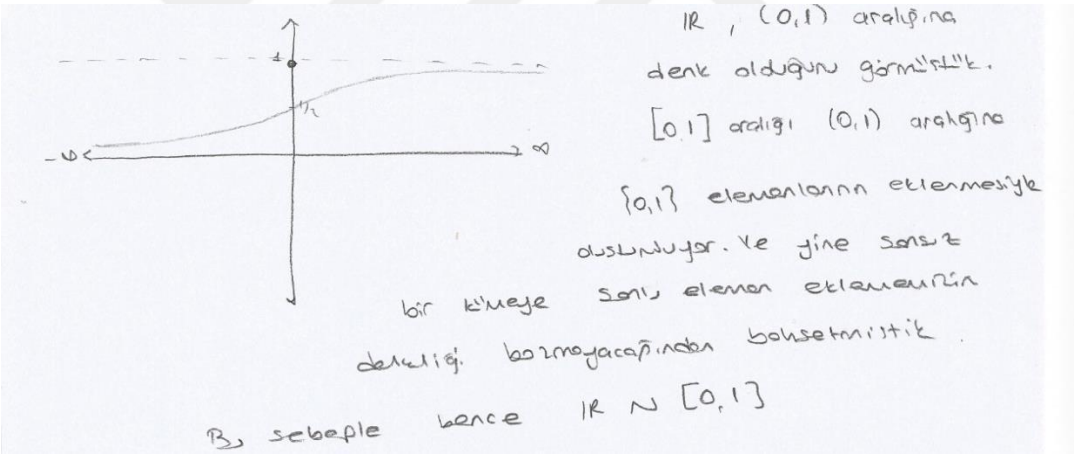
Şekil 17

[0,1] ve $\mathbb{R}$, gerçel sayıları kümesi arasında bijektif olmayan yaklaşım (3)



Diğer yandan kümelerin denk olduğunu belirten farklı bir öğrenci yukarıdaki grafiği oluşturmuştur. Ancak bu öğrenci oluşturduğu grafik ile $1 \in [0,1]$ elemanını bir gerçel sayı ile eşleyebilmesine rağmen $0 \in [0,1]$ elemanı için eşleyebilecek uygun bir gerçel sayı bulamamıştır. Dolayısı ile bu eleman açıkta kaldığından kümelerin denk olduğunu gösterememiştir.

Genel Uygulama III formunun ilk sorusunda (*Schröder-Bernstein teoremi sunulmadığından*) formal ispata ulaşabilen öğrenci bulunmamıştır. Ancak bazı öğrenciler $\mathbb{R} \sim (0,1)$ denkliğini kendilerine referans alarak kümelerin denk olabileceğini mantıklı önermeler ile açıklayabilmişlerdir. Bu bireyler, sonsuz iki küme denk iken sonlu sayıda eleman eklemenin (*veya çıkarmanın*) denkliği etkilemeyeceğini sözel olarak ifade etmişlerdir. Yani görüşlerini destekleyebilecek (*formal*) bir argüman sunabilmişlerdir. Bu alt kategoride yer alan bireylerden birinin cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



Bu soru altında bahsedilen kategoriler içerisinde Cantor tarafından ortaya konan denklik kavramına en uygun yaklaşımın bu kategori olduğu söylenebilir.

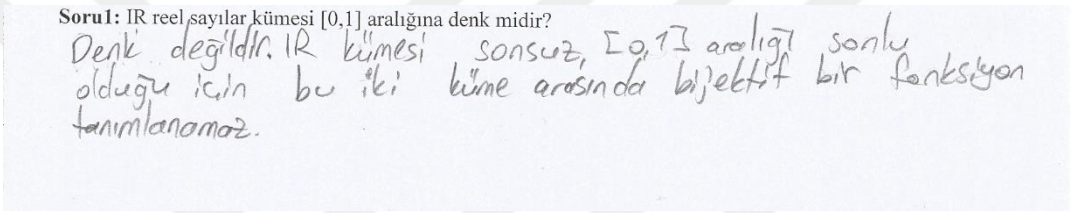
ii. Kümelerin Denk Olmadığını Belirtenler:

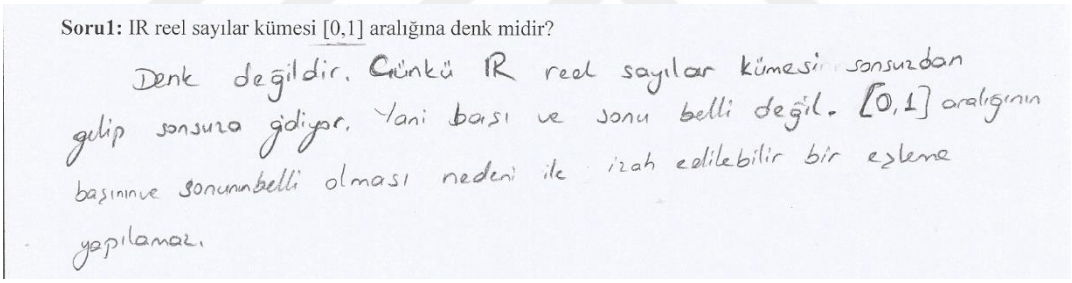
Genel Uygulama III çalışmasının ilk sorusuna yanıt veren öğrencilerin büyük bir kısmı kümelerin denk olduklarını belirtmişlerdir. Diğer yandan bazı öğrenciler de kümelerin denk olmadığını ifade belirtmişlerdir. Bu öğrencilerin yaklaşımları aşağıda özetlenmiştir.

Kümelerin denk olmadığını belirten öğrencilerden biri bu görüşünü detaylandırmamıştır. Sadece kümelerin denk olamayacağını belirterek soruya cevap vermiştir. Bu öğrencilerin gelişigüzel cevap verdiği ya da çeşitli sebeplerle düşüncelerini açıklamaktan çekindiği sonucuna ulaşılabilir.

Kümelerin denk olamayacağını söyleyen öğrenciler arasında sınırlılık ilişkisinden hareketle yanlış sonuca ulaşanlar da olmuştur. Bu öğrencilere göre [0,1] aralığı sınırlı bir küme olduğu için ℝ, gerçel sayılar kümesine denk olamaz.

Bu alt kategoride yer alan bireylerden ikisinin cevapları örnek olarak aşağıda sunulmuştur.





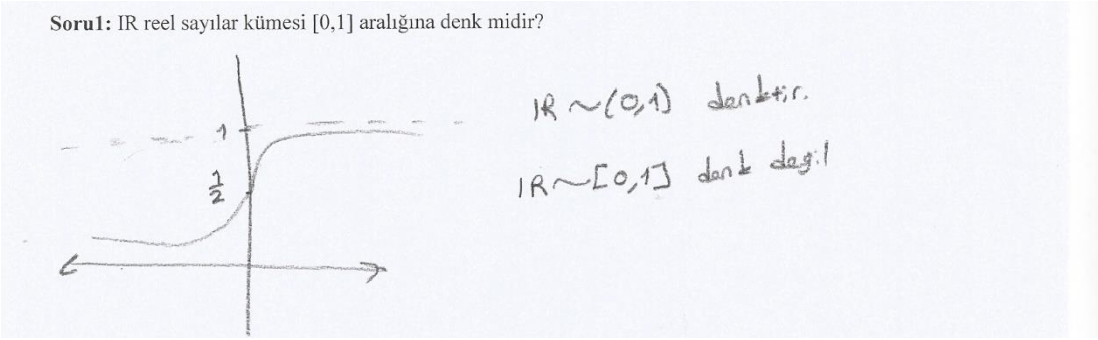
Sunulan örneklerden de görülebileceği gibi bu düşünme biçimine sahip öğrencilerin sınırlılık/sınırsızlık ile ilgili kavram yanılgısına sahip olduğu söylenebilir. Bu öğrencilerden bazıları sınırlı kümelerin sonlu olduğunu varsaymışlardır. Yani sınırlı kümelerin sonsuz olabileceği gerçeğini sezgisel olarak reddetmektedirler. Diğer yandan bazı öğrenciler sınırlı kümelerin sonsuz olabileceğini kabul etseler de sınırsız olanlardan daha az sayıda eleman içerdiğini varsaymaktadırlar. Bu durum da gerçek yaşam deneyimleri ile şekillenen kavram imajlarının bir sonucu olabilir.

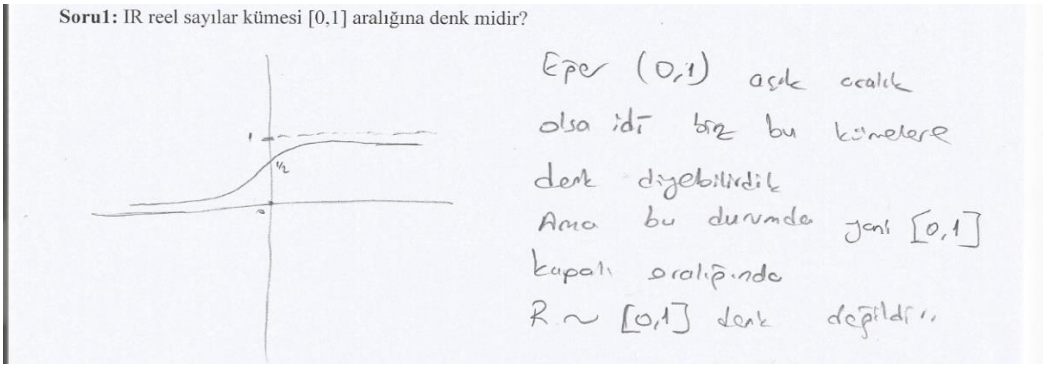
Diğer yandan ikinci örnekte sunulan öğrencinin aynı zamanda Tall (1980) tarafından belirtilen sonsuzluğu ölçme yanılgısına sahip olduğu söylenebilir. Bu öğrenci (0,1) aralığı aralığını 1 birim kabul etmiş ve gerçel sayıların sonsuzluğunun

sonsuz tane 1 birim içerecek kadar büyük olduğunu ifade etmiştir. Sonuç olarak sınırlı bir küme olan (0,1) aralığının $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinden daha küçük bir küme olduğu hükmüne ulaşmıştır.

Bu öğrencinin $\mathbb{R}$, gerçel sayılar üzerinde tanımlı alışılmış metrik fonksiyonundan elde ettiği uzunluk değerleri bağlamında sonsuz eleman içeren kümeleri (*aralıkları*) karşılaştırdığı sonucuna ulaşılabilir. Böyle bir yaklaşıma göre boyca daha uzun aralık daha büyük bir sonsuzluğa sahip olmalıdır. Oysaki bu yaklaşım kümeleri kardinalitelerine göre karşılaştırma fikri ile çelişmektedir. Kardinalite yaklaşımına göre uzunlukları farklı olsa da tüm doğru parçaları arasında bijektif bir eşleme yapılabilmektedir. Dolayısı ile $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin öz alt kümesi olan her açık aralık (*geometrik uzunluklarına bakılmaksızın*) birbirine denktir. Sonuç olarak bu yaklaşımı benimseyen öğrencilerin yanılgılarının temel nedeni Cantor tarafından ortaya konan birebir-örten eşleme fikrini istenen düzeyde anlamlandırmadıkları ve kullanamadıkları söylenebilir.

Kümelerin denk olamayacağını ifade eden bazı öğrenciler de $\mathbb{R} \sim (0,1)$ sonucunu referans alarak hatalı bir çıkarımda bulunmuşlardır. Bu öğrencilere göre $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi (0,1) aralığına denk olduğu için [0,1] aralığına denk olmamalıdır. Bu kategoride yer alan bireylerden bazılarının açıklamaları örnek olarak aşağıda sunulmuştur.





Benzer açıklamalar ile ders içi tartışmalarda da karşılaşılmıştır. Bu tartışmaların bir bölümü aşağıda sunulmuştur.

Tablo 10

Sınıf İçi Diyalog (4)

Öğretim Elemanı	Bu kümelerin kimler denk olmadığını düşünüyor?
Kümelerin denk olmadığını düşünen bir öğrenciye söz hakkı verir.	
Öğretim Elemanı	Neden denk olmadığını düşünüyorsun?
Öğrenci	0 ve 1 olmadığında yapmıştık zaten. O zaman denk oluyorlardı.
Öğretim Elemanı	Yani?
Öğrenci	0 ve 1 eklendiğinde aynı eşleme olmuyor. Bunlar açıkta kalıyor. Yani denk değildirler.

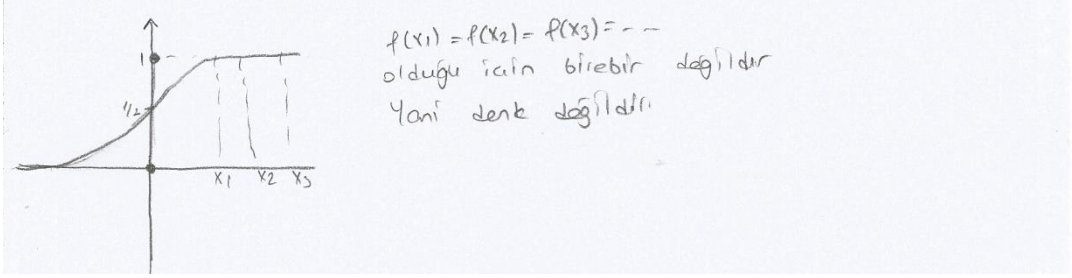
Diyalogda görüşleri sunulan öğrencinin, (0,1) aralığına 0 ve 1 elemanlarının eklenmesi ile bu denkliğin bozulacağını düşündüğü görülmektedir. Bu tarz düşünme biçimine sahip öğrencilerin de kavram yanılgısına sahip oldukları söylenebilir. Çünkü sonsuz iki küme denk iken sonlu sayıda eleman eklemek veya çıkarmak bu denkliğin niteliğini etkilemeyecektir. Bu yanılgının farklı sebepleri olabilir.

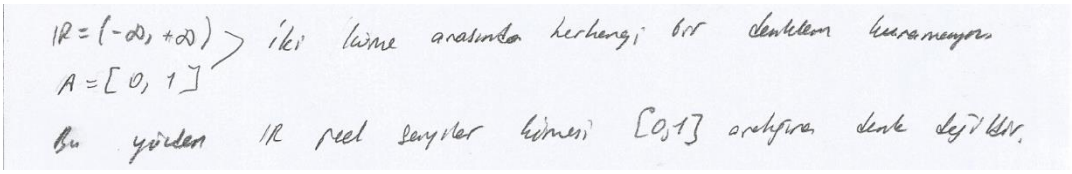
- Sonsuz kümeler arasındaki denkliğe ilişkin yaklaşımların sonlu kümelere ait düşünce etkisinde şekillendiği söylenebilir. Çünkü iki sonlu küme denk iken eleman etkilemek veya çıkarmak bu denkliğin niteliğini etkileyecektir. Öğrenciler bu ilişkinin sonsuz kümeler için de geçerli olduğunu varsaymış olabilirler.

- Başka bir sebep de öğrencilerin sezgisel yaklaşımları olabilir. Öğrenciler gerçek yaşama dayalı parça-bütün deneyimlerinden hareketle kümeler arasında hiyerarşik bir ilişki oluşturmuş olabilirler. Başka bir ifade ile *(0,1) kümesi [0,1] kümesinin bir parçası olduğundan ondan daha küçük olmalıdır* şeklinde düşünüyor olabilirler.

Bu ve bu tarz genellemelerin temelinde öğrencilerin birebir-örten eşleme fikrini yeterince anlamlandıramamış olması yatmaktadır. Öğrenciler birebir-örten eşleme fikrini sonsuz kümelere transfer edemedikleri için önceki deneyimlerine ilişkin algılarının ötesine geçememiş olabilirler.

Kümelerin denk olmadığını ifade eden bazı öğrenciler de iki küme arasında birebir-örten eşlemeler oluşturulamayacağı sonucuna ulaşmışlardır. Bu öğrencilerden bazıları uygun eşlemeleri oluşturmaya çalışmış ancak uygun bir eşleme oluşturamamışlardır. Buradan hareketle kümelerin denk olamayacağını söylemişlerdir. Bazıları öğrencilerde böyle bir çabaya bile girişmeden uygun eşleme tanımlanamayacağını belirtmişlerdir. Bu alt kategoride yer alan bireylerden bazılarının cevapları örnek olarak aşağıda sunulmuştur.





Bu bireylerin bijektif eşleme fikrinin kullanılması gerektiğinin farkında oldukları söylenebilir. Diğer yandan bu fikri yeterli düzeyde kullanamamışlardır. Giriştikleri kısıtlı çaba sonucu (*sezgilerinin de etkisi ile*) bir genellemeye ulaşmışlardır. Diğer yandan bu yaklaşım uygulanan ispat yöntemi açısından da bir yanılgı içermektedir. İki sonsuz kümenin denk olmadığının belirlenebilmesi için

aralarında tanımlanabilecek hiçbir fonksiyonun bijektif olmadığının gösterilmesi gerekir. Dolayısı ile sonlu sayıda olumsuz örnekten hareketle bir genelleme yapılamaz.

2.Soruya verilen cevaplar ve analizi

Genel Uygulama III formunun ikinci sorusuna verilen yanıtlar üzerinde yapılan içerik analizi sonucu elde edilen kategoriler ve alt kategorilere ilişkin özet tablo aşağıda sunulmuştur.

Tablo 11

Genel Uygulama III - İkinci soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar

Soru: ℕ, doğal sayılar kümesi ℝ , gerçel sayılar kümesine denk midir?	**Kişi Sayısı**
Denk olabileceğini belirtenler	**53**
i. Sadece *''denk olabilir''* cevabını yazanlar.	6
ii. Her iki kümenin sonsuzluğundan hareketle denk olduklarını belirtenler.	9
iv. İki kümenin denk olduğunu düşünüp izah edilebilir bir biçimde gösteremeyenler.	29
• Kavram yanılgıları nedeni ile bu sonuca ulaşanlar	9
Soruya cevap vermeyenler	**22**
Denk olamayacağını belirtenler	**13**
i. Sadece *''denk değil''* açıklamasını yapanlar.	2
ii. Bir gerçel sayının ardışığının belirlenemediğini ifade ederek kümeler arasında eşleme yapılamayacağını belirtenler.	7
iii. İki küme arasında bijektif eşleme tanımlanamayacağını ifade edenler.	4
Toplam	**88**

Çalışmanın mevcut aşamasına kadar daima denk olan kümeler üzerinde durulmuş ve derse katılan öğrencilere denk olmayan iki sonsuz küme örneği verilmemiştir. Diğer yandan bu soru da öğrencilere denk olmayan iki küme sunulmuştur. Böylece onların iki sonsuz kümenin denk olmama durumunu ne ölçüde ayırt edebildikleri ve bunu nasıl ifade ettikleri incelenmek istenmiştir.

Kümeler arasında daima denklik ilişkisine odaklanıldığı için böyle bir soru sorulması uygun görülmüştür. Bu soru ile aşırı genelleyici düşünme biçimine sahip öğrencilerin yaklaşımlarının ortaya konabilmesi mümkün olabilir.

i. Kümelerin Denk Olduklarını Belirtenler:

Çalışmaya katılan öğrencilerin büyük çoğunluğu $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesine denk olduğunu belirtmişlerdir. Bu sonuca ulaşan öğrenciler farklı yaklaşımları kullanmışlardır. Bunlar yaklaşımlar aşağıda sunulmuştur.

İki kümenin denk olduğunu belirten öğrencilerin bir kısmı bu görüşlerini detaylandırmamışlardır. Sadece kümelerin denk olduklarını ifade ederek soruya yanıt vermişlerdir. Bu alt kategoride yer alan bireylerin bu soru için gelişigüzel cevap verdikleri ya da çeşitli sebepler ile düşüncelerini açıklamaktan çekindikleri söylenebilir.

Diğer yandan bazı öğrenciler de bir eşleme oluşturma çabasına girmeden kümelerin sonsuzluklarından hareketle denk olduklarını ifade etmişlerdir. Bu yaklaşıma ait yorumlar önceki sorular içerisinde (*birçok defa*) açıklandığından bu noktada tekrar edilmeyecektir. Özet olarak bu alt kategorideki öğrencilerin birebir-örten eşleme fikrini kullanamadığı söylenebilir. Bu tarz yanıt veren öğrencilerin aşırı genelleyici bir yaklaşıma sahip oldukları da söylenebilir. Dolayısı ile sonsuz kümeler ile ilgili bir kavram yanılgıları olduğu sonucuna ulaşılabilir.

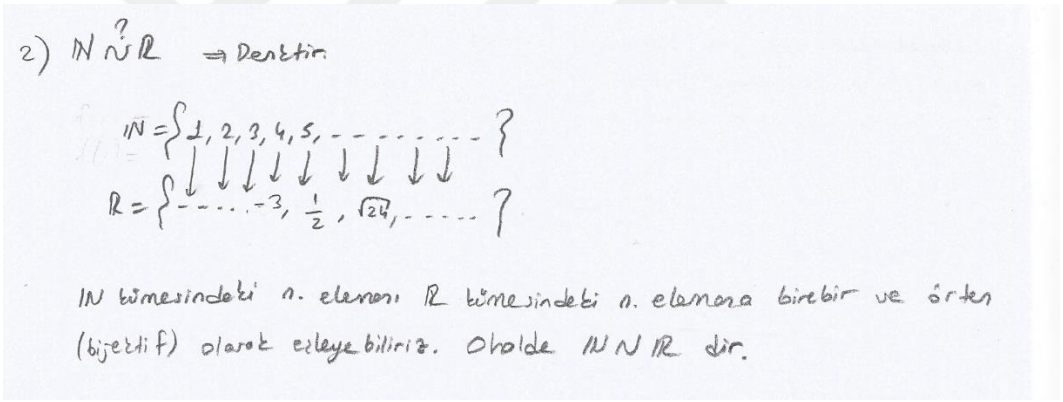
Kümelerin denk olduğunu ifade eden öğrencilerin bazıları da $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi ile $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi arasında bijektif bir eşleme oluşturulması gerektiğini ifade etmişlerdir. Bu alt kategoride yer alan öğrencilerin yaklaşımları üçe ayrılmaktadır.

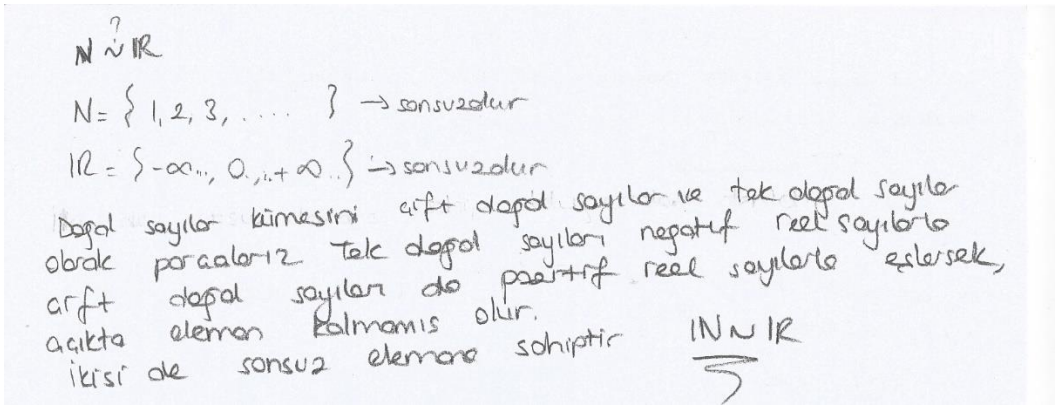
- Öğrencilerin çoğu $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi ile $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi arasında bir bijektif bir fonksiyon tanımlamaya çalışmış ancak başarılı olamadıkları için bundan vazgeçmişlerdir.

- Bazı öğrenciler kümeler arasında bijektif olmayan eşlemeler tanımlayabilmişlerdir.
- Bazı öğrenciler de $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi ve $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi arasında uygun bir fonksiyon tanımlanması gerektiğini ifade etmelerine rağmen böyle bir çabaya hiç girişmemişlerdir.

Bu üç alt kategorideki yaklaşıma sahip bireyler (*formal bir delil sunmaksızın*) kümeler arasında $\mathbb{N}\sim\mathbb{R}$ denklik ilişkisinin yer aldığını ifade etmişlerdir. Öğrencilerin uygun eşlemeler üretemeden veya üretme çabasına bile girişmeden bu kümelerin denkliğini ifade etmeleri sezgisel düşünme kapsamında değerlendirilebilir.

Bu alt kategoride yer alan bireylerden bazılarının cevapları örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



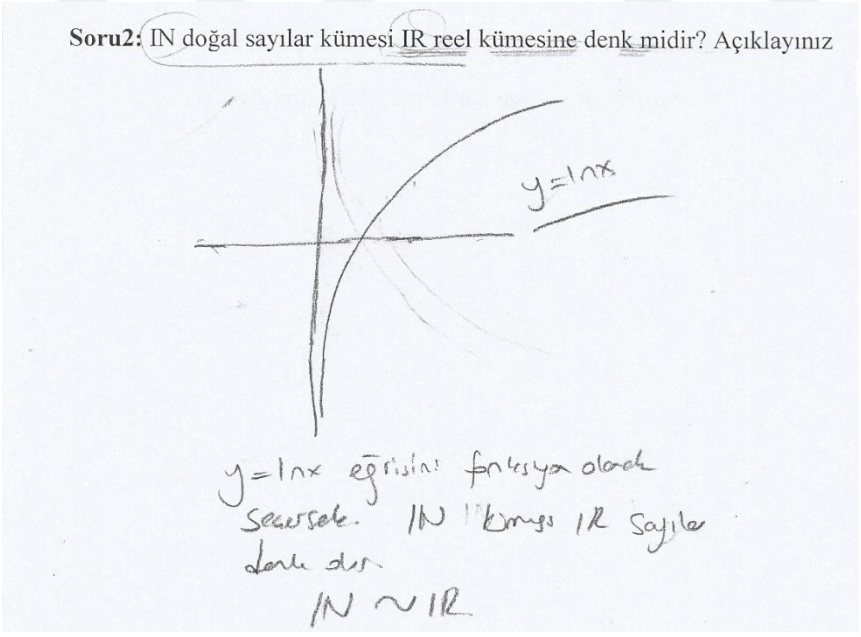


Yukarıda yer alan örneklerden birinci yaklaşımı benimseyen birey $\mathbb{N}$, doğal sayılar ve $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümelerinin n. elemanları arasında bir eşleme

oluşturduğunu varsaymıştır. Ancak bu hatalı bir eşlemedir. Çünkü $\mathbb{R}$ kümesi sayılamaz bir küme olduğundan bu kümenin n. elemandan bahsedilemez. Dolayısı ile böyle bir eşleme ile kümelerin denkliği izah edilemez. Diğer yandan bu eşlemenin izah edilebilir olduğu kabul edilse bile örten olamayacağı da açıktır. Çünkü sayılamaz bir küme olan $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin kardinalitesi sayılabilir bir küme olan $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesinin kardinalitesinden daha büyüktür.

Diğer yandan, ikinci örnekte yer alan yaklaşımı benimseyen birey $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi ile $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin alt kümeleri arasında eşlemeler yapılabileceğini ifade etmiştir. Ancak bu eşlemelerin nasıl yapılabileceğini ifade etmemiştir. Dolayısı ile bu bireyin herhangi bir eşleme oluşturmaksızın kümelerin denk olduğu sonucuna ulaştığı söylenebilir. Bu nedenle yaklaşımı yetersizdir.

Uygun eşlemeler üretemeyen öğrencilerin bir kısmı da kavram yanılgıları nedeni ile hatalı sonuçlara ulaşmışlardır. Özellikle, $\mathbb{N}=(0,\infty)=\mathbb{R}^+$ yanılgısının çok sayıda öğrenci tarafından sıklıkla tekrar edildiği görülmüştür. Bu öğrencilerden birinin cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



Örnekten de görüldüğü gibi sunulan yaklaşımı benimseyen öğrenci, *f(x)=lnx* kuralı ile tanımladığı fonksiyon sayesinde $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi ile $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin denkliğini gösterdiğini varsaymıştır. Oysaki burada

tanımlanan f : $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu kesiksiz bir eğri boyunca ifade edilemez. Dolayısı ile öğrencinin doğal sayılar kümesinin $\mathbb{N}=(0,\infty)$ şeklinde kabul ettiği soncuna ulaşılabilir. Diğer yandan öğrencinin ulaştığı sonuç doğru olsa da yaklaşımı bir yanılgıya dayanarak şekillendiğinden yeterli kabul edilemez. Bu alt kategori, kavram yanılgılarının ispat sürecine olan etkisini ifade etmesi açısından önemsenmektedir. Benzer örnekler ile yeterli bir kavramsal temeli olmayan bireylerin istenen ispatları oluşturmasının mümkün olmadığı sonucuna ulaşılabilir.

Yanılgı içeren farklı yaklaşımlar ile ders içi gözlemlerde de karşılaşılmıştır. Örneğin $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi ve (0,1) kümelerinin denkliği üzerine yapılan tartışmada bir öğrenci aşağıdaki eşlemeyi oluşturarak bu iki kümenin denk olması gerektiğini belirtmiştir.

$$\begin{array}{lccccc} \{ & 1, & 2, & 3, & \ldots\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \{ & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots\} \end{array}$$

Bu öğrencinin (0,1) aralığını kısıtlı bir anlayışa indirgeyerek $\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ şeklinde kabul ettiği söylenebilir. Başka bir ifade ile (0,1) aralığında olan ancak $\frac{1}{n+1}$ formunda olmayan sayıların var olduğunu göz artı etmektedir. Dolayısı ile yaklaşımı doğru kabul edilemez.

Sonuç olarak bu alt kategorideki bireylerin hem kavramsal açıdan hem de ispat yöntemleri açsından istenen düzeyde olmadıkları söylenebilir.

ii. Kümelerin Denk Olmadıklarını Belirtenler:

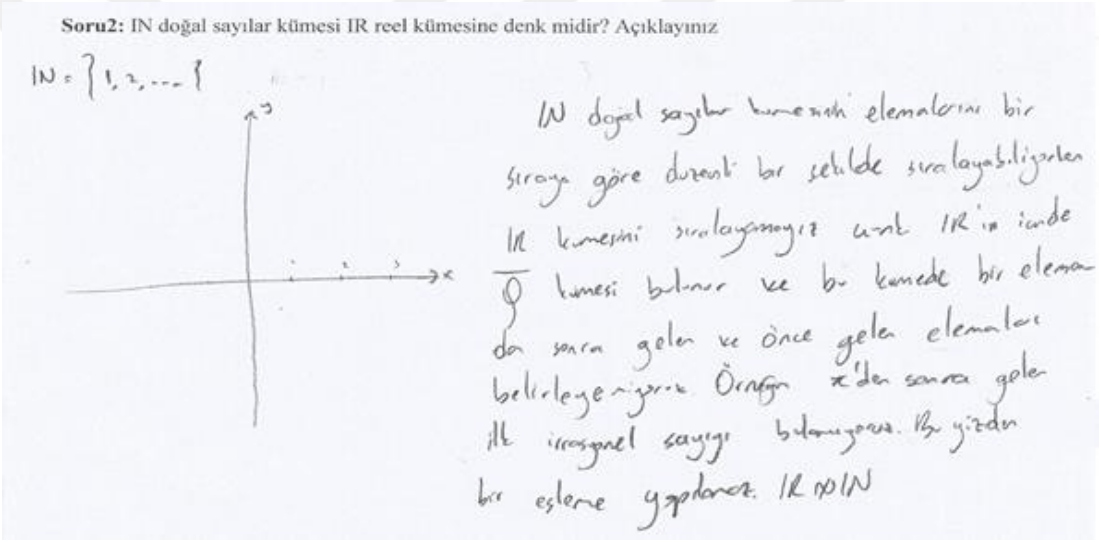
Çalışmaya katılan az sayıdaki öğrenci $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesine denk olmadığını belirtmişlerdir. Bu sonuca ulaşan öğrenciler farklı yaklaşımları kullanmışlardır. Bunlar yaklaşımlar aşağıda sunulmuştur.

İki kümenin denk olmadığını belirten öğrencilerden ikisi bu görüşlerini detaylandırmamışlardır. Sadece kümelerin denk olmadığını ifade ederek soruya yanıt vermişlerdir. Bu alt kategoride yer alan bireylerin bu soru için gelişigüzel

cevap verdikleri ya da çeşitli sebepler ile düşüncelerini açıklamaktan çekindikleri söylenebilir.

Kümelerin denk olmadığını belirten bazı öğrenciler $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin ardışık elemanlarının belirlenemeyeceğini dayanak olarak göstermişlerdir. Bu öğrencilere göre $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin elemanları belirli bir kural ile belirlenemediğinden $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesine uygun bir eşleme tanımlanamaz.

Bu alt kategoride yer alan bireylerden birinin açıklamaları örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



Örnekte de görüldüğü gibi, sunulan yaklaşımı benimseyen birey irrasyonel sayıları ($\bar{Q} \subset \mathbb{R}$) gerekçe göstererek ardışık gerçel sayıların belirlenemeyeceğini ifade etmiştir. Buradan hareketle kümelerin birbirlerine bijektif olarak eşlenemeyeceği sonucuna ulaşmıştır. Bu öğrencilerin açıklamaları (*kısmen*) doğrudur. Bir $x \in \mathbb{R}$ gerçel sayısından hemen sonra gelen ilk gerçel sayı belirlenemez. Dolayısı ile $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinden elemanların tek tek belirlenerek doğal sayılara eşlenmesi mümkün değildir. Diğer yandan sadece bu durum kümelerin denk olmadığını söylemek için de yeterli değildir. Çünkü sadece ardışık elemanları belirlemeye dayanan bu yaklaşım bireyi hatalı bir genellemeye götürebilir. Örneğin $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini ve bir $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ sayısını düşünelim.

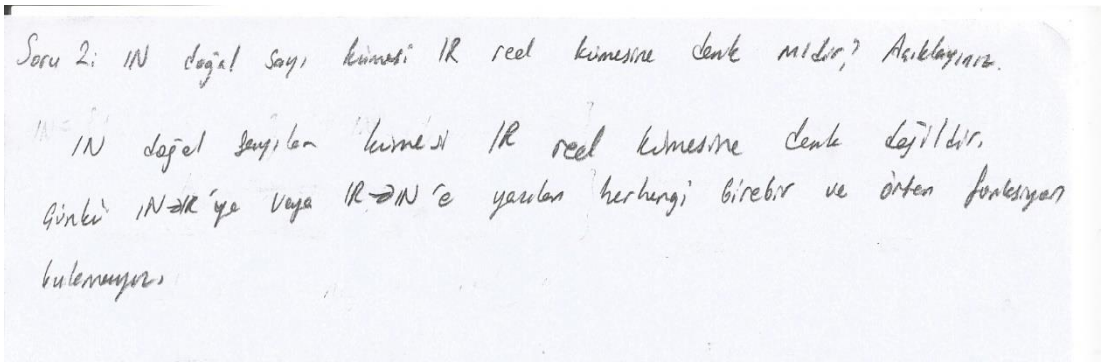
Bu sayıdan sonra gelen ilk rasyonel sayı da belirlenemez. Dolayısı ile (*bu yaklaşıma göre*) ℚ, rasyonel sayılar kümesi ile ℕ, doğal sayılar kümesi de denk olamaz. Oysaki ℚ, rasyonel sayılar kümesi sayılabilir olduğundan ℚ ~ ℕ olduğu açıktır.

Bu kategorideki öğrenciler ℝ, gerçel sayılar kümesi ile ℕ kümesi arasında bir eşleme yapılamamasının nedenini kardinalite kavramı ile eşleştirmediler. Sadece elemanların belirlenemiyor olmasından hareketle açıklamalarda bulundular. Oysaki iki küme arasında cebirsel bir fonksiyon tanımlanamaması bu kümelerin denk olmadığını belirtmek için tek başına yeterli değildir. Örneğin A = { a, b, c } kümesi ve B = {♥,♠, ♣} kümesi arasında da kurallı cebirsel bir fonksiyon tanımlanamaz. Ancak aşağıdaki fonksiyon bijektif olduğu için bu kümelerin denk olduğu kolayca görülebilir.

$$f:A\rightarrow B,\ f=\{(a,\heartsuit),(b,\spadesuit),(c,\ \clubsuit)\}$$

Dolayısı ile bu tarz yaklaşımları benimseyen öğrencilerin bijektif eşleme kavramını uygun bir şekilde kullanamadıkları ve dolayısı ile formal ispata ulaşamadıkları söylenebilir.

Diğer yandan bazı öğrenciler de iki küme arasında tanımlanabilecek bir eşlemenin bijektif olamayacağını belirterek ℕ, doğal sayılar kümesi ve ℝ, gerçel sayılar kümesinin denk olamayacağı sonucuna ulaşmışlardır. Bu alt kategoride yer alan bireylerden birinin cevapları örnek olarak aşağıda sunulmuştur.


Soru 2: IN doğal sayı kümesi IR reel kümesine denk midir? Açıklayınız.

IN doğal sayılar kümesi IR reel kümesine denk değildir. Çünkü IN→IR'ye veya IR→IN'e yazılan herhangi birebir ve örten fonksiyon bulunmuyor.

Bu alt kategoride yer alan bireylerin cevapları (*örnekten de anlaşılabileceği gibi*) formal matematiksel bir kanıt içermemektedir. Bu bireyler, sezgisel bir yaklaşım ile ℕ, doğal sayılar ve ℝ, gerçel sayılar kümelerinin denk olamayacağını varsaymışlardır. Bu görüşlerine formal matematiksel bir delil sunamamışlardır. Dolayısı ile bu alt kategorideki öğrencilerin formal açıdan bir ispat oluşturabildikleri söylenemez. Bu öğrenciler sınırlı çabaları sonucu elde ettikleri deneyimlerine dayanarak bir kabulde bulunmuşlardır.

Diğer yandan ders içi gözlemlerde de sezgisel yaklaşıma dayalı bazı açıklamalar ile karşılaşılmıştır. Örneğin, ℕ doğal sayılar kümesi ve (0,1) kümelerinin denk olup olmadıkları üzerine yapılan sınıf içi tartışmada söz alan bir öğrencinin açıklamalarının bir bölümü aşağıda sunulmuştur.

Tablo 12

Sınıf İçi Diyalog (5)

Öğretim Elemanı	ℕ ve (0,1) kümeleri birbirlerine denk midir?
Kümelerin denk olmadığını düşünen öğrencilerden birine söz hakkı verir.	
Öğrenci	Bence bu kümeler denk değildir.
Öğretim Elemanı	Neden böyle düşündün?
Öğrenci	Doğal sayılar kümesinden 1 sayısı ile (0,1) aralığındaki ***a*** sayısı eşlensin ve 2 sayısıyla da ***b*** eşlensin. 1 ile 2 arasında başka bir doğal sayı yoktur. Ancak a ile b arasında başka sayılar var. Bu eşleme birebir-örten olamaz.

Diyalogdan da görüldüğü gibi açıklama yapan öğrenci, herhangi iki doğal sayı arasında başka bir doğal sayı olmamasından hareketle (*sezgisel olarak*) eşlemede açıkta eleman kalacağını ifade etmiştir.

Bu soruda ℕ, doğal sayılar kümesi ve ℝ, gerçel sayılar kümelerinin denk olamayacağını formal matematiksel bir yaklaşım ile kanıtlayabilen öğrenci olmamıştır. Öğrencilerin geneli kümelerin denkliğine (veya denk olmayışına) sezgisel olarak yaklaşarak delil üretmeye çalışmışlardır.

Diğer yandan bu soruya cevap vermeyen öğrencilerin sayısı 22 olarak belirlenmiştir. Bu sayı diğer tüm uygulamalarda soruları cevapsız bırakan öğrencilerin toplam çok yakındır. Bu durum öğrencilerin verilen soruyu yorumlamakta güçlük çektiklerinin bir göstergesi olabilir. Pek çok öğrenci, iki küme arasındaki denklik ilişkisini istenen düzeyde anlamlandıramadığı için soruyu yanıtsız bırakmış olabilir. Bu da sunulan denklik ilişkisinin içerdiği güçlüğü epistemolojik açıdan eden önemli bir gösterge olabilir. Öğrencilerin bu soruya yanıt vermemelerinin bir diğer sebebi de düşüncelerini açıklamaktan çekinmeleri olabilir.

Genel Uygulama IV ve Analizi

1.Soruya verilen cevaplar ve analizi

Genel Uygulama IV formunun ilk sorusuna verilen yanıtlar üzerinde yapılan içerik analizi sonucu elde edilen kategoriler ve alt kategorilere ait özet tablo aşağıda sunulmuştur.

Tablo 13

Genel Uygulama IV - Birinci soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar

Soru: ℝ, reel sayılar kümesinin alt kümesi olan ve boştan farklı her hangi bir açık aralığı kapsayan her küme ℝ, reel sayılar kümesine denktir. İspatlayınız.	**Kişi Sayısı**
Soruya Yanıt Vermeyenler	4
Kullanılan İspat Yöntemleri	
i. Teoremi ‘’*ℝ'nin alt kümesi olan açık aralıklar birbirine denktir*.’’ şeklinde yorumlayanlar.	**11**
c. Örnek verenler.	5
d. Formal yaklaşanlar.	6
ii. Teoremi ‘’ *ℝ, boştan farklı her açık aralığa denktir*.’’ şeklinde yorumlayanlar.	**59**
a. Örnek verenler.	39
b. Formal yaklaşanlar.	20
iii. Schröder-Bernstein Teoremi'nden yararlananlar.	**26**
a. Seçtiği bu teoremi uygun bir şekilde kullanamadığı için ispata ulaşamayanlar.	19
b. Bu teoremi kullanarak formal ispatı oluşturabilenler.	7
Toplam	**100**

Bu soruda öğrencilerden herhangi iki kümenin denkliğine karar vermeleri beklenmemektedir. Diğer bir ifade ile teoremin sonucu olan hüküm doğrudan verilmiştir. Dolayısı ile bu hükmün uygun argümanlar ile [*Schröder-Bernstein teoremini kullanarak*] kanıtlanması beklenmektedir.

Bu sorudan elde edilen cevaplar üzerine içerik analizi uygulanmış ve elde edilen kategoriler aşağıda sunulmuştur.

Öğrencilerin İspat Yaklaşımları

Teoremi ispatlamaya çalışan öğrencilerin farklılaştıkları en önemli nokta teoremi nasıl yorumladıkları olmuştur. Farklı yorumlar öğrencileri farklı yaklaşımlara götürmüştür.

Öğrencilerin bir kısmı kendilerine sunulan teoremi aşağıdaki şekilde yorumlamışlardır.

''ℝ, gerçel sayılar kümesinin alt kümesi olan her açık aralık birbirlerine denktir.''

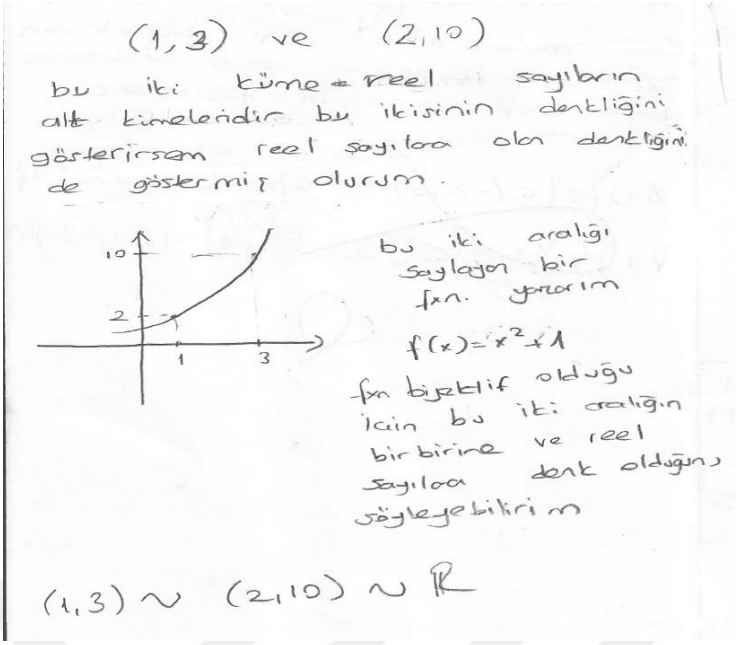
Dolayısı ile bu öğrencilerin ispat yaklaşımlarına bu yorum yön vermiştir.

Bu öğrencilerin seçtikleri kümeler yorumları gereği açık aralıklardan oluşmaktadır. Dolayısı ile onlar, teoreme uygun olabilecek $X = (0,1) \cup \{2\}$ şeklindeki bir kümenin varlığını dikkate almamışlardır. Öğrencilerin verilen teoremi bu şekilde yorumlamalarının sebebi teoremi kısıtlı bir anlayış çerçevesinde algılamaları olabilir. Bireyler önceki deneyimlerine dayanarak daha fazla aşina oldukları ilişkileri ön plana çıkarmış ve daha az karşılaştıkları $X = (0,1) \cup \{2\}$ şeklindeki kümeleri geri planda bırakmış olabilirler. Bu durum ispat sürecinde ön yaşantıların, alışıların ve deneyimlerin de etkili olduğunun bir göstergesi olabilir.

Bu öğrencilerin ispat yaklaşımları içerdikleri yönteme göre iki başlık altında sınıflanabilir:

i. Bazı öğrenciler ℝ, gerçel sayılar kümesinin alt kümesi olan herhangi iki aralık alarak bunların birbirlerine denk olduğunu göstermişlerdir. Yani genel bir ilişki için tek örnek üzerinden genelleme yapmışlardır.

Bu alt kategoride yer alan bireylerden birinin açıklamaları örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



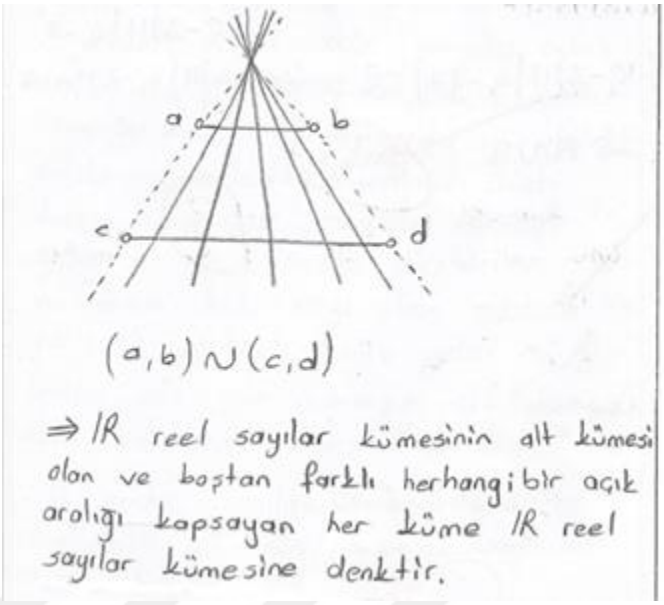
Görüldüğü gibi böyle bir yaklaşımı benimseyen öğrenciler istedikleri herhangi iki açık aralığı seçerek bunların denk olduğunu uygun bir yöntem ile gösterdiler ve sonuca ulaştıklarını varsaydılar. Bu öğrencilerin teoremi ele alış biçimlerinin yetersiz olduğu vurgulanmıştı. Buna ek olarak da bir yanılgı içerisinde oldukları söylenebilir. Bunun nedeni uygulanan metodun, genel ifade ile ilgili bir sonuca özel bir örnekten hareketle ulaşılmaya çalışılmasıdır. Özel durum için geçerli olanın genel durum için de daima geçerli olacağının varsayılması, bir yanılgıdır.

Dolayısı ile her açık aralığın birbirine denk olduğunun gösterilebilmesi için *''(1,3)~(2,10)''* ilişkisinin ispata eşdeğer tutulması doğru olmayacaktır. Çünkü bu denklik sadece genel önermenin doğruluğunu gösteren tekil bir örnektir. Başka bir ifade ile bir delildir ancak kanıt değildir.

ii. Bazı öğrenciler de $\mathbb{R}$'nin alt kümesi olan herhangi iki aralığı cebirsel olarak (*değişkenler cinsinden*) tanımlayarak bu iki aralığın denk olduğunu gösterdiler.

Bu öğrencilerin bir üstteki gruba göre daha formal bir düşünce biçimi ile hareket ettikleri söylenebilir. Çünkü spesifik iki küme arasındaki ilişki yerine daha genel bir ilişkiyi araştırmışlardır. Yöntemsel olarak benzer bir yanılgı içerisinde oldukları söylenemez. Ancak ulaştıkları sonuç ispatın amacına hizmet etmemektedir.

Bu alt kategoride yer alan bireylerden birinin cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



Görüldüğü gibi böyle bir yaklaşımı benimseyen öğrenciler istedikleri herhangi iki açık aralık tanımlayarak bunların denk olduğunu uygun bir yöntem ile gösterdiler ve sonuca ulaştıklarını varsaydılar.

Öğrencilerin bir kısmı da kendilerine sunulan teoremi aşağıdaki gibi yorumladılar.

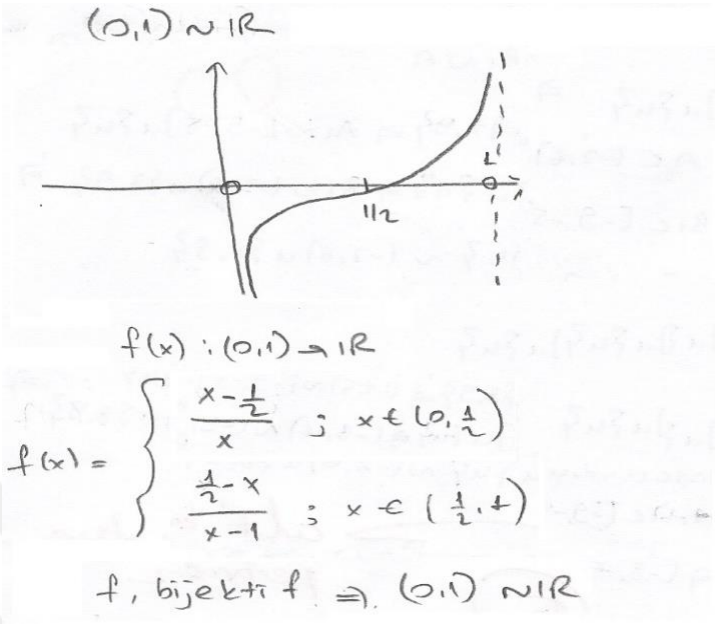
'' ℝ, gerçel sayılar kümesi boştan farklı her açık aralığa denktir.''

Bu öğrenciler de verilen teoremi gerçel sayılar kümesinin, bir öz alt kümesi olan her açık aralığa denk olması şeklinde yorumlamışlardır. İspat yaklaşımlarını da bu çerçevede şekillendirmişlerdir. Bir öncekine benzer olarak bu kategoride de bireylerin daha fazla aşina oldukları durumları kendilerine referans alarak bir yorumda bulundukları söylenebilir. Bir önceki ispat yaklaşımına benzer olarak bu kategori de ön-deneyimlerin ispat sürecine etkisini örneklemek açısından önemli görülmektedir.

Bu öğrenciler de ispatı ele alış yöntemlerine göre iki başlık altında sınıflanabilir:

i. Bazı öğrenciler ℝ gerçel sayılar kümesinin, öz alt kümesi olan herhangi açık aralığa denk olduğunu gösterebilmek için keyfi bir açık aralık seçtiler. Daha sonra

bu aralığın ℝ, gerçel sayılar kümesine denk olduğunu uygun bir eşleme ile gösterdiler.



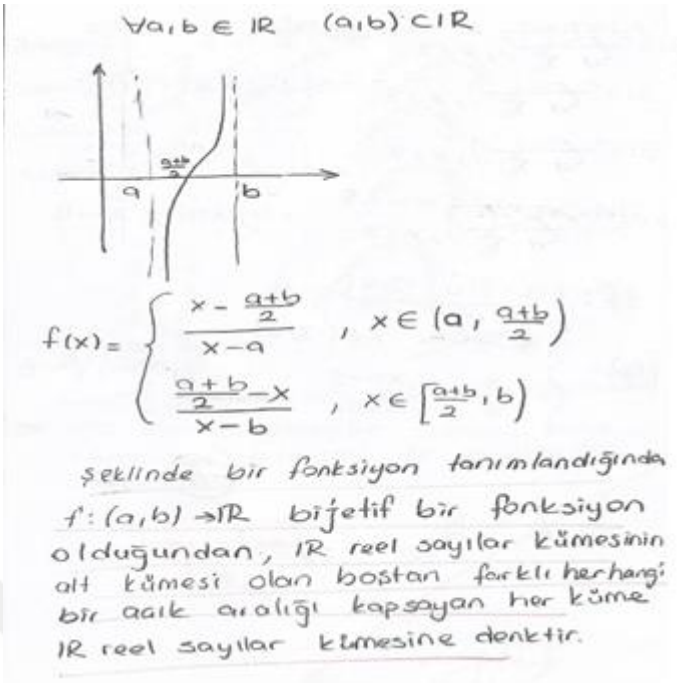
Örnekte de görüldüğü gibi yaklaşımı sunulan öğrenci, kendisine sunulan teoremi kanıtlamak için keyfi bir açık aralık olan (0,1) aralığını seçerek bunun ℝ, gerçel sayılar kümesine denkliğini göstermiştir.

Bu tarz yaklaşımları benimseyen öğrencilerin teoremi yorumlamadaki yetersizliklerine ek olarak yöntemsel yanılgılarından da bahsedilebilir. Özel durum için geçerli olanın genel durum için de daima geçerli olacağını varsayarak yanılgıya düşmüşlerdir. Sundukları bir ispat değil örnektir. Bu örnek teoremin doğruluğuna ilişkin bir delil olarak değerlendirilebilir ancak bir kanıt olarak değerlendirilemez.

ii. Teoremi benzer şekilde yorumlayan bazı öğrenciler de yaklaşımlarında keyfi aralıkları kullanmak yerine cebirsel değişkenler kullanarak aralıklar tanımladılar. Böylece spesifik aralıklar üzerden hareket etmek yerine her aralık için geçerli olabilecek genel temsillerden bir sonuca ulaşmaya çalıştılar.

Bu öğrencilerin spesifik durumlar yerine genel durumlar üzerinde düşüncelerini ispatlamaya çalışmaları daha formal bir yaklaşım olarak değerlendirilebilir. Ancak oluşturulan ispat doğrudan teoremin kendisini ifade etmemektedir.

Bu alt kategoride yer alan cevaplardan biri örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



Örnekte de görüldüğü gibi öğrenci kendisine sunulan ispatı gerçekleştirmek için (a,b) açık aralığını tanımlamış ve bu aralığın $\mathbb{R}$ kümesine denk olduğunu tanımladığı bijektif fonksiyon yardımı ile göstermiştir.

Öğrencilerin bir kısmı da kendilerine sunulan teoremi doğru yorumladılar ve *Schröder-Bernstein* teoremini kullanarak ispata ulaşmaya çalıştılar. Ancak bu teoremin kullanılması gerektiğini fark eden öğrencilerin tamamı formal ispata ulaşamamışlardır. Öğrencilerden büyük bir çoğunluğu teoremi uygun bir şekilde kullanamadıkları için süreci tamamlayamadılar. Diğer yandan az sayıdaki öğrenci formal ispata ulaşabilmiştir.

Bu durum ispat sürecinde doğru kavramları seçmek kadar onların yeterli düzeyde kullanılmasının da önemli olduğunu göstermektedir. Bir ispat sürecinde ön bilgiler arasından doğru kavramların seçilmesi yeterli değildir. Bu kavramlar arasında mantıksal ilişkilerin kurulması ve seçilen kavramların işlevsel boyutta da etkin bir şekilde kullanılması gerekmektedir. Bu kategoride yer alan öğrenciler yukarıda belirtildiği gibi ispata ulaşabilme düzeylerine göre iki başlık altında sınıflanabilir:

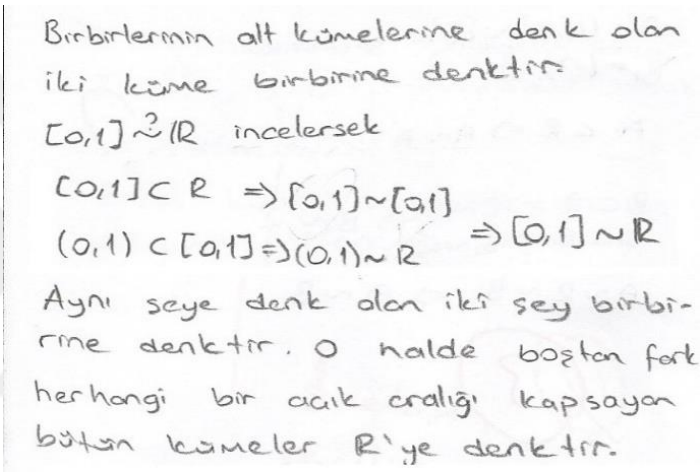
i. İlk grupta yer alan öğrenciler ispata bu teoremi le ulaşılabileceğini ifade ettiler. Ancak teoremi uygun bir şekilde kullanarak ispata ulaşamadılar.

Bazı öğrenciler teoremi kullanarak ispata ulaşmaya çalışsa da başarılı olamadılar. Bu öğrencilerin yaklaşımları üç gruba ayrılabilir.

i. Bazı öğrenciler bu teorem ile sonuca ulaşılabileceğini ifade ettiler. Ancak herhangi bir çaba sergilemediler.

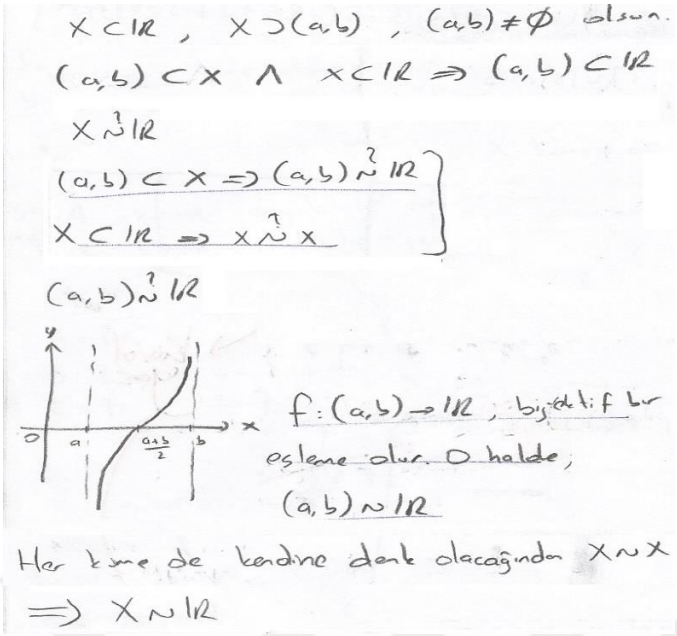
ii. Bazıları da Schröder-Bernstein teoremini kullanarak örnek durumlar oluşturmaya çalıştılar ancak bu örnekleri formal ispat sürecine uyarlayamadılar.

Sonuç olarak bu kategorideki öğrenciler formal bir ispat oluşturamadılar. Bu alt kategoride yer alan bireylerden birinin cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.


Birbirlerinin alt kümelerine denk olan iki küme birbirine denktir.
$[0,1] \overset{?}{\sim} \mathbb{R}$ incelersek
$[0,1] \subset \mathbb{R} \Rightarrow [0,1] \sim [0,1]$
$(0,1) \subset [0,1] \Rightarrow (0,1) \sim \mathbb{R}$ $\Rightarrow [0,1] \sim \mathbb{R}$
Aynı seye denk olan iki şey birbirine denktir. O halde boştan fark herhangi bir açık aralığı kapsayan bütün kümeler $\mathbb{R}$'ye denktir.

Görüldüğü gibi sunulan örnekte yer alan yaklaşımı benimseyen öğrenci Schröder-Bernstein teoreminin tanımını uygun bir şekilde kullanarak bir açık aralığı kapsayan bir küme örneği belirlemiş ve bu kümenin $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesine denkliğinin nasıl gösterilebileceğini ifade etmiştir. Diğer yandan bu da sadece teoreme uygun bir örnektir. Formal ispat olarak değerlendirilemez.

ii. Bu teoremin kullanılması gerektiğini belirleyen az sayıdaki öğrenci de formal ispata ulaşabilmişlerdir. Bu alt kategoride yer alan bireylerden birinin cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



2.Soruya verilen cevaplar ve analizi

Genel Uygulama IV formunun ikinci sorusuna verilen yanıtlar üzerinde yapılan içerik analizi sonucu elde edilen kategoriler ve alt kategorilere ait özet tablo aşağıda sunulmuştur.

Tablo 14

Genel Uygulama IV - İkinci soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar

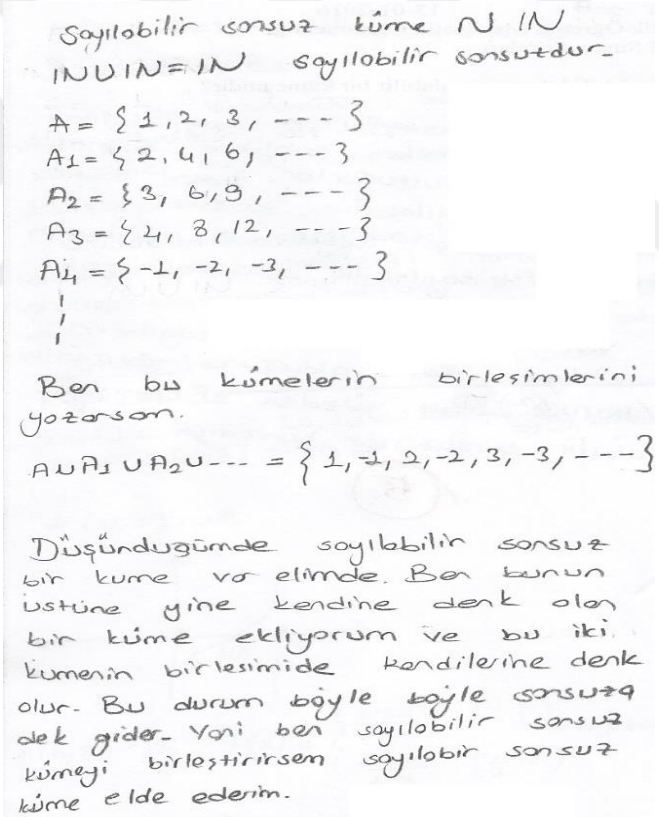
Soru: Sayılabilir sonsuz tane sayılabilir sonsuz kümenin birleşimi sayılabilir sonsuzdur, gösteriniz.	**Kişi Sayısı**
Soruya Yanıt Vermeyenler	**31**
Kullanılan İspat Yöntemleri	
i. Uygun örnekler vererek teoremin doğru olduğunu gösterenler.	**32**
ii. $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{N}^2$ kümelerinin denkliğinden yararlananlar.	**6**
iii. Hilbert Oteli Analojisini oluşturanlar.	
a. İspatı oluşturamayanlar	**8**
b. İspatı oluşturabilenler	**7**
iv. Cebirsel yaklaşım ile sonlu durum için doğruluğu gösterenler.	**7**
v. Formal cebirsel biçimde ispatı oluşturanlar.	**9**
Toplam	**100**

Bir önceki soruya benzer şekilde bu soruda da öğrencilerden spesifik iki kümenin denk olup olmadığının belirlenmesi istenmemektedir. Teorem içerisinde sunulan genel ilişkinin uygun bir yaklaşım ile kanıtlanması istenmiştir.

Öğrencilerin İspat Yaklaşımları

Sunulan teoremi ispatlamak isteyen öğrenciler farklı yaklaşımları kullanmışlardır. Kullanılan bu yaklaşımlar aşağıda sunulmuştur.

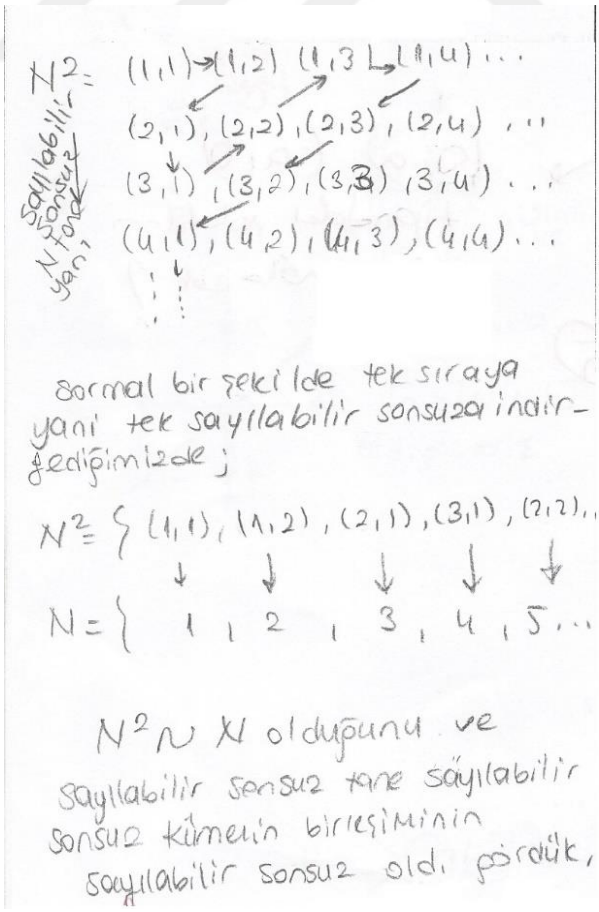
Öğrencilerin bir kısmı teoremin doğruluğunu gösteren uygun örnekler sunmuşlardır. Ancak verdikleri bu örneklerin doğruluğundan hareketle teoremi ispatladıklarını varsaymışlardır. Bu alt kategoride yer alan öğrencilerin vermiş oldukları cevaplardan biri örnek olarak aşağıda sunulmuştur.


Sayılabilir sonsuz küme N IN
INUIN=IN sayılabilir sonsutdur.
$A = \{1, 2, 3, ---\}$
$A_1 = \{2, 4, 6, ---\}$
$A_2 = \{3, 6, 9, ---\}$
$A_3 = \{4, 8, 12, ---\}$
$A_4 = \{-1, -2, -3, ---\}$
!
!
Ben bu kümelerin birleşimlerini yazarsam.
$A \cup A_1 \cup A_2 \cup --- = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, ---\}$
Düşündüğümde sayılabilir sonsuz bir kume ve elimde. Ben bunun üstüne yine kendine denk olan bir küme ekliyorum ve bu iki kumenin birleşimide kendilerine denk olur. Bu durum böyle böyle sonsuza dek gider. Yani ben sayılabilir sonsuz kümeyi birleştirirsem sayılabir sonsuz küme elde ederim.

Görüldüğü gibi yukarıdaki yaklaşımı benimseyen öğrenci, teoremi formal (*cebirsel yol*) biçimde ile ispatlamak yerine uygun bir örnek durum oluşturmayı tercih etmiştir. Diğer bir ifade ile teoremi ispatlamak için formal cebirsel bir yapı oluşturamamıştır. Bunun yerine, teoremde sunulan ilişkilerin bu örnek durum için geçerli olduğunu göstererek ispatı tamamladığını ifade etmiştir. Başka bir ifade ile

örnek için geçerli olan bu ilişkinin tüm durumlar için geçerli olması gerektiğini belirtmiştir. Yaptığı yapılan bu işlem bir kanıt olarak değerlendirilemez. Bu bir argümantasyon olarak değerlendirilebilir. Çünkü öğrenci durumun doğru olduğunu gösterebilecek bir delil sunmanın ötesine geçememiştir. Diğer yandan sınırlı sayıda örnek durumdan edilen bu sonucun tüm durumlar için geçerli olduğunun varsayılması ispat yaklaşımları açısından bir yanılgı olarak değerlendirilebilir. Çünkü sonlu sayıda örnek durumdan elde edilen durumların tüm evrene genellenmesi doğru olmayacaktır. Bu yaklaşım ile önermede sunulan duruma uygun olmayan örneklerin olabileceği gerçeği kanıtsız bırakılır. Başka bir deyiş ile göz ardı edilir. Dolayısı böyle bir yaklaşım bir cebirsel açıdan ispat olarak değerlendirilemez.

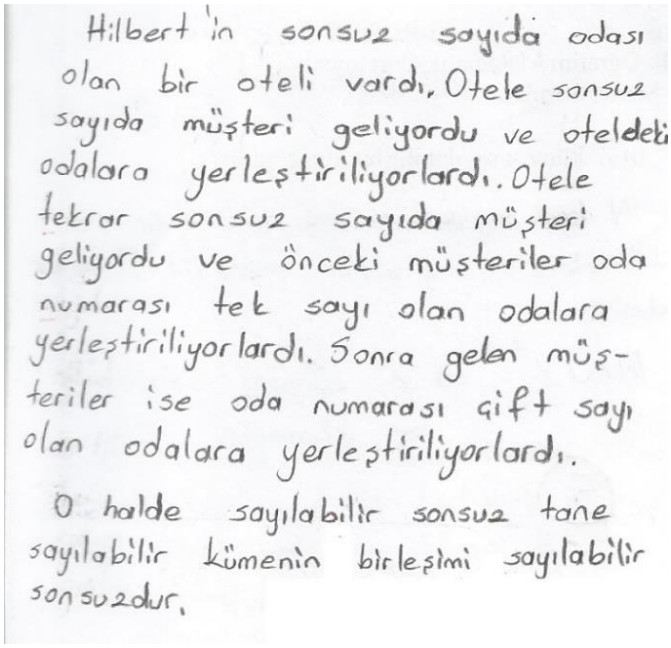
Örnek verme yaklaşımını kullanan öğrencilerin bir kısmı daha spesifik bir örnek verdikleri için ayrı bir kategoride değerlendirilmişlerdir. Bu öğrenciler teoremi ispatlamak için $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{N}^2$ kümelerinin denkliğinden yararlanmışlardır. Bu alt kategorideki öğrencilerden birinin cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



Örnekten de görüldüğü gibi bu yaklaşımı kullanan öğrenciler, $\mathbb{N}^2$ kümesini sıralı ikililer yardımı ile satırlar halinde yazdılar. Böylece bu kümenin sayılabilir sonsuz tane sayılabilir sonsuz kümeden oluştuğunu gösterdiler. Ardından da bu kümenin doğal sayılara denk olduğunu uygun bir sıralama göstererek $\mathbb{N}^2$ kümesinin, doğal sayılar kümesine denkliğini ifade ettiler.

Öğrencilerin yaklaşımları incelendiğinde teoremin doğruluğunu gösteren bir örnek sundukları söylenebilir. Bu noktada formal açıdan ispatın tamamlandığı da söylenemez. Çünkü bir önceki alt kategoride olduğu gibi bu alt kategoride de öğrenciler tek örnekten genellemeye ulaşmışlardır. Ancak seçilen örnek ve oluşturulan yapı bakımından teoremde sunulan ilişkiler ile bir paralellik söz konusudur. Dolayısı ile bu öğrencilerin daha formal bir düşünme biçimine sahip oldukları söylenebilir. Bu nedenle ayrı başlık altında ele alınmışlardır.

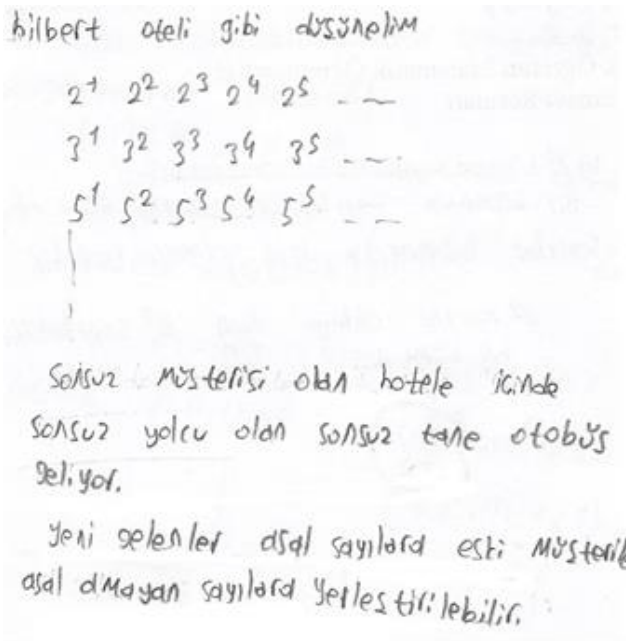
Öğrencilerden bazıları teoremi ispatlamak için Hilbert Oteli analojisinden yararlandılar. Bu analojide kümeler otel ve otobüs gibi gündelik yaşam kavramları ile modellenmektedir. Bu analojiyi oluşturan öğrencilerden bazıları istenen durumu modelleyebilmiş ve sonuca ulaşabilmiştir. Diğer yandan aynı modeli kullanmayı düşünen öğrencilerden bazıları istenen sonuca ulaşamamışlardır. Durumu uygun bir şekilde modelleyemeyen öğrencilerden birinin açıklaması örnek olarak aşağıda sunulmuştur.


Hilbert'in sonsuz sayıda odası olan bir oteli vardı. Otele sonsuz sayıda müşteri geliyordu ve oteldeki odalara yerleştiriliyorlardı. Otele tekrar sonsuz sayıda müşteri geliyordu ve önceki müşteriler oda numarası tek sayı olan odalara yerleştiriliyorlardı. Sonra gelen müşteriler ise oda numarası çift sayı olan odalara yerleştiriliyorlardı.

O halde sayılabilir sonsuz tane sayılabilir kümenin birleşimi sayılabilir sonsuzdur.

Bu örnekte otobüs ve otel sayılabilir sonsuz kümeleri temsil etmektedirler. Otel dolu iken sonsuz müşterinin denk gelmesi ile oluşan durumda *sayılabilir sonsuz iki kümenin birleşimi* modellenmektedir. Diğer yandan teoremde sayılabilir sonsuz tane sayılabilir sonsuz kümenin birleşiminden bahsedilmektedir. Dolayısı ile öğrencinin yaklaşımı yetersizdir. Bu yetersizliğin sebeplerinden biri öğrencilerin teoremi yanlış yorumlamamaları olabilir. Öğrenciler sonsuz küme için geçerli olduğunu ifade edilen bu ilişkiyi kısıtlı bir algılayış ile sayılabilir sonsuz iki kümeye indirgeyerek yorumlamış olabilirler. Bu yetersizliğin sebeplerinden bir diğeri de öğrencilerin genelleyici düşünme biçimleri olabilir. Öğrenciler sayılabilir sonsuz iki kümenin birleşiminin sayılabilir olduğunu kullandıkları metaforlar ile ifade edebilmişlerdir. Bu noktanın devamında sayılabilir sonsuz iki küme için elde ettikleri bu sonucu sonsuz tane küme için geçerli kabul etmiş olabilirler. İspatlanmadan doğruluğu kabul edilen her önerme sadece bir varsayım olarak nitelendirilebilir. Dolayısı ile öğrencilerin ulaştıkları sonuç doğru olsa da ispatı tamamladıkları söylenemez. Bu kategori içerisinde bahsedilen genelleyici yaklaşımın tümevarımsal düşünce ile ilişkili olduğu söylenebilir. Bu iki kavram arasındaki ilişki bir sonraki kategori içerisinde açıklanacaktır.

Hilbert Oteli analojisi ile durumu modellemek isteyen öğrencilerin büyük çoğunluğu sonlu sayıda küme için geçerli olabilecek örnekler verdiler. Bazıları da bu analoji ile sonlu sayıda eleman içeren kümeleri kullanarak yanılgıya düştüler. Diğer yandan bazı öğrenciler bu yaklaşım ile uygun modeller üretebildiler. Bu noktada aşağıda sunulan öğrencinin yaklaşımı incelenebilir.



Görüldüğü gibi öğrenci otobüsle otele yeni gelen kişilerin asal sayıların kuvvetlerine yerleştirilebileceğini, önceden otelde olan kişilerin de asal olmayan diğer sayılara yerleştirilebileceğini ifade etmiştir. Böylece sayılabilir sonsuz tane otobüsle yeni gelen kişiler ve önceki müşteriler otele yerleştirilmiş olacaktır. Bu öğrencinin yaklaşımının $\mathcal{P}$, asal sayılar kümesi için geçerli olan aşağıdaki teorem çiftine dayandığı söylenebilir.

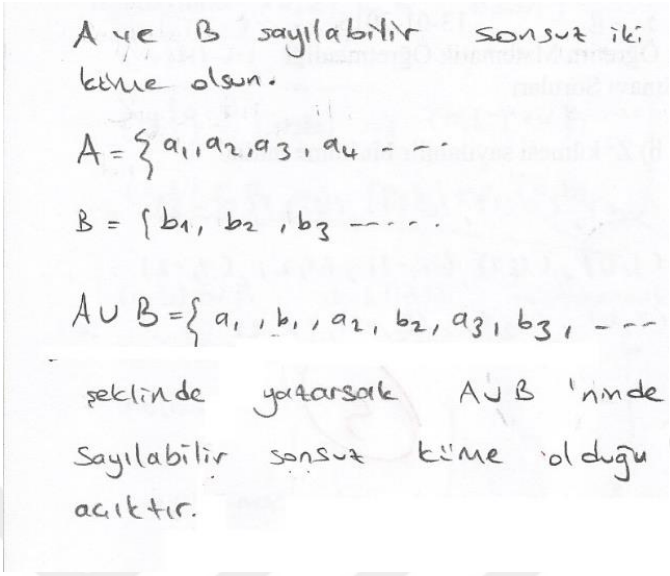
$\forall\, p \in \mathcal{P}$ için $p^k = p^m \Leftrightarrow k = m$ ve $\forall p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ ve $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$ için $p_1 \neq p_2$ ise $p_1^a \neq p_2^b$

Böyle bir yaklaşım ile sayılabilir sonsuz tane sayılabilir sonsuz kümenin birleşiminin sayılabilir sonsuz olduğu uygun bir biçimde modellenmiş olur. Öğrencilerin teoremdeki ilişkilere uygun üst düzey düşünebildikleri söylenebilir. Diğer yandan daha önce de açıklandığı gibi formal ispatın iki temel bileşeninden söz edilebilir. Bunlardan ilki sunulan önermelerin neden doğru olduğunu ifade eden mantıksal bağlardır. Mantıksal bağlar, seçilen ön bilgiler arasında oluşturulan anlamlı ilişkiler olarak nitelendirilebilir. İspatın ikinci bileşeni ise tüm mantıksal bağların aktarıldığı dildir. Başka bir ifade ile formal bir ispat uygun matematiksel dili de içerisinde barındırmalıdır. Bu analojiyi oluşturan bireylerden istenen sonuca ulaşabilenlerin, model yardımı ile uygun bağlar oluşturabildikleri söylenebilir. Ancak kullandıkları matematiksel dil yetersizdir. Bu yaklaşım düşünce ve çıkarımların sözel temsiller ile aktarımına dayanmaktadır. Bu nedenle formal bir ispatın bileşenleri açısından yetersizlikler olduğu söylenebilir.

Teoremi kanıtlamak isteyen bazı öğrenciler de cebirsel bir yaklaşım benimsemişlerdir. Bu öğrencilerin yaklaşımlarının temelini değişkenler ile tanımladıkları sayılabilir kümeler oluşturmaktadır. Öğrenciler uygun değişkenler seçerek sayılabilir kümeler tanımlamışlar ve bu kümelerin birleşiminin de sayılabilir olduğunu göstermek istemişlerdir. Ancak bu yaklaşımı kullanan öğrencilerin bir kısmı formal ispata ulaşabilirken bir kısmı da formal ispata ulaşamamışlardır.

Formal ispata ulaşamayan öğrencilerin yaşadıkları temel güçlük sonlu sayıda sayılabilir küme için teoremin geçerli olduğunu göstermeleridir. Bu öğrenciler sonlu sayıda (neredeyse tamamı iki tane) sayılabilir kümeyi tanımlayarak

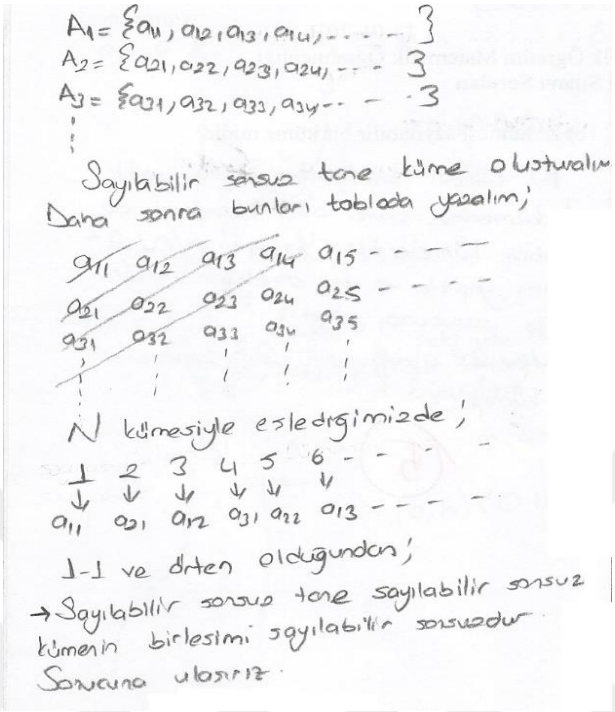
birleşimlerinin sayılabilir olduğunu gösterdiler. Bu alt kategoride yer alan öğrencilerden birinin yaklaşımı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



Örnekten de görüldüğü gibi öğrencinin cebirsel yaklaşımı da doğrudur. Diğer yandan sunulan teoremi ‘’ *Sayılabilir sonsuz iki kümenin birleşimi sayılabilirdir.* ‘’ şeklinde yorumlamış olabilir. Çünkü sadece iki tane sayılabilir sonsuz kümenin birleşiminin sayılabilir olduğunu göstermiştir.

Öğrenci ile genelleyici bir düşünce ile hareket ediyor olabilir. Sayılabilir sonsuz iki kümenin birleşimi sayılabilir olduğu için sayılabilir sonsuz tanesinin de sayılabilir olduğu genellemesine ulaşmış olabilir. Öğrenci böyle bir düşünme biçimi ile hareket ediyor ise tümevarımsal düşünmektedir. Sonucu açısından doğru olan bu yaklaşım ispat süreci açısından uygun değildir. Tümevarım yaklaşımı ile düşünüldüğünde bir önermenin ilk adımı için doğru olduğunun gösterilmesi sadece önermenin doğruluğunu anlamayı sağlar. Bu adım önermenin ispatına karşılık gelmez. Başka bir ifade ile ilk adımın doğruluğunun gösterilmesi tüm adımların [*n. adımın*] doğruluğunun gösterilmesine karşılık gelmez. Bu örnekte öğrenci iki küme için önermenin doğru olduğunu göstererek ilk adımı geçmiştir. Diğer yandan bunun her zaman geçerli olduğunu henüz göstermemiştir. İspatın amacı teoremin doğruluğunun sistematik bir şekilde gösterilmesi ve açıklanmasıdır. Bu yaklaşımın sunulan teoreme uygulanabilmesi için sayılabilir sonsuz tane sayılabilir sonsuz kümenin sayılabilir olduğunun uygun bir biçimde gösterilmiş olması gerekir.

Diğer yandan cebirsel yaklaşımı kullanan bazı öğrenciler de formal ispata ulaşabilmişlerdir. Bir örnek aşağıda sunulmuştur.



Bu öğrenciler (*genel olarak*) uygun cebirsel gösterimler ile sayılabilir kümeler tanımladılar. Ardından bu kümelerin birleşimi olan kümeyi uygun bir yöntem ile oluşturdular. Son olarak bu birleşim kümesinin ℕ, doğal sayılar kümesine denk olduğunu gösterdiler. Böylece sayılabilir sonsuz tane sayılabilir sonsuz kümenin birleşiminin sayılabilir sonsuz olduğunu göstermiş oldular. Bu öğrencilerin yaklaşımının hem Cantor tarafından ortaya konan denklik felsefesi açısından hem de formal bir ispatın bileşenleri açısından doğru olduğu sonucuna ulaşılabilir.

Diğer yandan bu soruya cevap vermeyen öğrencilerin sayısı 31 olarak belirlenmiştir. Bu sayı tüm uygulamalarda cevapsız bırakılan soru sayısından daha fazladır. Bu durumun sebeplerinden biri teoremin (*sözel ifadesinin*) çok sayıda değişken ve bunlar arasındaki ilişkiyi içeriyor olması olabilir. Başka bir ifade ile önerme öğrenciler tarafından anlaşılamamış olabilir. Benzer olarak teoremi dil açısından anlayabilen öğrencilerin de yorumlamakta güçlük yaşamış oldukları söylenebilir. Pek çok öğrenci kümeler ve sayılabilirlik ilişkisini istenen düzeyde anlamlandıramadığı için soruyu yanıtsız bırakmış olabilirler. Öğrencilerin bu

soruya yanıt vermemelerinin bir diğer sebebi de yanlış yapma korkusu ile düşüncelerini açıklamaktan çekinmeleri olabilir.

3.Soruya verilen cevaplar ve analizi

Genel Uygulama IV formunun üçüncü sorusuna verilen yanıtlar üzerinde yapılan içerik analizi sonucu elde edilen kategoriler ve alt kategorilere ait özet tablo aşağıda sunulmuştur.

Tablo 15

Genel Uygulama IV - Üçüncü soruya verilen yanıtlardan elde edilen temalar

Soru: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi sayılabilir midir? İspatlayınız.	**Kişi Sayısı**
Sayılabilir Olabileceğini Belirtenler	**86**
i. Sayılabilir bir kümedir deyip bırakanlar	15
ii. $\mathbb{R} = \bar{Q} \cup \mathbb{Q}$ eşitliğini yanlış yorumlayanlar	14
iii. Rasyonel sayılar kümesi ile ilgili bilgi eksiği/yanlışı olanlar	16
iv. $\frac{p}{q}$ sayıları için $p+q$ toplamından hareket edenler	5
v. Elemanları Listelemeye çalışıp başarısız olanlar.	
a. Gelişigüzel sıralama yapanlar	6
b. Tablo(*satır*) yaklaşımını kullananlar	3
c. Koordinat sisteminden yararlananlar.	10
vi. Elemanları sıralamaya çalışıp başarılı olanlar	
a. Tablo(satır) yaklaşımını kullananlar	3
b. Koordinat sisteminden yararlananlar	14
Cevap Vermeyenler	**13**
Sayılabilir Olmadığını Belirtenler	**1**
Toplam	**100**

Bu soru ile öğrencilerin sayılabilirlik kavramına ilişkin yaklaşımları belirlenmesi amaçlanmıştır Uygulama öncesinde öğrencilere ℚ, rasyonel sayılar kümesinin sayılabilirliğine ilişkin herhangi bir bilgi sunulmamıştır. Dolayısı ile bu soruda onlardan kendi çabaları ile bir sonuca ulaşmaları beklenmektedir. Böylece öğrencilerin hem ℚ rasyonel sayılar kümesine hem de sayılabilirlik kavramına ilişkin yaklaşımlarının belirlenmesi amaçlanmıştır.

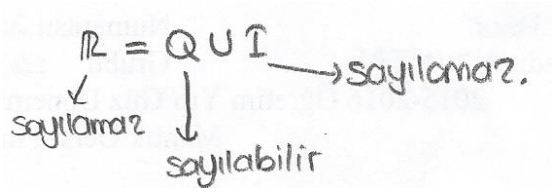
Bu sorudan elde edilen cevaplar üzerine içerik analizi uygulanmış ve elde edilen kategoriler aşağıda sunulmuştur.

i. Sayılabilir olduğunu belirtenler

Çalışmaya katılan öğrencilerin neredeyse tamamı ℚ, rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Bu sonuca ulaşan öğrenciler farklı yaklaşımları kullanmışlardır. Bunlar aşağıda sunulmuştur.

Kümelerin denk olduğunu ifade eden bazı öğrenciler, bu görüşlerini detaylandırmamışlardır. Bu kategoride yer alan öğrenciler genel olarak ℚ, rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu belirtmekle yetinmişlerdir. Düşünme süreçlerinin geneline ait bir açıklama söz konusu olmamışlardır. Sadece bu düşünme sürecinin sonucu paylaşmışlardır. Bu öğrencilerin gelişigüzel cevap verdikleri ya da çeşitli sebepler ile düşüncelerini açıklamaktan çekindikleri sonucuna ulaşılabilir.

Bazı öğrenciler de ℚ, rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir olduğu sonucuna $\mathbb{R} = \bar{Q} \cup \mathbb{Q}$ eşitliğini yanlış yorumlayarak ulaşmışlardır. Bu öğrencilere göre ℝ, gerçel sayılar kümesi ve $\bar{Q}$, irrasyonel sayılar kümesi sayılamaz olduğu için ℚ sayılabilir bir küme olmalıdır.



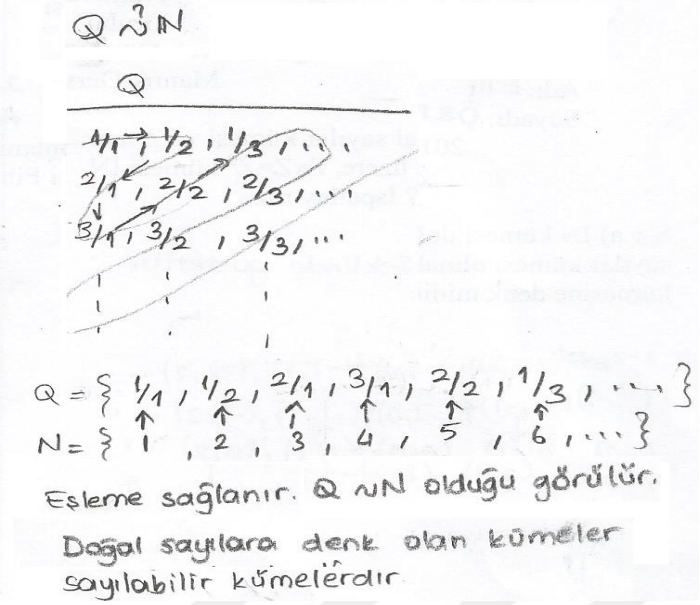
Burada ifade edilen sonuç doğru olsa da bu yaklaşım eksik noktalar içermektedir. Birincisi ℚ, irrasyonel sayılar kümesinin sayılamaz olduğu belirtilmiş

ancak neden sayılamaz olduğu ifade edilmemiştir. Formal bir ispat için bu önermenin kanıtlanması gerekmektedir. Bu kümenin bir ispatı olmaksızın sayılamaz olduğunun belirtilmesi sadece bir kabul ifade eder. Diğer yandan I, irrasyonel sayılar kümesinin sayılamaz olduğu ispatlanmış olsa bile $\mathbb{R} = \bar{Q} \cup \mathbb{Q}$ eşitliği $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir olmasını gerektirmez. Çünkü sayılamaz bir küme olan $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi, iki sayılamaz kümenin birleşimi de olabilir. $\mathbb{Q}$ kümesinin sayılabilir olduğu gösterilebilirse $\mathbb{R} = \bar{Q} \cup \mathbb{Q}$ eşitliği gereği $\bar{Q}$, irrasyonel sayılar kümesinin sayılamaz olduğu sonucuna ulaşmayı sağlayabilir. Ancak sunulan bu yaklaşım ile $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir olduğu sonucuna ulaşılamaz. Dolayısı ile bu öğrencilerin hem ispat yaklaşımlarının hem de kavramsal temellerinin yetersiz olduğu söylenebilir.

Bu soruya yönelik incelemelerde kavram yanılgılarının pek çok noktada öğrencilerin ispat süreçlerini etkilediği gözlenmiştir. Azımsanmayacak sayıdaki öğrencinin $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesi ile ilgili kavram yanılgısına sahip olduğu tespit edilmiştir. Verilerin analizinde karşılaşılan öğrencilerin rasyonel sayılar kümesi ile ilgili başlıca yanılgıları aşağıda sunulmuştur.

- Rasyonel sayılar daima pozitiftir.
- Rasyonel sayılar $\frac{1}{x}, x \in \mathbb{Z} - \{0\}$ şeklinde tanımlı bir kümedir.
- Bir rasyonel sayıda pay ve payda aralarında asal olmak zorunda değildir.
- $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Z}x\,\mathbb{Z}$-{0} kümesine eşittir.

İspatı seçtikleri bir yöntem ile gerçekleştirmeye çalışan bu öğrenciler sahip oldukları kavram yanılgıları nedeni ile formal açıdan doğru bir ispat üretemediler. Bazı öğrenciler $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar ve $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümelerinin denk olabileceği sonucuna ulaşsalar da yaklaşımları bir yanılgı ile şekillendiğinden formal kabul edilmedi. Bu alt kategoride yer alan öğrencilerden birinin cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



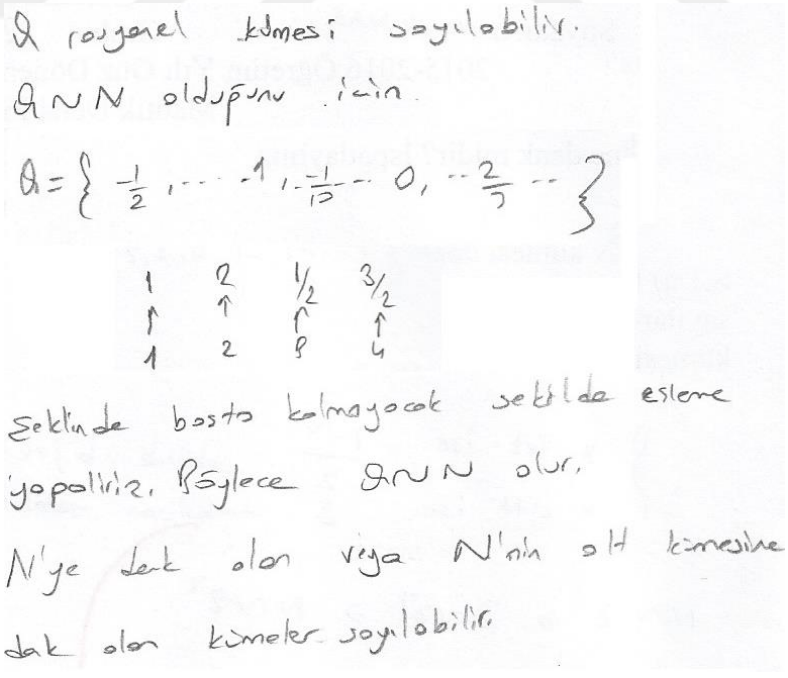
Kesirlerin oran kümesi olan Rasyonel Sayılar, $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, (a,b=1)\}$ şeklinde tanımlanan bir kümedir. Yukarıdaki örnekte öğrencinin rasyonel sayıları daima pozitif kabul ettiği ve pay ile paydanın aralarında asal olması gerektiğini göz ardı ettiği söylenebilir. Dolayısı ile öğrencinin kavramsal temel yönünden eksikleri olduğu açıktır. Bu nedenle ulaştığı sonuç doğru olsa da ispatı geçerli kabul edilmemiştir.

Kavramsal temel, ispat sürecinden ayrı düşünülemez. İspat sürecinin temelini oluşturan kavramlar ile ilgili yanılgılar bireylerin formal açıdan doğru bir ispata ulaşmasını engelleyebilir. Dolayısı ile kavramsal temel, formal bir ispatın ön şartlarından birini oluşturur. Öğrencilerin istenen formal ispata ulaşabilmeleri için ilgili kavramlara hâkim olmaları ve bunları işlemsel düzeyde etkin bir şekilde kullanabilmeleri gerekmektedir. Bu açıdan ispat sürecinin çok boyutlu bir süreç olduğu ve öğrencilerin önceki öğrenmelerinden doğrudan etkilendiği söylenebilir. Öğrencilerin ispat becerilerinin geliştirilmesi için yeterli kavramsal temellerinin oluşturulması gerektiği söylenebilir. Çalışma içerisinde soruların analizinde ortaya çıkan bu alt kategoriler, bahsedilen güçlüklerin fark edilmesi bakımından önemlidir.

ℚ, rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu kanıtlamak isteyen bazı öğrenciler de bu kümenin elamanlarını izah edilebilir bir şekilde sıralamaya veya listelemeye çalıştılar. Bu noktada bazı öğrenciler tablo veya satır yaklaşımlarını kullanmayı tercih ettiler.

ℚ, rasyonel sayılar kümesinin elemanlarını sıralayarak ℕ, doğal sayılar kümesine eşlemeyi amaçlayan öğrencilerin çoğu bu amaçlarını gerçekleştiremediler. Çünkü rasyonel sayılar kümesini sıralayabilecek bir algoritma bulamadılar. Bunun temel sebebi ℕ, doğal sayılar kümesinin veya ℤ, tam sayılar kümesinin aksine ℚ, rasyonel sayılar kümesinin elemanlarının alışılmış bir sıra ile (*tek tek*) yazılamamasıdır. Elemanları sıralamakta güçlük çeken öğrencilerden bazıları ℚ, rasyonel sayılar kümesinden seçtikleri bazı elemanları gelişigüzel sıralayarak ℕ, doğal sayılar kümesine eşleme yaptılar ve buradan hareketle sayılabilirlik sonucuna ulaştılar.

Bu alt kategoride yer alan öğrencilerden birinin cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.

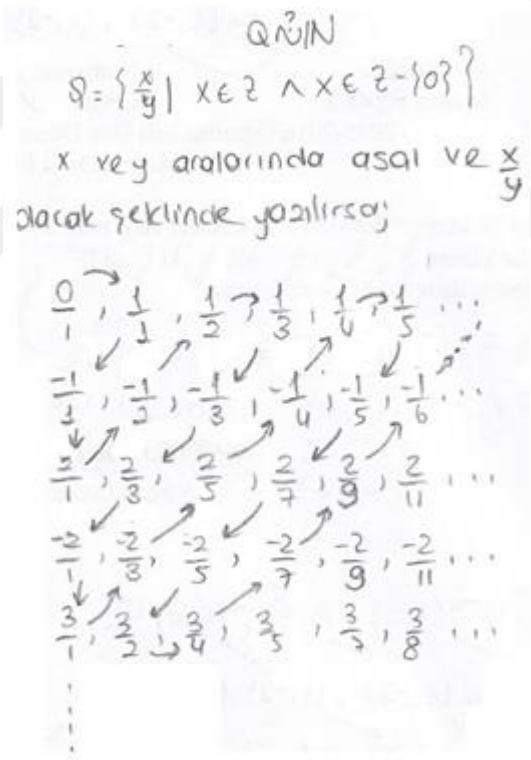


Örnekten de görüldüğü gibi sunulan yaklaşımı benimseyen birey, ℚ rasyonel sayılar kümesinin elamanlarını uygun bir şekilde sıralayamamış ve seçtiği keyfi elemanlar ile rastgele bir eşleme oluşturmuştur. Bu eşlemenin bir kuralı ya da

izah edilebilirliği söz konusu değildir. Dolayısı ile ispat için yeterli olduğu söylenemez. Bu açıdan bakıldığında böyle bir yaklaşım ile kümelerin denkliğinin varsayılması sezginin ya da kabulün ötesinde değerlendirilemez. Çünkü iki sonsuz kümenin denk olduğuna karar verilebilmesi için bunlar arasında izah edilebilir bijektif bir eşlemenin tanımlanabilmesi gerekmektedir.

Diğer yandan az sayıda öğrenci rasyonel sayılar kümesinin elemanlarını satır yaklaşımı kullanarak izah edilebilir şekilde sıralayabilmişlerdir. Bir düzen içerisinde ifade ettikleri bu elemanları doğal sayılar ile uygun biçimde eşleyerek sayılabilirlik sonucuna ulaşmışlardır.

Bu alt kategorideki öğrencilerden birinin cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



Görüldüğü gibi öğrenci ℚ, rasyonel kümesinin elemanlarını satırlar boyunca yazmış ve köşegen boyunca ilerleyerek doğal sayılara eşleyebilmiştir. Böyle bir yaklaşım ile kümenin elemanlarını ifade edebilen ve sayılabilirlik sonucuna ulaşabilen öğrencilerin sayısı 3 olarak belirlenmiştir.

Rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir (*doğal sayılara denk*) olduğunu kanıtlamak isteyen bazı öğrenciler de bu kümenin elemanlarını pay ve paydalarının

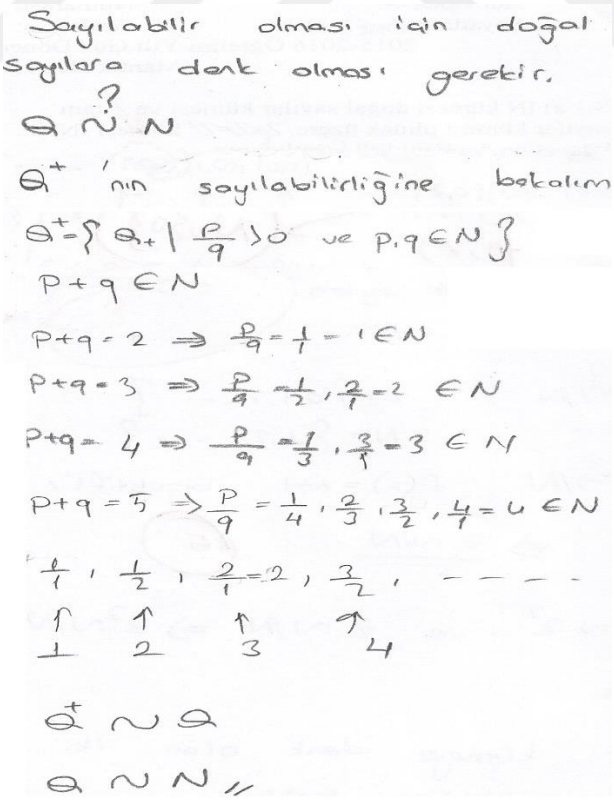
toplamı cinsinden sıralamaya çalıştılar. Bu yaklaşımı benimseyen öğrenciler p,q∈ℤ (p>0 ve q>0) için $\frac{p}{q}$ ∈ℚ elemanlarını p+q toplamının aldığı farklı değerlere göre belirlemek istediler. Örneğin bu yaklaşıma göre p+q=2 için sadece p=q=1 olabileceğinden 1 rasyonel sayısı yazılabilmektedir.

Bu öğrenciler toplamın alabileceği farklı değerleri göz önüne alarak sadece $\mathbb{Q}^+$ kümesinin elemanlarını oluşturabildiler. Bu aşamada öğrencilerin iki farklı yaklaşım sergilediği görülmüştür.

i. Bazı öğrenciler ℕ, doğal sayılar kümesinin sadece $\mathbb{Q}^+$ kümesine denk olduğunu belirtmekle yetinmişlerdir.

ii. Bazı öğrenciler de ℕ~$\mathbb{Q}^+$ olduğundan ℕ~ℚ olması gerektiği (*ispatlamadan*) varsaymışlardır.

Dolayısı ile her iki yaklaşımı benimseyen öğrenciler de formal ispata ulaşamadılar. Bu alt kategorideki öğrencilerden birinin cevabı aşağıda sunulmuştur.



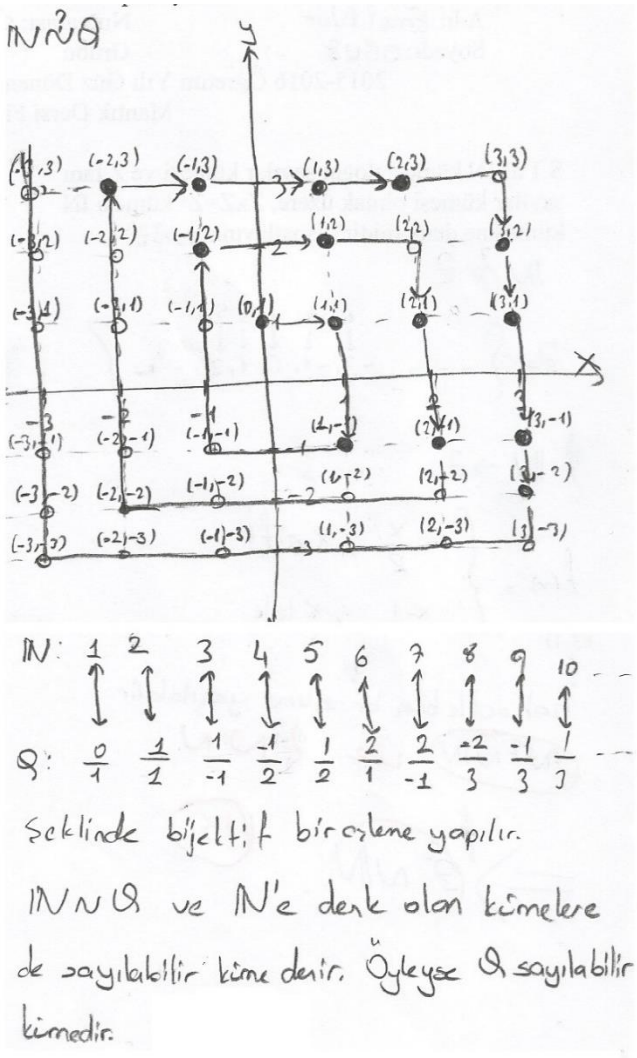
Rasyonel sayılar kümesinin elemanlarını bir algoritma ile belirlemek isteyen öğrencilerin bir kısmı da koordinat sisteminden yararlanmayı düşünmüşlerdir. Bu yaklaşımı kullanmak isteyen bireyler, kartezyen sistemdeki (a,b) noktaları ile $\frac{a}{b}$ şeklinde ifade edilebilen rasyonel sayılar arasında bir analoji oluşturmuşlardır. Bu öğrencilerin bir kısmı formal ispata ulaşabilirken bir kısmı da çeşitli sebepler ile ispata ulaşamamışlardır.

- İspata ulaşamayan bazı öğrenciler kartezyen sistemden rastgele noktalar seçerek rasyonel sayılar ile eşleme oluşturmuşlardır. Bu öğrencilerin gelişigüzel bir eşleme oluşturduğu ve bu nedenle yaklaşımlarının kabul edilemeyeceği söylenebilir.
- Bir kural formal ispata ulaşmaya çalışan bazı öğrenciler de kartezyen sistemde yer alan her (a,b) sıralı ikilisi ile bir $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı arasında eşleme yapmaya çalışmışlardır. Bu öğrencilerin yanılgıya düştüğü söylenebilir. Çünkü $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, (a,b=1)\}$ şeklinde düşünüldüğünde sadece belirli şartları sağlayan (a,b) noktaları ile bir $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı arasında eşleme yapılabileceği anlaşılabilir. Bu noktada öğrencilerin $\mathbb{Q}=\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ şeklinde düşündükleri için ispata ulaşamadıkları söylenebilir.

Koordinat sisteminden hareketle ispatı oluşturamayan öğrencilerin yanı sıra bu yaklaşım ile ispatı oluşturabilenler de vardır.

Bu öğrenciler $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, (a,b=1)\}$ kümesini ifade ederken uygun sıralı ikililerin kümesini bir örüntü ile belirlemişlerdir. Daha sonra bu örüntünün elemanları ile doğal sayıları eşleyerek $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir bir küme olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Bu alt kategoride yer alan öğrencilerden birinin cevabı örnek olarak aşağıda sunulmuştur.



Görüldüğü gibi yukarıdaki yaklaşımı kullanan öğrenci kartezyen sistemde $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, (a,b=1)\}$ kuralına uyan (a,b) noktalarını seçerek bu elemanları genişleyen bir sıra ile doğal sayılara eşlemektedir. Sonuç olarak $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu ifade etmiştir.

Yaklaşımlar incelendiğinde az sayıdaki öğrencinin, denkliğin temel felsefesinden hareketle izah edilebilir eşlemeler ile formal ispata ulaştığı sonucuna ulaşılabilir.

Bu soru ile ilgili bir diğer dikkat çekilmesi gereken nokta öğrencilerin neredeyse tamamının $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini sayılabilir kabul etmesidir. Sadece 1 öğrenci bu kümenin sayılamaz olduğunu ifade etmiştir. Diğer bir ifade ile öğrencilerin büyük çoğunluğu sezgisel de olsa kümenin sayılabilir olduğunu belirleyebilmiştir. Bu sezginin nedeni rasyonel sayıların tam sayılar kullanılarak

oluşturulması olabilir. Öğrenciler sayılabilir bir küme olan tam sayılardan hareketle oluşturulan bu kümenin de ($\mathbb{Z}\sim\mathbb{N}$ *olduğu gibi*) doğal sayılara denk olması gerektiğini varsaymış olabilirler.

II. Alt Probleme Yönelik Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın ikinci alt problemi aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

''İlköğretim matematik öğretmeni adayları sonsuz kümelerin denkliğini ispatlarken oluşturdukları kanıt imajlarının bilişsel ve duyuşsal özellikleri nelerdir?''

Bu bölümde öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğini gösterme sürecinde oluşturdukları ispat imajları incelenecektir.

Bu imajların incelenebilmesi için genel gruptan seçilen 3 öğretmen adayının (A,B ve D olarak isimlendirildi) her biri ile dörder defa olmak üzere toplamda 12 etkinlik temelli mülakat gerçekleştirildi. Her bir mülakat iki farklı kamera ile kayıt altına alındı ve katılımcılardan *''yüksek sesli''* düşünmeleri istendi.

Etkinlik temelli mülakatların tamamlanmasının ardından transkripsiyon işlemi gerçekleştirildi. Elde edilen yazılı metinler de kullanılarak ilgili çerçeveler ışığında teorik analizler yapıldı.

Bu bölüm kapsamında gerçekleştirilen teorik analizler arasından 3 çalışmaya ilişkin bulgular sunulacaktır. Bu çalışmaların seçiminde aşağıdaki ilkeler gözetilmiştir.

- Her bir katılımcıya ilişkin bir çalışma sunulacaktır.
- Çalışmalar gerçekleştirildiği sıra ile sunulacaktır. Örneğin sunulacak ilk çalışma, kronolojik olarak diğerlerinden daha önce gerçekleştirilmiştir.
- Sunulacak çalışmaların, sonsuzluk öğrenme alanına ilişkin farklı konulara ilişkin anlayışları yansıtması istenmektedir. Dolayısı ile sunulacak çalışmalar, farklı kapsamlara ilişkin olacaktır.

Tüm bu analizlerde amaç, yaklaşımların doğruluğunun veya yanlışlığının belirlenmesi olmamıştır. Bu noktada gözetilen temel unsur yaklaşımların altında yatan nedenlerin belirlenmesidir. Başka bir ifade ile öğrencilerin düşünme süreçlerinin açığa çıkarılmasıdır.

A'nın İspat Süreci

A, kendisine sunulan soruyu ilk okuduğunda bir süre düşündü ve hiçbir işlem yapmadı. İlk düşünme deneyimlerini dışarıya aktarmak istediğinde zorluk çektiği ve tereddüt içerisinde olduğu gözlendi. Bir süre geçtikten sonra, yanıta ulaşabilmek izlemesi gereken yol üzerine düşünmeye başladı. Bu noktada '' *Eğer bijektif fonksiyon tanımlayabiliyorsak denk olur.* '' açıklamasında bulundu ve gözlerini soru üzerinde gezdirmeye devam etti. Sürecin henüz başında, soru içerisinde yer alan ilişkileri fark ederek bijektif fonksiyon kavramına yönelmesi Selden ve Selden tarafından ortaya konan duygusal olmayan bilişsel hislerden *aşina olma hissi* bağlamında değerlendirilebilir. Çünkü bu anda A, soru içerisinde yer alan kavramları ve ilişkileri tanıyabildiği için bijektif fonksiyon kavramından yararlanmayı önermiştir.

Bu açıklamanın ardından yine kendisinden emin olmayan bir ifade ile aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

''Bence denk olabilir. Her sonsuz küme arasında bir fonksiyon izah edebiliriz diye düşünüyorum.''

Bu noktada görüşünü destekleyen herhangi bir örnek veya delil sunmadı. Sadece bu açıklamayı yapmakla yetindi. Dolayısı ile mevcut açıklama soruya ilişkin ilk sezgisini ortaya koyduğu söylenebilir. Buna göre A'nın ilk sezgisi her sonsuz kümenin denk olabileceğine yöneliktir.

Bir süre daha düşündükten sonra yine tereddütlü bir ses tonu ile rasyonel ve irrasyonel sayı kümeleri üzerine düşünülebileceğini ifade etti. Bu noktada ön bilgilerini gözden geçirdiği ve sezgisini destekleyecek örnekler bulma çabasına giriştiği söylenebilir. Bu gözden geçirme sürecinde zihninde yer alan çeşitli alternatifler arasından görüşünü destekleyebileceğini varsaydığı bir küme çiftini seçtiği ve bu doğrultuda bir yaklaşım şekillendirmeye karar verdiği söylenebilir. Bu örnek çifti ile A, kendisine yöneltilen genel sorunun içerdiği ilişkileri inceleyebilmek için spesifik iki kümeyi içeren özel bir durum tanımlamıştır. Bu sayede onun ilgilendiği soru ile ilgili zihninde yer alan ön bilgileri içerisinden,

sunulan duruma uygun olduğunu varsaydığı örnek çiftini seçerek düşünme sürecinde bir dayanak oluşturmaya çalıştığı söylenebilir.

Bu anda A'nın sezgisini doğrulamak için zihninde yer alan yapılar içerisinden rasyonel sayılar ($\mathbb{Q}$) ve irrasyonel sayılar ($\bar{Q}$) kümelerini seçmesi tanıma (R-) epistemik eylemi bağlamında değerlendirilebilir. Bu eylem ile A'nın, irrasyonel sayılar ve rasyonel sayılar kümelerini denklik kavramı açısından, aralarında bijektif eşleme yapılabilecek sonsuz elemanlı kümeler şeklinde tanıdığı söylenebilir.

Bu aşamada, A ile araştırmacı arasında aşağıdaki kısa diyalog gerçekleşmiştir.

Tablo 16

Araştırmacı ve A arasında gerçekleşen diyalog (1)

Araştırmacı	Sence irrasyonel sayılar mı daha çoktur? Yoksa rasyonel olanlar mı? Ya da bunlar birbirlerine eşit midir?
A	İkisi de sonsuzdur. Ama birbiri arasında bir fonksiyon izah edebilir miyiz orasını… Rasyonel sayıları diğer kümelerin birleşimi şeklinde yazabiliyoruz. Ama irrasyonel sayılar içerisinde karekökten çıkamayanlar var, pi sayısı var, e sayısı var... (*duraksar*) $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamazlar.

Diyalogun ardından A, önünde bulunan kâğıda aşağıdaki ifadeyi not almıştır.



Sunulan diyalog incelendiğinde A'nın sezgisini doğrulamak amacıyla seçtiği kümeleri daha kapsamlı bir şekilde ele aldığı ve bunların özelliklerini gözden geçirdiği söylenebilir. Başka bir ifade ile önceki adımda yapıların içerdiği alt bileşenleri belirlemeye çalışmaktadır. Bu anda rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümesi ile ilgili özellikleri seçmesi, ilgili kavramlara ilişkin tanıma epistemik eylemi (R-) bağlamında değerlendirilebilir. Diğer yandan diyalogdan da

anlaşıldığı gibi A, her iki kümeyi kendi içlerinde ayrı ayrı değerlendirmektedir. Bunlar arasında ispata yönelik bir ilişki henüz oluşturmamıştır. Dolayısı ile sunulan açıklamalarının ardından kümelerin denkliğine ilişkin herhangi bir saptama da ortaya koymamıştır. Bu adımda, seçtiği kümeleri gözden geçirerek ispat süreci açısından kendisine bir başlangıç noktası oluşturmaya çalıştığı söylenebilir.

Mevcut ana kadar yaptığı açıklamalar incelendiğinde A'nın bilişsel ve duyuşsal boyutları ile bir imaj oluşumunun başlangıç safhasında yer aldığı yorumu yapılabilir. Çünkü o, mevcut ana kadar kendisine sunulan soruya ilişkin sezgisel bir yapı oluşturmuş ve bu sezgisini açıklamaya çabasına girişmiştir. Bu aşamada kavramlar arasında yeterli düzeyde bağlantı kuramadığından görüşlerini ifade etmede zorlanmakta, hatta bazı noktalarda tereddütte düşmektedir.

Diğer yandan, seçtiği kümeler üzerinde bir süre daha düşündükten sonra aşağıdaki açıklamayı yaparak görüşlerini açıklamaya devam etmiştir.

Şimdi bu $\frac{a}{b}$ *şeklinde yazılamayan sayıların bir sıralaması yok. Yani rastgele* (duraksar)*... Bir düzen içerisinde değiller. Fakat rasyonel sayılar, bir düzen içerisinde ilerliyorlar.*

Sunulan açıklama ile A'nın ispat süreci içerisinde mevcut ana kadar ayrı ayrı aldığı $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ve $\bar{Q}$ irrasyonel sayılar kümesi arasındaki ilk bağlantıyı oluşturduğu söylenebilir. O, iki küme arasındaki bu bağlantıyı kümelerin ortak özelliklerine odaklanarak değil, bunlar arasındaki bir farklılığı temel alarak oluşturmuştur. Bu bağlantı, onun ifadesi ile ''*düzen*'' kavramı ile açıklanan bir farklılık ilişkisidir. Burada ifade edilen ''*düzen*'' kavramı, önceki aşamada gerçekleştirilen düşünme eyleminin bir sonucudur. A, bir önceki adımda $\mathbb{Q}$ ve $\bar{Q}$ kümelerinin özelliklerini ayrı ayrı belirlemiş ve bu aşamada seçtiği alt bileşenlerden uygun olanları mantıksal çerçevede bir araya getirerek ''*düzen*'' kavramına ulaştırmıştır. Dolayısı ile onun bu anda, bir önceki adımda tanıdığı bilgileri iki küme arasında bir ayrım oluşturacak şekilde amaçlı olarak bir araya getirmesi, kullanma (B-) epistemik eylemi bağlamında değerlendirilebilir. Böylece A'nın seçtiği iki küme arasındaki ilişkiyi ispat süreci açısından anlamlandırmaya başladığı

söylenebilir. Diğer yandan bu noktada ulaşılan ‘’*düzen*’’ kavramı bir bilgi oluşumu (C-) olarak değerlendirilmemiştir. Çünkü bu anda A için yeni bir bilgi oluşumu söz konusu değildir. A, bu eylem ile kümelere ilişkin sahip olduğu ön bilgilerini, kümeler arasında bir ayrım oluşturacak şekilde bir araya getirmiştir. Başka bir ifade ile A, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümesi ile ilgili daha önceden sahip olmadığı yeni bir bilgiye ulaşmamıştır. Burada ifade edilen ‘’*düzen*’’ kavramı onun kişisel anlayışına paraleldir. Ayrıca bu noktadaki tanıma (R-) ve kullanma (B-) eylemleri ile kurulan ilişkiler, gelişmeye başlayan imajın mantıksal bağlar içerdiğinin bir göstergesi olarak yorumlanabilir. Ancak A, mevcut ana kadar, seçtiği yapıları denklik kavramı çerçevesinde henüz tam olarak ilişkilendirememiştir.

Bu noktada A’dan derinlemesine bilgi almak isteyen araştırmacı ona ‘’*düzen*’’ kavramı ile neyi kastettiğini sormuştur. Bu soruya karşılık A, aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

İrrasyonel sayılara baktığımız zaman küsuratları sonsuza kadar gittiği için bir düzen yok. Bir elemandan sonra hangi eleman gelir bilemiyoruz. Bu anlamda rasyonel olanlar düzenlidir.

Bu açıklama ile A’nın irrasyonel sayıları, ondalık kısımlarında devirli blok içermedikleri için *düzensiz* sayılar olarak nitelendirdiği sonucuna ulaşılabilir. Bu görüşünü açıklarken irrasyonel sayı kavramının formal tanımından yararlanmıştır. Bunun tersi olarak rasyonel sayıları da devirli sayı olarak nitelendirmiştir. Dolayısı ile bir rasyonel sayıdan sonra gelen rasyonel sayının belirlenebileceğini kabul etmektedir. Sunulan bu açıklama ile A’nın görüşünü detaylandırabilmek için irrasyonel sayı kavramının formal tanımını seçtiği (R-) ve bunu kullandığı (B-) sonucuna ulaşılabilir.

Diğer yandan bu noktada A’nın önceki adımda tanımladığı *düzen* kavramını kullanarak (B-) rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümelerini i iki ayrı kategori içerisinde sınıfladığı görülebilir. Bu sınıflamayı kümelerin denkliğini inceleme sürecinde kullanmak amacıyla kendi anlayışı çerçevesinde oluşturmuştur. Soruya yanıt bulmak amacı ile incelediği kümeleri rastgele belirlemek yerine, onları iki

farklı kategoride sınıflayan bu ölçüt ışığında seçmiştir. Ancak mevcut anda bu sınıflamanın içerdiği kümeler ve ilişkiler açısından tam olarak detaylandıramadığı söylenebilir. Çünkü herhangi bir kümenin hangi gerekçe ile hangi kategoride sınıflanabileceği açıkça belirtilmemiştir.

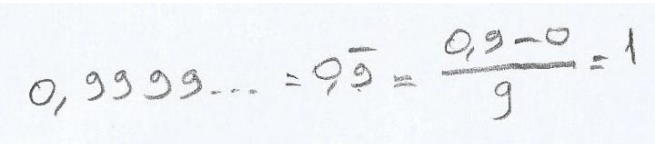
A tarafından sunulan yukarıdaki açıklamaların ardından araştırmacı, onun bu andaki düşünce biçimini ve oluşturduğu sınıflamaya ilişkin algısını daha iyi anlayabilmek için kendisine bazı sorular sormaya karar vermiştir. Bu noktada aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir.

Tablo 17

Araştırmacı ve A arasında gerçekleşen diyalog (2)

Araştırmacı	Peki, bu sınıflamaya göre rasyonel olanlar neden düzenlidir?
A	Düzen ile kastettiğim şey bunları bir sıraya koyabilmek. Her iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı daha yazabiliyoruz. Ama irrasyonel olanları aldığımızda mesela pi sayısını düşündüğümüzde bir sonu yok.
Araştırmacı	Peki, Pi sayısını, bir nokta olarak göstermek istesek gösteremez miyiz?
A	Çemberden yola çıkarak gösterebiliriz ama küsuratı sonsuza kadar gittiği için bundan sonra gelecek sayıyı belirleyemeyiz.
Araştırmacı	Küsuratı sonsuza kadar devam eden sayıları hepsi için böyle midir?

Son soru üzerine A, düşünmeye başlamış ve bir süre konuşmamıştır. Bu süreçte önündeki kâğıt üzerinde bazı işlemler yaptığı gözlemlenmiştir. İşlem sürecinin sonuna geldiğinde araştırmacıya kâğıt üzerinde oluşturduğu aşağıdaki örnek durumu göstermiş ve altında sunulan açıklamayı yapmıştır.



Küsuratı sonsuza kadar devam eden bir sayı devirli ise burada olduğu gibi bundan sonraki eleman belirlenebilir. Ancak bu sayı pi sayısı gibi devirsiz ise (irrasyonel

olanları kastediyor) *kendisinden sonra gelen ilk sayı belirlenemez. Yani rasyonel sayılar ve alt kümeleri düzenlidir. Ancak irrasyonel sayılar düzenli değildir.*

A, bu görüşünü kendisinden emin bir şekilde ifade etmiş ve oluşturduğu örneği araştırmacıya bir delil olarak göstermiştir. Düşüncelerini kendisinden emin bir şekilde ifade etmesi Selden ve Selden (2007) tarafından ortaya konan duygusal olmayan bilişsel hislerden *haklılık hissi* bağlamında değerlendirilebilir. Çünkü bu noktada oluşturduğu örneğin görüşünü desteklediğini görmekte ve ispat açısından doğru yolda ilerlediğine inanmaktadır.

Bu noktada A'nın önceki adımda seçtiği (R-) devirli sayı kavramını bir sonuca ulaşmak amacıyla oluşturduğu örnek durum içerisinde tekrar kullandığı (B-) sonucuna ulaşılabilir. Bu kullanma işlemi ile A rasyonel sayıları neden düzenli kabul ettiğini, açıklayabilmiştir. Yani bu aşamada bir doğrulama söz konusudur. Ayrıca bu doğrulama ile A'nın bir önceki adımda oluşturduğu sınıflamayı içerdiği ilişkiler açısından detaylandırabildiği söylenebilir. Başka bir ifade ile bir önceki adımda $\mathbb{Q}$ ve $\bar{Q}$ kümeleri arasındaki ayrımı ifade etmek amacı tanımladığı ''*düzen*'' kavramını farklı kümeler arasındaki ortak ilişkiyi kapsayacak şekilde genişlettiği söylenebilir. O, artık kümeleri elemanlarına göre *düzenli olanlar* ve *düzenli olmayanlar* şeklinde iki kategoride net olarak sınıflayabilmektedir. Dolayısı ile mevcut genişleme ile her iki kategoriden seçilecek örnekler kullanılarak denklik ilişkilerinin test edilebileceği söylenebilir. Bu düzenleme ile spesifik iki küme olan rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümeleri üzerinde tanımlanan ''*düzen*'' kavramı, pek çok kümeyi sınıflayabilecek şekilde genişletilmiştir. Böylece *düzen* kavramı seçilen kümelerin belirlenmesi açısından bir ölçüt niteliğini tam olarak kazanmıştır. Sonuç olarak bu noktada ispat sürecinin ölçütüne ilişkin bir oluşturma (C-) eyleminin gerçekleştiği söylenebilir. Çünkü A, mevcut anda kümelerin sınıflanabilmesine ilişkin önceden sahip olmadığı yeni bir yapıya sahiptir.

Bu aşamada imajının bir ölçüt içerdiği ve dolayısıyla önceki aşamalara göre daha karmaşık bileşenleri içerisinde barındırdığı yorumu da yapılabilir. Yaşanan gelişme ile bir önceki aşamada düşündüklerini dışarıya aktarmada güçlük çeken A'nın sınıflamaya ilişkin düşüncelerini daha açık biçimde, formal matematiksel dili de kullanarak ifade edebilir hale geldiği gözlenmiştir. Bu durum da ispat imajının

basitten karmaşığa doğru ilerleyen dinamik olma karakteristiği bağlamında yorumlanabilir.

Bu anda A, kısa bir süre daha seçtiği kümeler üzerinde gözlerini gezdirdikten sonra $\mathbb{Q}$ ve $\bar{Q}$ kümeleri ile devam ederse hangi kümenin daha büyük olduğunu belirleyemeyeceğini ifade etmiştir. Ardından en başta seçtiği örnekleri değiştirmek istediğini araştırmacıya belirtmiştir. Bu noktada araştırmacı tarafından kendisine bir kısıtlama getirilmemiş ve ısrarcı olunmamıştır. Düşüncesinde özgür olduğu ve istediği örnekler üzerinde düşünebileceği belirtilmiştir. Bu onay üzerine A, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi yerine $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerine düşünmek istediğini söylemiştir. Bu noktada, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{N}$ kümeleri A tarafından ortaya konan sınıflamaya göre aynı kategoride yer alan (*düzenli*) kümelerdir. Dolayısı ile $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini sınıflama açısından kendisine eşdeğer bir küme ile değiştirmiştir. Başka bir ifade ile bu noktada A'nın örneklerini değiştirdiği ancak kullandığı örnekler açısından genel yaklaşımını değiştirmediği soncuna ulaşılabilir.

Bu anda onun, ispatın devamında tıkanabileceğini belirterek ileri aşamaları ön görmesi ispat imajının varlık karakteristiği ile ilişkilendirilebilir. Çünkü bu ana kadar oluşturduğu düşünceler onun zihninde bir bütün halindedir. Dolayısı ile bu noktadan devam etmesi durumunda oluşabilecek sonucu kendisi açısından yordayabilmiştir. Yaptığı zihinsel deneme-yanılmalar ile istediği sonuca ulaşamayacağını öngörerek örneğini değiştirmeye karar vermiştir.

A'nın $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesinden vazgeçerek $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesini kullanmaya karar vermesi üzerine araştırmacı ile arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir.

Tablo 18

Araştırmacı ve A arasında gerçekleşen diyalog (3)

Araştırmacı	Peki, bunlardan hangisi daha çoktur ya da eşit midir?
A	İkisi de sonsuzdur. İrrasyonel sayıları kaçtan başlatmamız gerektiğini bilmiyoruz. Bunlar devretmeyen sayılar. İçerisinde kökten çıkmayan sayılar, e sayısı, pi gibi pek çok eleman var. Kurallı bir fonksiyon yazamasak da izah edilebilir bir eşleme ile bunların denk olduğunu göstermeyi deneyebiliriz. İrrasyonel sayılardan rastgele bir tanesini alırsak mesela *1,357…* gibi devretmeyen bir sayı, bundan sonra gelecek olan sayıyı tahmin edemiyoruz. Yani, irrasyonel sayıları sıralayamıyorum. Herhangi bir irrasyonel sayının nasıl başladığını bilsem bile nasıl bittiğini bilemiyorum. Dolayısı ile bir irrasyonel sayıdan sonra hangisi gelir karar veremiyorum.

Bu noktada A'nın irrasyonel sayılar ile ilgili önceki açıklamalarına benzer bir açıklamada bulunduğu görülmektedir. Ona göre bir irrasyonel sayıdan sonra gelen irrasyonel sayı belirlenememektedir. Dolayısı ile bu kümeyi kullanarak bir fonksiyon oluşturmada güçlük yaşamaktadır.

A, diyalogun sonunda bir süre daha sessiz kalmıştır. Ardından kümelere ilişkin seçtiği kavramlar arasında bağlantılar kurmuş ve aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

O zaman doğal sayılar kümesinde tam kare olan ve olmayan ifadeleri farklı irrasyonel sayılara eşlesek… Böylece bir parçalı fonksiyon tanımlayabilirim. Tam kare olanlar ile olmayanları başka bir tarafa eşleyeceğim... Mesela tam kare olmayanlar için f(x)=$\sqrt{x}$ gibi doğal sayılardan irrasyonel sayılara tanımlı olsa… Tam kare olanlar için de mesela x+π desek... Böylece x tam kare olsa da olmasa da bir irrasyonel sayı elde edebilirim.

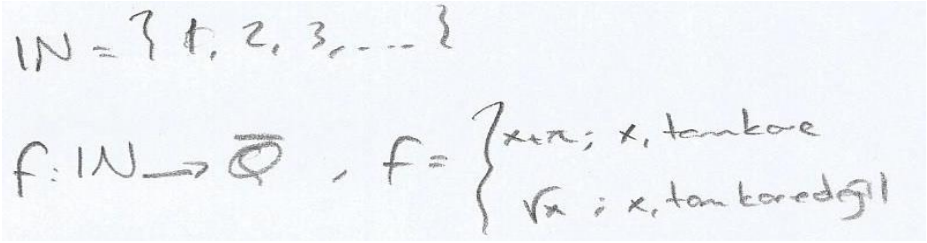
Bu yaklaşım ile A, yeni bir zihinsel çabaya giriştiği ve seçtiği kümeler arasında uygun bir fonksiyon tanımlamaya çalıştığı söylenebilir. Bu anda, ölçütüne uygun olarak seçtiği iki küme arasında denkliğe dayalı ilk ilişkiyi oluşturmaya çalışmaktadır. Bu eşleme ile sezgisel olarak kümelerin denk olduğunu

gösterebileceğine inanmaktadır. Bu inancı o andaki kendisinden emin hareketlerinde fark edilmiştir.

A, bu fonksiyonu tanımlayabilmek için doğal sayılar kümesini tam kare olanlar ve olmayanlar şeklinde iki parçaya ayırmıştır. Doğal sayılar kümesini bu şekilde parçalamasının temel sebebinin irrasyonel sayılar kümesini bu andaki algılayış biçimi olduğu söylenebilir. Onun açıklamaları incelendiğinde mevcut düşünme biçimi içerisinde irrasyonel sayıları iki farklı kategori içerisinde ele aldığı anlaşılmaktadır. Bunlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

- Köklü sayı olarak ifade edilebilen irrasyonel sayılar
- Köklü sayı şeklinde ifade edilemeyen irrasyonel sayılar

Dolayısı ile mevcut anda zihninde yer alan bu kategorilere uygun bir eşleme tasarlamaya çalıştığı söylenebilir. Sahip olduğu bu sınıflama onun ispat yaklaşımını şekillendirmektedir. Dolayısı ile zihninde yer alan imajın, onun bu andaki özgün düşüncelerini yansıttığı söylenebilir. Başka bir ifade ile A'nın yaklaşımı, onun kişisel anlayışı doğrultusunda şekillenmeye devam etmektedir. Ayrıca o, tam bu anda konuşmayı bırakarak düşündüklerini bir kâğıda yazmayı tercih etmiştir. Çünkü mevcut anda kişisel anlayışına bağlı olarak şekillenen düşüncelerinin geçici olabileceğinden ve kaybolabileceğinden korktuğu söylenebilir. Bu aşamada kâğıda yazılanlar aşağıda sunulmuştur.



A, sunulan eşlemeyi tanımlarken irrasyonel sayı kavramına ek olarak parçalı fonksiyon kavramını da seçerek (R-) kullanmayı (B-) önermiştir. Böylece mantıksal ilişki ağını genişlettiği söylenebilir. Bu noktada imajının yeni ilişkileri içerisine alacak biçimde genişlemesi dinamik olma karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Ayrıca A'nın tasarladığı örneği bir özgüven ile duraksamadan

ifade etmesi *doğru iz üstüne olma hissi* bağlamında değerlendirilebilir. Bu durum onun imajının bilişsel unsurlarına eşlik eden duyuşsal faktörlerin de var olduğunun bir göstergesi olarak yorumlanabilir.

A'nın yazma işlemesini tamamlamasının ardından araştırmacı, bu fonksiyonun uygun bir eşleme olup olmadığını ona sormuştur. Bu soruya yanıt olarak A, fonksiyonun birebir olduğunu aşağıdaki açıklaması ile ifade etmiştir.

''*Birebirlikte her eleman bir ve yalnız bir eleman ile eşleniyordu. Yani bu fonksiyon birebirdir.''*

Bunun hemen devamında fonksiyonun örtenliğini incelemeye başlamıştır. Bu özelliğin sağlanması için fonksiyonun görüntü kümesinde açıkta eleman kalmaması gerektiğini sözel olarak ifade etmiştir. Ancak bu noktada bir anda duraksayarak kısa bir süre konuşmamıştır. Gözlerini tanımladığı fonksiyon üzerinde gezdirmekle yetinmiştir. Bu sessizliğin ardından araştırmacı ile arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir.

Tablo 19

Araştırmacı ve A arasında gerçekleşen diyalog (4)

A	(*Tereddütlü bir şekilde*) Ancak böyle olunca irrasyonel sayılar kümesinde açıkta eleman kalıyor gibi görünüyor.
Araştırmacı	Hangi irrasyonel sayılar açıkta kalıyor?
A	Tüm irrasyonel sayılar eşlenemeyebilir. (*duraksar*) Örneğin bu eşlemede e sayısı ve katları açıkta kalıyor gibi gözüküyor. Yani bu örten değil diye düşünüyorum.

Bu aşamada A, uygun örnekler yardımı ile mantıksal bir çerçeve oluşturarak f fonksiyonunun örten olmadığını açıklayabilmiştir. Dolayısı ile sunduğu eşlemenin uygun olmadığı sonucuna kendi çabaları ile ulaşmıştır. Açıklamasının ardından, örtenlik ile ilgili tereddütlü tavrının kaybolduğu onun davranışlarında gözlenmiştir. Bu durumda fonksiyonun örten olmadığı ile ilgili sezgisel kesinlik hissine sahip olduğu çıkarımı yapılabilir. Diğer yandan bu aşamada fonksiyonun uygun bir

eşleme olup olmadığını belirleyebilmek için birebirlik ve örtenlik kavramlarını tekrar seçerek kullandığı (R- & B-) sonucuna da ulaşılabilir.

Örtenlik ile ilgili bu açıklamalarının ardından, araştırmacı A'ya aşağıdaki soruyu yöneltmiştir.

Peki, sence bu fonksiyonun bijektif olmaması, iki kümenin denk olmadığını söylemek için yeterli mi?

Soru üzerinde kısa bir süre düşünen A, iki küme başka fonksiyonların tanımlanabileceğini ifade etmiştir. Diğer bir ifade ile sadece bu fonksiyon yardımı ile denklik hakkında karar veremeyeceğini belirtmiştir. Sonuç olarak sunduğu bu örnek A'yı kümelerin denkliği hakkında formal bir sonuca ulaştıramamıştır.

Bu noktada araştırmacı, A'nın yaklaşımının bu süreçte nasıl bir değişim gösterdiğini belirleyebilmek için ona başlangıçtaki sezgisi hakkında ne düşündüğünü tekrar sormuştur. Başlangıçtan itibaren ortaya koyduğu tüm düşünme süreçlerini ve verdiği eşleme örneğini bir arada değerlendiren (*ve bir süre sessiz kalan*) A, aşağıdaki açıklamada bulunmuştur.

Her kümenin denk olduğunu gösteremiyoruz. Ama denk olmadığını da gösteremiyoruz. Bu örnek beni sezgisel olarak denk olmayabileceğine götürdü. Çünkü açıkta eleman kalıyor gibi, bilemiyoruz.

Açıklama incelendiğinde ile A'nın sezgisinin değişmeye başladığı anlaşılabilir. O, net deliller sunarak açıklayamasa da kümelerin denk olamayabileceğini düşünmeye başlamıştır. Bu noktada ön bilgilerini ve deneyimini gözden geçirerek bunlar arasında yeni ilişkiler oluşturduğu söylenebilir. Bu durum imajın mantıksal bağlar içerme karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Ayrıca A'nın deneyimleri etkisi ile önceki sezgisinin yanlışlığına karar vermesi imajın varlık karakteristiği ile açıklanabilir. Çünkü bu anda A'nın zihnindeki imaj tek ve bir bütündür. Dolayısı ile ispat sürecinin önceki aşamalarına dönerek yaklaşımını gözden geçirebilmiştir. Bu noktada A'nın açıklamalarına devam etmekte güçlük çektiğini gözlemleyen araştırmacı ona sorular sorarak düşüncelerini detaylandırmak istemiştir. Bu noktada aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir.

Tablo 20

Araştırmacı ve A arasında gerçekleşen diyalog (5)

Araştırmacı	Verdiğin örnek seni nasıl bir sonuca ulaştırdı?
A	Ortak hiçbir elemanları yok. (*Tereddütlü bir şekilde*) Ortak elemanları olmadığı için denk olamayabilir…
Araştırmacı	Bu her küme için geçerli mi?
A	(*Duraksar.*) Elemanlarını belirleyebildiğimiz kümeler için değil.
Araştırmacı	Ne düşündüğünü biraz daha açıklar mısın?
A	(*Kararsız bir ses tonu ile*) Rasyonel sayılar kümesini ele aldığımız zaman içerisinde tam sayılar kümesi var ve tam sayılar da doğal sayılar kümesini kapsıyor. Sonra reel sayılar da bu kümeleri içerisine alıyor. Ama doğal sayılar ile irrasyonel olanları düşününce… Aralarında bir bağlantı yok, bunlar ayrık kümeler.
Araştırmacı	Yani birbirinin alt kümesi olanlar arasında bir ilişki olduğunu mu düşünüyorsun?
A	Belki bir fonksiyon tanımlayabiliriz. Sonuçta birbirlerinin alt kümesi şeklinde gidiyorlar. *(Bu açıklamadan sonra bir süre düşünür ve kararsız bir şekilde devam eder.)* Mesela reel sayılar ile doğal sayılar arasında bir fonksiyon tanımlanabiliyor mu? Bunu düşünüyorum şu an.

Diyalog incelendiğinde A'nın, kümelerin denkliğini inceleme sürecinde oluşturduğu ölçütü üzerinde tekrar düşünmeye başladığı anlaşılmaktadır. O, ispatın ilk aşamalarında bir ölçüt olarak kümelerin ardışık elemanların belirlenebilmesini (yani kendi ifadesi ile kümelerin ''*düzenli*'' olup olmamasını) göz önüne almıştır. Dolayısı ile sonsuz kümeleri bu ölçüte göre sınıflayabilmiş ve uygun bir örnek çifti olarak $\bar{Q}$ ve $\mathbb{N}$ kümelerini seçmiştir. Diğer yandan mevcut durumda, düşünme şeklinde bir değişim gözlenmektedir. Bu anda A'nın, ön bilgilerini ve bu süreçteki deneyimlerini gözden geçirerek başlangıçta ortaya koyduğu ölçütünü genişletmeye çalıştığı söylenebilir. Mevcut anda ardışık elemanların belirlenebilmesine ek olarak,

alt küme ilişkisinin de bir ölçüt olup olamayacağını sorgulamaktadır. Bu hipotezi test etmek için ℕ ve ℝ kümelerini seçerek düşünmeye başlamıştır.

Diğer yandan sunulan diyalog incelendiğinde A'nın pek çok noktada duraksadığı ve bazen tereddütte düştüğü gözlenmiştir. Bu durumun nedeni, içerdiği bağlantılar açısından imajın mevcut anda onun kişisel anlayışına bağlı olması olabilir. Başka bir ifade ile bu özel anda A'ya özgü olan düşünceler formal olarak yeterince detaylandırılamadığı için onun kişisel anlayışından ayrılamamaktadır. Sonuç olarak A, bu andaki düşüncelerini aktarırken dış çevre ile etkili iletişim kuramamaktadır.

Yukarıda sunulan diyalogun devamında A, varsayımını doğrulayabilmek için ℕ doğal sayılar kümesi ile ℝ, gerçel sayılar kümesi arasında bir eşleme oluşturma çabasına girişmiştir. Bu noktada ilk olarak aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

Reel sayıları (ℝ) sıfırdan sağa ve sola doğru sıralayabiliriz. Ama sıfırdan sonra gelecek olan ilk reel sayıyı bilemeyiz. İrrasyonellere benziyor.

Bu açıklamanın devamında bir süre düşündükten sonra aşağıdaki öneriyi sunmuştur.

Kümeleri ifade ederken sözel olarak ilk gelen elemanlar, ikinci elemanlar diyebiliyoruz. Bunların ne olduklarını bilmesek de orada olduklarını biliyoruz. Bunları bir şekilde eşleyebiliriz diye düşünüyorum.

A'nın bu tarz bir yaklaşım ile ardışık elemanları belirleyebilme ile ilgili güçlüğünü aşmaya çalıştığı söylenebilir. Çünkü bu yaklaşıma göre gerçel sayılar kümesinin elemanlarını belirleyemese de kümelerin denkliğini ortaya koyabileceğini ifade etmiştir. Bu önerisini gerçekleştirebilmek için sözel olarak ℕ ve ℝ kümeleri arasında aşağıdaki kural ile bir eşleme tanımlanabileceğini belirtmiştir.

$$x.\ doğal\ sayı \rightarrow x.\ gerçel\ sayı$$

Bu noktada A'nın önceki öğrenme deneyimlerinden elde ettiği bir çıkarımı mevcut ispat sürecine transfer ettiği söylenebilir. Bahsedilen çıkarım, bir önceki hafta Mantık dersi içerisinde ele alınan $\mathbb{N} \sim \mathcal{P} = \{2,3,5,\ldots\}$ denkliğinin ispatından elde edilmiş bir genellemedir. Buna göre asal sayılar ($\mathcal{P}$) bir kurala göre sıralanmadıklarından $\mathbb{N}$ ile $\mathcal{P}$ arasında kurallı, cebirsel bir fonksiyon oluşturmak mümkün değildir. Bu noktada öğretim elemanının yönetimi ile derste yapılan sınıf içi tartışmalar sonucunda iki küme arasında cebirsel olmasa da aşağıdaki gibi bijektif bir fonksiyon tanımlanabileceği ve kümelerin denkliğinin izah edilebileceği sonucuna ulaşılmıştır.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}\text{, } f(x) = x.\ asal\ sayı \text{ fonksiyonu bijektiftir } \Rightarrow \mathcal{P} \sim \mathbb{N}$$

İspat sürecinin bu noktasında A'nın, $\mathcal{P}$ asal sayılar kümesi ile $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi arasında elemanların belirlenmesi açısından bir benzerlik ilişki kurarak uygun bir yaklaşım tasarlamaya çalıştığı söylenebilir. Ona göre asal sayılar kümesinin ardışık elemanlarının kurallı bir şekilde belirlenememesi ile gerçel sayılar kümesinde bir elemandan sonra gelen elemanın belirlenememesi arasında bir benzerlik söz konusudur. Dolayısı ile yukarıda açıklanan $\mathbb{N} \sim \mathcal{P}$ ispatından elde ettiği bu çıkarımı $\mathbb{N} \overset{?}{\sim} \mathbb{R}$ sorusuna uyarlayarak çözüme ulaştığını düşünmüştür. Bu noktadaki düşüncelerini aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Sonuçta ikisinde de sonsuza gittiği için ikisinin elemanlarını birbirine eşleyebiliriz. Bu şey gibi… Aralıkların eşlenmesi gibi. Mesela (1,3) aralığı (2,10) aralığından daha küçük gibi gözüküyor. Ama yine de sonsuz eşleme yapabiliyoruz. Bunu da aynı şekilde düşünebiliriz. Doğal sayılar daha küçük gibi, çünkü aralıkları geniş, tek tek gidiyor belirli sayılar var. Reel sayılarda belirli sayılar yok ama o da sonsuza gidiyor. Dolayısı ile 1 sayısını ilk reel sayıya, 2 sayısını ikinci reel sayıya olacak şekilde bunları eşleyebiliriz.

Yukarıda açıklanan süreç ve sunulan açıklamalar bir arada değerlendirildiğinde A'nın, bu noktada sunduğu görüşünü biçimlendirirken ve düşüncelerini açıklarken aşağıda sıralanan kavramları seçtiği ve çeşitli amaçlar ile kullandığı (R- & B-) sonucuna ulaşılabilir.

- Gerçel sayılar ($\mathbb{R}$) kümesi
- Doğal sayılar ($\mathbb{N}$) kümesi
- Asal sayılar ($\mathbb{P}$) kümesi
- Bijektif fonksiyon kavramı
- İzah edilebilir eşleme kavramı

Diğer yandan mevcut anda A'nın ön bilgileri ve deneyimleri ile yeni ilişkiler kurarak mantıksal ilişki ağını genişlettiği de söylenebilir. Bu durum kanıt imajının mantıksal bağlar içerme ve dinamik olma karakteristikleri ile açıklanabilir. Çünkü imaj daha basit bir formdan, daha gelişmiş bir forma doğru her defasında yeni ve farklı kavramları/ilişkileri içerecek şekilde genişlemektedir. Ayrıca onun bir delil olarak sunduğu bu eşlemeyi, önceki derslerde yer alan deneyimlerinden hareketle oluşturması da imajın kişisel anlayış karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Çünkü A'nın önceki deneyimlerinin ve bunların sonuçlarının, onun ispat anlayışına yön verdiği görülmektedir. Başka bir ifade ile A'nın ispat süreci ve imajı, onun kendi anlayışı bağlamında şekillenmeye devam etmektedir.

Bu aşamada A, gerçekleştirdiği sürece ilişkin aşağıdaki açıklamalarda bulunmuştur.

Bir eşleme yaptım gibi duruyor. Çünkü ilk eleman ve ikinci eleman dediğimiz için bunlar aynı değil ve birebirlik oluyor. Sonsuza kadar gittiği için örtenlik de oluyor. Bijektiflik sağlanıyor.

Diğer yandan bu açıklamaların ardından A, bir süre susmuş ve yapmış olduğu işlemleri incelemeye başlamıştır. Bu noktada araştırmacı A'nın düşünceli tavırlar içerisinde olduğunu gözlemlemiştir. O, açıklamalarına göre uygun bir delil sunmasına rağmen ispatı tamamladığını belirtmemiştir. Araştırmacı, bunun sebebini belirlemek istediğinde aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir.

Tablo 21

Araştırmacı ve A arasında gerçekleşen diyalog (6)

Araştırmacı	Şu anda ne düşündüğünü ve hissettiğini açıklar mısın?
A	Düşünüyorum da irrasyonel sayılar demiş olsaydık, onun elemanlarını da bulabilir miydik? Örneğin bininci eleman deseydik bulabilir miydik? *(Bu soruya yanıt arar ve bir süre düşünür.)* İrrasyonel sayıların, reel sayıların içinde olduğunu biliyoruz. Ancak nasıl sıralandığını bilmiyoruz. Sıralayamadığımızdan bunun da elemanlarını belirleyemezdik.
Araştırmacı	Sana göre, elemanları sıralayabilmemiz ispat açısından nasıl bir fark yaratıyor?
A	Doğal sayıların, tam sayıların elemanlarını sayabiliyoruz, söyleyebiliyoruz. Bu kümelerin nerde başladığını ve nasıl devam edeceğini biliyorum.
Araştırmacı	Başka hangi kümeler böyle?
A	Doğal sayıları ve tam sayıları açıkta bırakmayacak şekilde sayabiliyoruz. Rasyonel sayılarda, 0 var buradan başlayabiliyoruz. Bunun hemen sonrasında, $\frac{a}{b}$ şeklinde bir sayı var. Bu sayının var olduğunu biliyoruz. *(bir süre düşünür)* Rasyonel sayılar küsuratı devirli ve düzenli şekilde devam ediyor. Bu anlamda doğal sayılara ve tam sayılara benziyor. İrrasyonel sayılar ise düzensiz ve basamakları sonsuza kadar gidiyor.

Yukarıda sunulan diyalog incelendiğinde A'nın, $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri arasında uygun bir ispat yaklaşımı ortaya koyduğunu sözel olarak ifade etmesine karşın tüm kümeler için geçerli olabilecek genel bir yargıya ulaşmadığı görülmektedir. Bu noktada sunduğu örnekten hareketle genel bir yargıya ulaşmamasının temel nedeni sezgisel kesinlik hissinin ortaya çıkmamış olmasıdır. Çünkü mevcut anda A'nın, $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri arasında uygun bir eşleme oluşturduğunu belirtmesine karşın ispat sürecine dair bir tamamlanmışlık hissine ulaşamadığı söylenebilir. Bu noktada,

oluşturduğu eşlemenin onu sezgisel açıdan ikna edemediği sonucuna ulaşılabilir. Başka bir ifade ile A, oluşturduğu eşleme ile tüm kümelere ait genel bir sonuca ulaştığını düşünmediği için ispat süreci açısından nihai bir noktaya ulaştığını belirtmemiştir. Aksine, tüm çabalarına rağmen istediği sonuca ulaşamadığı için $\bar{Q}$ irrasyonel sayılar kümesini göz önüne alarak yaklaşımını yeni gözden geçirmeye başladığı söylenebilir. Diğer bir ifade A, oluşturduğu yaklaşımın doğruluğundan emin olmadığı için farklı kümeler seçerek ile bunu doğrulama çabasına girişmektedir. Bu noktada A'nın oluşturduğu yaklaşımı açısından bir *bilme hissine* ulaşmaya çalıştığı sonucuna ulaşılabilir. Bu noktada, A'nın *bilme hissine* sahip olamamasının temel nedeni, eşlemenin içerdiği mantıksal bağları kullanarak denklik kavramının özünde yatan ilişkilere dair yeterli bir anlayış geliştirememiş olmasıdır. Onun, bu anda oluşturduğu ilişkilere dair *bilme hissine* sahip olamaması, sürecin bütününe ilişkin bir genel yargıya ulaşmayı sağlayabilecek *haklılık hissine* ulaşmasını engellemiştir. Tüm bu nedenler ile imajın duyuşsal boyutunu oluşturan sezgisel kesinlik hissi bu aşamada ortaya çıkmamıştır. Sonuç olarak A, oluşturduğu eşlemeden hareketle soruya yanıt olarak ''*her sonsuz küme denktir*'' şeklinde bir genellemeye ulaşamamıştır.

Diğer yandan A'nın, mevcut anda içerisinde bulunduğu durumu anlamlandırabilmek için seçtiği yapıları ve kurduğu ilişkileri incelemeye başladığı söylenebilir. Bu gözden geçirme süreci içerisinde (*şaşırtıcı bir şekilde*), önceki aşamalarda kullanmaya çalıştığı ancak kendisini formal bir sonuca ulaştırmayan ''*düzen*'' kavramına tekrar yöneldiği gözlenmiştir. Bu durumun birbirinden bağımsız olmayan iki temel sebebinden bahsedilebilir.

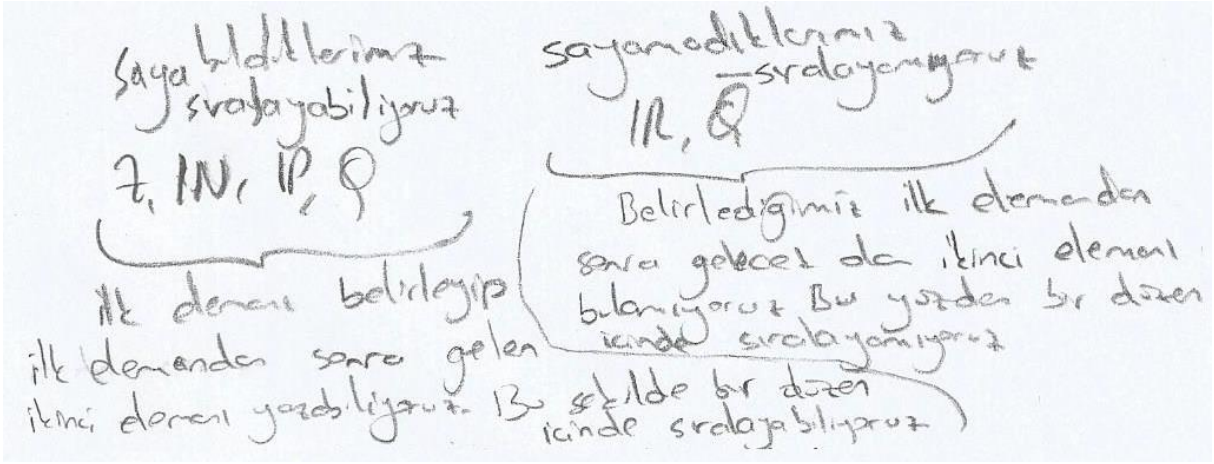
- Sürecin başlangıcında şekillenen ''*düzen''* kavramının, denklik ilişkileri bağlamında tam olarak anlamlandırılamaması
- Denklik kavramının özünde yatan ilişkilerin ''*düzen''* kavramı ile açıklanabileceği düşüncesi

Dolayısı ile bu noktada A'nın, kümelerin *düzenli* olması ile ilgili sınıflamasına tekrar odaklanarak bu kavramı denklik süreci açısından net bir şekilde anlamlandırmaya çalıştığı çıkarımı yapılabilir. Başka bir ifade ile onun, kümeleri sınıflayabilmek için tanımladığı bu kavram aracılığı ile denklik sürecinin özünde

yatan ilişkilere yönelik bir iç görü geliştirmeye çalıştığı söylenebilir. Diğer yandan bir önceki adımda sunduğu eşleme fikri ile bu iç görüye ulaşamadığı ve dolayısı ile sürecin anlamı açısından bir belirsizlik hissine maruz kaldığı yorumu da yapılabilir. Yaşadığı bu belirsizliğin, onu tekrardan aynı kavram üzerine düşünmeye yönlendirdiği söylenebilir. Dolayısı ile mevcut anda A, ispatı tamamladığını belirtmenin aksine, kendisi açısından süreci anlamlandırma çabasına girişmiştir. Sonuç olarak bu noktada kendisini, ikna etmek için tekrardan ardışık elemanların belirlenebilmesinin anlamı üzerine düşünmeye başladığı söylenebilir.

Bu durum ispat sürecinde yer alan duyuşsal faktörlerin, ispat sürecine kattığı anlamı vurgulaması açısından önemlidir. Kidron ve Dreyfus (2014)‘ da belirtildiği gibi duyuşsal faktörler ispat sürecinde bilişsel faktörlerin birer tamamlayıcısı olarak yer almaktadırlar. Duyuşsal iknanın olmadığı salt bilişsel süreç ile formal ispata tam olarak ulaşılması beklenemez. Dolayısı ile imaj içerisinde yer alan duyuşsal boyut, ispat sürecine yön vermesi açısından önemlidir.

Üstte sunulan diyalogun ardından araştırmacı, A’dan düşündüklerini yazarak ifade etmesini istemiştir. Bu noktada zaman açısından herhangi bir sınırlama getirmemiş ve düşünce sürecinde esneklik sağlamaya çalışmıştır. Bu süreçte A’nın yazarak ifade ettiği düşünceleri aşağıda sunulmuştur.



A, yukarıdaki resimden de görüldüğü gibi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}$ ve $\mathbb{Q}$ kümelerini ardışık elemanları belirlenebilen (*sıralanabilen-sayılabilen*) kümeler olarak sınıflamış ve

$\mathbb{R}$, $\bar{Q}$ kümelerini de ardışık elemanları belirlenemeyen (*sıralanamayan-sayılamayan*) kümeler sınıflamıştır. Bu sınıflama onun başlangıçta oluşturduğu ‘’*düzen*’’ kavramına paraleldir. Bu noktada kullanılan terim ve tanımlamalar dışarıdan bir müdahale olmaksızın A’nın kendi kişisel anlayışı ile şekillenen düşüncesinin ürünleridir. Dolayısı ile buradaki *sayma* ve *sıralama* ifadeleri, bu kavramların formal matematiksel tanımları ile özdeş değerlendirilmemelidir.

Bu aşamada, A yazdıkları üzerinde düşünerek ‘’ *Bunun anlamı ne olmalı?* ‘’ sorusunu kendisine yöneltti. Bu durum onun çözüme içten gelen güçlü bir motivasyon ile ulaşmaya çalıştığının bir göstergesi olarak yorumlanabilir. Bu soru araştırmacı tarafından A’ya aynen yöneltilmiş ve ondan düşüncelerini açıklaması istenmiştir. Bu noktada da ona yeteri kadar zaman tanınmış ve düşüncelerini açıklaması için bir baskı yapılmamıştır. A, bir süre sessiz kaldıktan sonra kendisinden emin olmayan tavırlar içerisinde aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

Acaba bu sıralayabildiğimiz kümeler… (duraksar) *Bunlar kendi içerisinde denk olsa. Sıralayamadıklarımız da kendi içerisinde denk olsa. Böyle bir sınıflama yap ılabilir mi?*

Arka arkaya çok sayıda soruya yanıt aranan bu süreçte araştırmacı, A’nın düşünme biçimine doğrudan bir müdahalede bulunmak istemediği için onun sorularına yönlendirici cevaplar sunmamıştır. Bu noktada onun sorduğu yukarıdaki soruya aşağıdaki cevabı vermekle yetinmiştir.

Bu soruyu ben sana yöneltmiş olayım ve sen bana açıklamaya çalış.

Bunun üzerine tekrardan düşünmeye başlayan A, formda kendisine sorulan sorudan uzaklaştığını düşünerek soruyu tekrardan kısık sesle okumuştur. Ardından bu ana kadar yaptığı işlemler üzerinde göz gezdirdikten sonra kendisine kısık bir sesle aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

Bu soruya yanıt vermek için denk olmayan iki küme bulsam yetiyor.

Mevcut anda o, tam olarak farkında olmasa da, bu açıklama onun sezgisini apaçık bir şekilde ortaya koymaktadır. Artık o kümelerin daima denk olabileceği

düşüncesinden vazgeçmiş ve denk olmayan iki küme aramaya başlamıştır. Bu kümeleri belirleme sürecinde temel referans noktası en başta oluşturduğu sınıflamadır. Dolayısı ile bu sınıflama, mevcut durumda onun kümelerin denk olmadığına ilişkin sezgisini yansıtmaktadır.

Bu aşamada A'nın çok sayıda işlem yaptığı ve bunların büyük bir bölümünü tereddüt ile sildiği araştırmacı tarafından gözlemlenmiştir. Ancak bir süre sonra işlemlerine beklenmedik bir şekilde son vermiş ve araştırmacıya şu soruyu yöneltmiştir.

Sonsuzluğa, sonsuz eleman ekleyip çıkarmak denkliği bozar mı?

Bu soru ile A'nın neyi ifade etmek istediğini tam olarak anlamlandıramayan araştırmacı ondan düşüncelerini daha net açıklamasını istemiştir. Bu anda ikili arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir.

Tablo 22

Araştırmacı ve A arasında gerçekleşen diyalog (7)

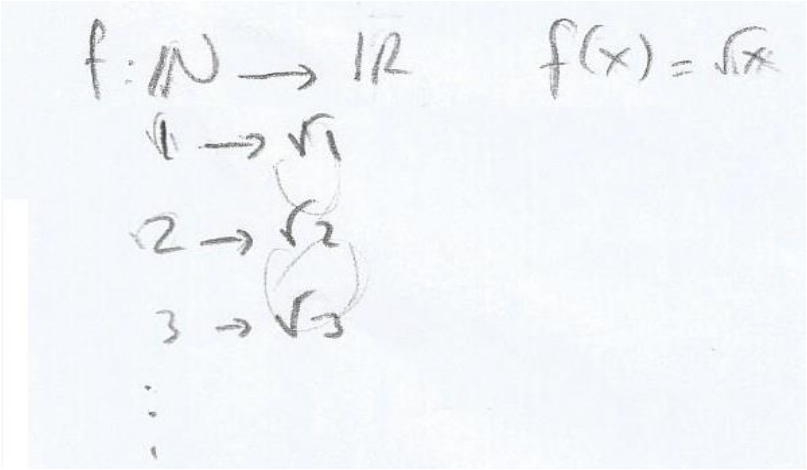
Araştırmacı	Bu soruyu neden sorduğunu biraz daha net açıklar mısın?
A	Başlangıçta düşündüğüm f(x)=$\sqrt{x}$ fonksiyonu üzerinde tekrar düşünüyordum. Mesela bu fonksiyon için reel sayılar kümesini aldım. $\sqrt{2}$ ile $\sqrt{3}$ sayılarını düşünürsek, o arada sonsuz tane eleman var. Ama bu sonsuz elemanı belirleyip eşleyemiyoruz. Yani sonsuzluktan bir sonsuzluk eksilmiş oluyor.
Araştırmacı	Bu sayıları neye eşleyemiyoruz?
A	Doğal sayılar kümesindeki herhangi bir elemana... Elemanları tek tek belirleyip sıralayamıyoruz, sayamadığımız için açıkta eleman kalıyor. Örneğin 2 sayısı $\sqrt{2}$ ile eşlenir, 3 sayısı $\sqrt{3}$ ile eşlenir. Tanım kümesindeki bütün elemanları eşlememize rağmen değer kümesinde açıkta eleman kalıyor. Örten olması mümkün değil.

A, denk olmayan bir küme çifti ararken çeşitli örnekler üzerinde farklı fonksiyonlar tanımlayarak ardışık işlemler gerçekleştirmiştir. Bu işlemleri sırasında başlangıçta oluşturduğu f(x)=$\sqrt{x}$ kurallı fonksiyon üzerinde tekrar düşündüğünde

daha önceden fark etmediği bir şey fark ederek aniden duraksamıştır. Düşünme sürecinin bu noktasında, farklı iki gerçel sayı arasında sonsuz gerçel sayı olmasına rağmen, farklı iki doğal sayı arasında daima sonlu sayıda doğal sayı olduğunu fark etmiştir. Başka bir ifade ile $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin öz alt kümesi olan her bir aralığın sonsuz elemanlı olmasına odaklanarak seçtiği kümeler arasında yeni bir ayrım oluşturmuştur. Mevcut anda odaklandığı bu ayrımı, $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonu ile bir arada düşünerek kümeler arasındaki denklik ilişkisine karar verebildiği söylenebilir. Yani A, zihninde yer alan iki yapıyı bir araya getirerek bu anda kendisi açısından net bir sonuca ulaşabilmiştir.

Bu anda varlık karakteristiği sayesinde A'nın zihninde hâlihazırda var olan yapıların uygun bir kombinasyon ile bir araya gelmesinin, Van der Waerden (1954) 'deki anlamı ile bir Einfall (*Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından ilham olarak çevrilmiştir*) oluşumuna yol açtığı söylenebilir. A, bu Einfall (ilham) sayesinde $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{N}$ kümelerine sonsuzlukları açısından bir ayrım getirebilmiştir. Bu ayrım, kendisinin de belirttiği gibi $\mathbb{R}$'nin iki elemanı arasında yine sonsuz eleman olmasıdır.

Bu noktada araştırmacı A'dan bu düşüncesini yazmasını ve açıklamasını istemiştir. A bir yandan aşağıdaki ifadeleri yazarken diğer yandan resmin altında sunulan açıklamaları yapmıştır.



Doğal sayılardan reel sayılara bir fonksiyon tanımlayalım. f(x)'i $\sqrt{x}$ *şeklinde tanımlasak. Bu durumda 1, 1'e gider. 2,* $\sqrt{2}'$*ye gider. Devam eder… Reel sayılar kümesinde (1,* $\sqrt{2}$*) aralığı, (*$\sqrt{2}$ *,*$\sqrt{3}$*) aralığı gibi aralıklar açıkta kalıyor. Bu arada sonsuz değer var. Doğal sayıların hepsini kullanıyoruz. (*kendisinden emin bir şekilde konuşmaya devam eder*) Ama yine de reel sayılarda açıkta eleman kalıyor. Fonksiyonun kuralını değiştirsem de bunları birbirlerine eşleyemem. Bu yüzden reel sayılarda daha çok eleman olduğunu düşünüyorum. Zaten bu sonuca ulaşmak istiyordum.*

Açıklama incelendiğinde A'nın, bu aşamada önceki yapılardan farklı olarak açık aralıklar ile ilgili bilgilerini seçtiği (R-) ve bunları fonksiyonun bijektif olamayacağını izah etmek için kullandığı (B-) söylenebilir. Bu eylemler sayesinde bütün doğal sayıları kullansa da gerçel sayılar kümesinde daima açıkta eleman kalacağını net bir şekilde belirterek bu kümelerin denk olamayacağını ifade etmiştir. Bu noktada bir delil olarak oluşturduğu örnek ile düşüncelerini desteklemektedir. O, bu anda soruda kendisine sorulan ilişki ağına yönelik kavramsal bir anlayış geliştirebilmiştir. Dolayısı ile bu andaki gözlemleri onun için, Rota (1997)'daki anlamı ile bir aydınlanmaya neden olmuştur. Yaşadığı aydınlanma ile A, denklik ilişkisi açısından seçtiği iki küme arasındaki durumu kavrayabilmiş ve verdiği cevabın temelinde yatan bağlantıları anlamlandırabilmiştir. Tüm bu sebepler ile mevcut anda denk olmayan iki sonsuz küme bulduğuna emindir. Bu nedenle, bir iç görü oluştuğunu gözlemlediğimiz bu anda A'nın, önceki aşamalarda oluşturduğu tanıma ve kullanma eylemlerinin sonuçlarını bir araya getirerek her sonsuz kümenin denk olmak zorunda olmadığına ilişkin yeni bir bilgi oluşturduğu (C-) söylenebilir.

Bu noktada A'nın düşündüklerini duraksamadan ve özgüvenle ifade ettiği görülmüştür. Bu aşamadaki işlemleri duraksamadan gerçekleştirmesi *doğru iz üstünde olma hissi* ile açıklanabilir. Ayrıca onun ulaşmak istediği sonuca eriştiğini açıkça ifade etmesi *bilme hissine* ve *haklılık hissine* sahip olduğunun bir göstergesi olarak yorumlanabilir. Dolayısı ile bu noktada duygusal olmayan bilişsel hislerin çok boyutlu olarak yer aldığı ve imajın sezgisel ikna karakteristiğini tamamladığı söylenebilir.

Mevcut anda A, ilişki ağını eklediği yeni bağlantılar ile genişletmiştir. Bu durum, imajın mantıksal bağlar içerme karakteristiği bağlamında yorumlanabilir. Bu bağların her adımda bir önceki adımı kapsayacak şekilde basitten karmaşığa (*daha az gelişmişten daha çok gelişmişe doğru*) ilerlemesi de imajın dinamik olma karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Bu çerçevede A'nın imajının mantıksal bağlar içerdiği ve dinamik olduğu sonucuna ulaşılabilir. Bu noktada A, araştırmacı tarafından kendisine yöneltilen ''*İlk defa mı böyle bir ispat yaptın? Daha önce bu kümelere ilişkin herhangi bir ispat yapmış mıydın?* '' sorularına cevap olarak ispatı daha önce görmediği ve böyle bir ispatı ilk defa bu çalışma içerisinde gerçekleştirdiği yanıtlarını vermiştir. Bu açıklamalar da A'nın yaklaşımının onun kişisel anlayışına paralel olarak şekillendiğinin bir göstergesi olarak değerlendirilebilir. Tüm bu süreçte seçtiği kavramlar ve bağlantılar, verdiği örnekler, ulaştığı sonuçlar A'nın bireysel çabasının bir ürünüdür. Dolayısı ile bu ispat süreci onun kişisel anlayışından bağımsız değildir. Diğer yandan imaj, ilerleyen aşamalarda onun kişisel anlayışının bir parçası olmaktan uzaklaşmış ve dış çevre ile iletişim kurabilir hale gelmiştir. Bu da A'nın düşündüklerini formal matematiksel dil çerçevesinde daha net olarak açıklayabilmesine bir olanak sağlamıştır.

B'nin İspat Süreci

B, kendisine sunulan teoremi yüksek sesle okuduktan sonra düşünmeye başladı. Bir süre için herhangi bir açıklamada bulunmadı ve hiçbir işlem yapmadı. Bunun devamında aşağıdaki açıklamayı yaparak görüşlerini açıklamaya başladı.

Bir açık aralık olacak ve ben bunu reel sayılara denkleştirmeye çalışacağım. Bu tek taraflı açık aralık olabilir ya da iki taraflı açık aralık olabilir.

İlk açıklama ile B'nin teoremi anlamlandırma sürecine başladığı söylenebilir. O, bu anlamlandırma ile ispatını biçimlendirebileceği bir yaklaşımın temelini oluşturmaya çalışmaktadır. Bu doğrultuda, açık kümeler ile $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi arasında bir denklik oluşturması gerektiğini açıkça ifade etmiştir.

Diğer yandan B'nin, bu ilk açıklaması ile *açık aralık* kavramına ilişkin ön bilgilerini gözden geçirdiği de söylenebilir. Bu gözden geçirme Tanıma (R-) epistemik eylemi bağlamında değerlendirilebilir. Çünkü B, mevcut düşünme süreci içerisinde açık aralık kavramına ilişkin zihninde yer alan bilgilerden uygun olanları seçerek ifade etmiştir. O, mevcut andaki açıklaması ile açık aralıkların tek taraflı açık bir küme ya da iki taraflı açık bir küme olabileceğini belirtmiştir. Bu açıklamanın ardından kendisine [-1,0) , [0,1) gibi açık aralık örneklerini vermiştir.



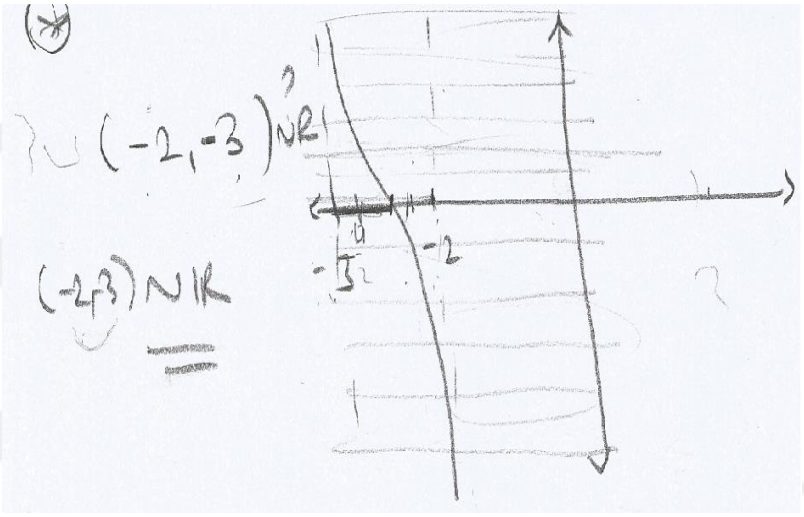
Mevcut noktada bir süre daha düşündükten sonra aşağıdaki açıklamayı yaparak düşüncelerini açıklamaya devam etmiştir.

Mesela şu anda (-3,-2) aralığını düşündüm. Bunu gerçel sayılara bijektif şekilde eşleyerek kümelerin denk olduğunu gösterebilirim.

Sunulan bu açıklama incelendiğinde B'nin iki küme arasındaki denklik ilişkisini gösterebilmek için bir eşleme (fonksiyon) oluşturmayı önerdiği görülebilir. Bu noktada onun, zihninde yer alan kavramlardan bijektif fonksiyon kavramını seçtiği söylenebilir. Çünkü o, bijektif fonksiyon kavramını bunu denkliği göstermenin bir aracı olarak tanımaktadır (R-).

Diğer yandan bu açıklama ile B'nin, teoremin neden doğru olduğunu anlamlandırabileceği örnek bir durum oluşturma çabasına giriştiği de söylenebilir. Çünkü mevcut anda teoremde yer alan soyut-kavramsal ilişkiler onun için yeterince anlamlı değildir. Dolayısı ile o, bu ilişkileri anlamlandırabilmek amacıyla örnek bir durum oluşturmaya karar vermiştir.

Bu noktada önünde bulunan kâğıt üzerine bazı işlemler yaptığı ve bir grafik çizdiği gözlenmiştir. Bu adımda çizilen grafik aşağıda sunulmuştur.



Görülebileceği gibi B, (-3,-2) aralığının $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesine denkliğini bu kümeler arasında tanımlanabilecek bir fonksiyon ile göstermeye çalışmıştır. Bu eşlemeyi oluştururken $x = -3$ ve $x = -2$ doğrularından birer asimptot olarak yararlanmıştır. Dolayısı ile bu noktada asimptot kavramını kullandığı (B-) sonucuna ulaşılabilir.

Oluşturduğu bu çizimin ardından aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

Fonksiyonun görüntü kümesini reel sayılar kümesi ve tanım kümesini de (-3,-2) aralığı olarak belirledim. Açıkta eleman kalmadığı için fonksiyonun birebir ve örten olduğunu söyleyebilirim. Yani bu kümeler denktir.

B'nin bu noktadaki örneğini oluştururken, birebirlik ve örtenlik kavramlarını seçtiği (R-) ve bu kavramları kullandığı (B-) söylenebilir. O,

oluşturduğu bu eşlemenin birebir olma ve örten olma koşullarını sağladığını x-eksenine paralel doğrular oluşturarak açıklayabilmiştir.

- Bu doğruların, fonksiyonu bir ve yalnız bir noktada kestiğini belirterek fonksiyonun birebir olduğu sonucuna ulaşmıştır.
- Bu doğruların, y- ekseninde yer alan her noktayı kestiğini belirterek fonksiyonun örten olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Bu sonuçlardan hareketle fonksiyonun bijektif olduğunu söyleyebilmiş ardından aşağıdaki açıklamaları yapmıştır.

Bu fonksiyonun kuralını oluşturmasam da sadece grafikten bijektif olduğunu söyleyebilirim. Ayrıca bunun bijektif olduğunu bildiğim için (-2,-3) kümesi ile ℝ, gerçel sayılar kümesinin denk olduğunu söyleyebilirim.

Bu noktada B'nin, fonksiyonun bijektif olmasından hareketle kümelerin denkliğini ifade etmesi, imajın mantıksal bağlar içerme karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Çünkü o, oluşturduğu görsel eşlemenin bijektif olmasından hareketle seçtiği kümelerin denk olduğu sonucuna ulaşabilmiştir. Dolayısı ile B'nin bijektif fonksiyon kavramını iki kümenin denkliğini ifade etmek amacı ile kullandığı (B-) sonucuna da ulaşılabilir.

Bu noktada araştırmacı, B'nin düşünme sürecini daha iyi anlayabilmek için bazı sorular sormaya karar vermiştir. Mevcut anda ikili arasında gerçekleşen diyaloğun bir bölümü aşağıda sunulmuştur.

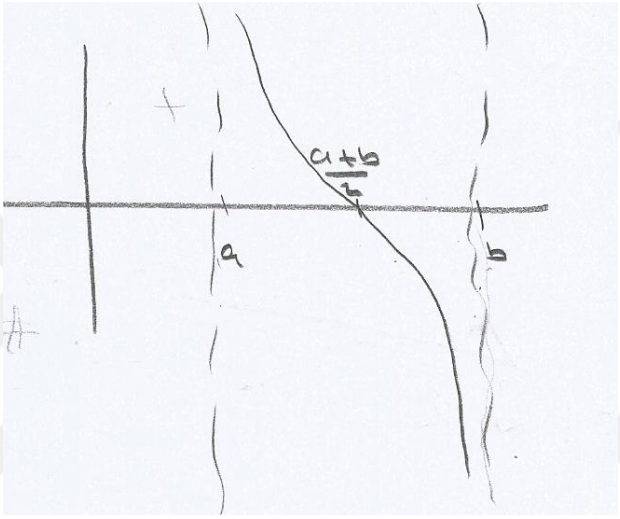
Tablo 23

Araştırmacı ve B arasında gerçekleşen diyalog (1)

Araştırmacı	Sence bu eşleme teoremin doğru olduğunu söyleyebilmek için yeterli mi?
B	(*Bir süre düşünür ve yaptığı işlemleri kontrol eder.*) Bu sadece bir örnekti. Bunu genelleştirebiliriz.
Araştırmacı	Bu genelleştirmeyi nasıl yapabilirsin?
B	Aralıkları düşündüğümde… (*Düşünceli bir tavır ile*) Her aralıkta bu şekilde bir fonksiyon yazabiliriz. Her açık aralığı mesela (a,b) gibi bir aralık şeklinde düşünebiliriz.

Diyalog incelendiğinde B'nin oluşturduğu örnek durumu bir ispat olarak kabul etmediği sonucuna ulaşılabilir. Başka bir ifade ile o, spesifik kümeleri kullanarak oluşturduğu özel bir durumu tüm kümeler için genelleştirmemektedir. Bu noktada tüm kümeler için geçerli olabilecek genel bir yaklaşımı değişkenler içeren cebirsel bir yöntem ile oluşturmayı önermiştir.

Söz konusu genelleştirme işlemine, yeni bir koordinat sistemi ve benzer bir grafik oluşturarak başlamıştır.



Bu eksen üzerinde, seçtiği keyfi bir (a,b) açık aralığının uç noktalarını (x=a ve x=b) ve bu aralıktaki x = $\frac{a+b}{2}$ ∈(a,b) noktasını işaretledikten sonra yukarıdaki gibi bir fonksiyon grafiği oluşturmuştur. Bu çizimin ardından aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

Bu genel bir yaklaşım olacağı için sadece grafik oluşturmam yetmez. Bu fonksiyonun kuralını da belirlemem gerek.

Yukarıdaki açıklamadan B'nin, genel yaklaşımını daha formal bir çerçevede oluşturmayı tercih ettiği anlaşılabilir. Buna göre o, sadece oluşturduğu grafiğin sağladığı görsel (*visual*) iknayı yeterli bulmamaktadır. Dolayısı ile grafik temsilden hareketle kurallı-cebirsel bir fonksiyon oluşturma çabasına girişmiştir.

Bu noktada bir süre düşünmüş ve kâğıt üzerine bazı işlemler yaptığı gözlenmiştir. Düşünme sürecinin sonuna geldiğinde aşağıdaki açıklamayı yaparak devam etmiştir.

Bu fonksiyonu x- eksenini kestiği noktaya göre parçalı bir şekilde ifade etmeyi deneyebilirim. Çünkü grafiğe baktığımda fonksiyonun $x = \frac{a+b}{2} \in$(a,b) *noktasından önce ve sonra farklı işaretli değerler aldığını görüyorum. Ayrıca fonksiyonun bu noktada x- eksenini kestiği için 0 değerini aldığını da söyleyebilirim.*

Sunulan açıklama incelendiğinde B'nin, ön bilgileri arasından parçalı fonksiyon kavramını seçtiği (R-) ve bunu (a,b) aralığı ile $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin denkliğini göstermek amacıyla kullanmaya (B-) karar verdiği sonucuna ulaşılabilir. Bu noktada onun, parçalı fonksiyon kavramı ile oluşturduğu grafik arasında mantıksal bir ilişki kurarak bu kararı aldığı söylenebilir. Bu ilişkinin referans noktasının grafik üzerinde yer alan x = $\frac{a+b}{2} \in$(a,b) noktası olduğu söylenebilir. Çünkü B, $x = \frac{a+b}{2} \in$(a,b) noktasından önce ve sonra fonksiyonun değerlerinin aldığı işaretleri inceleyerek alarak parçalı bir fonksiyon oluşturmaya karar vermiştir. Başka bir ifade ile o, fonksiyonun aldığı değerlerden hareketle fonksiyonun tanım kümesini x = $\frac{a+b}{2} \in$(a,b) noktasına göre parçalamayı tercih etmiştir.

Bu noktadaki açıklamalarına aşağıdaki gibi devam etmiştir.

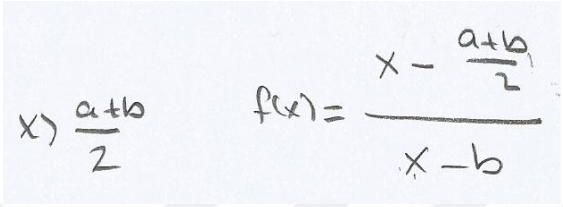
Burada, grafiğe baktığımda fonksiyon x=a ve x=b noktalarını asla kesmiyor. Yani bunlar asimptot olmalı. Dolayısı ile (x-a) ve (x-b) fonksiyonun paydasını 0 yapan değerler olmalı.

Görüldüğü gibi B, fonksiyonu tanımlayabilmek için tanım kümesini uygun bir şekilde parçaladıktan sonra düşey asimptot kavramından yararlanmaya karar vermiştir. Dolayısı ile bu grafik üzerinde gerçekleştirdiği düşünme süreci ile parçalı fonksiyon kavramı ile (düşey) asimptot kavramı arasında mantıksal bir ilişki kurduğu söylenebilir.

Bu noktada parçalı fonksiyonu tanımlarken aşağıdaki açıklamaları yapmıştır.

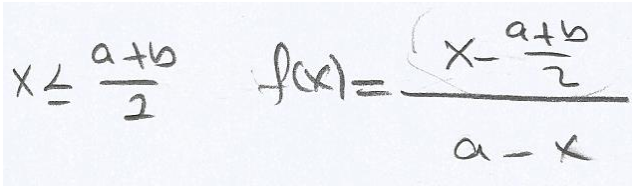
Grafiğe baktığımda x değerleri, $\frac{a+b}{2}$'den büyük ise fonksiyonun görüntüsü negatif olmalı. Ayrıca x değerleri, $\frac{a+b}{2}$'den büyük ise x=b asimptot olmalı. Dolayısı ile bu parça için kuralı şöyle yazabilirim.

(Bu yorumdan sonra aşağıdaki ifadeyi yazdı.)



Fonksiyonun sol tarafında yani x değerleri , $\frac{a+b}{2}$'den küçük olduğunda da görüntüsü pozitif olmalı. Bu sefer de x=a asimptottur. Bu parçanın kuralını da şöyle yazabilirim.

(Bu yorumdan sonra, x = $\frac{a+b}{2}$ olma durumunu da göz önüne alarak, aşağıdaki ifadeyi yazdı.)



Bu açıklamaların ardından, parçalı fonksiyonu tanımladığını aşağıdaki gibi açıkça ifade etti.

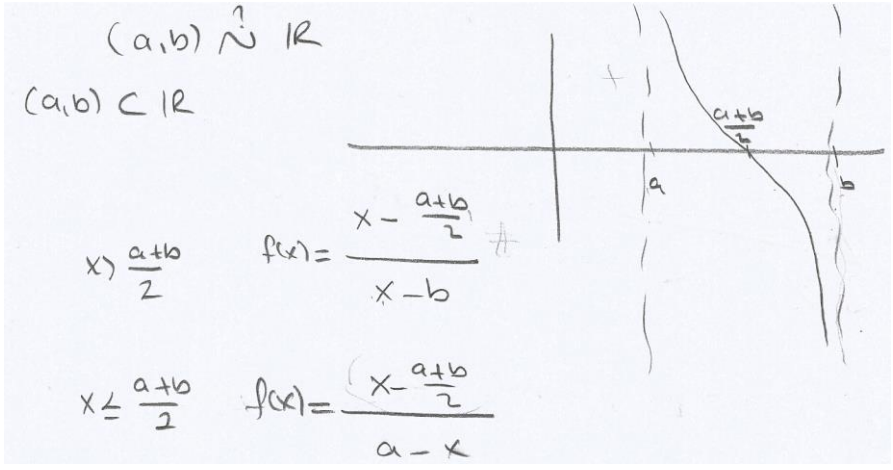
Bu fonksiyon şu anda işimize yarar. Çünkü genel bir ifadeye ulaşmak istemiştim. Burada a ve b yerine herhangi iki sayı yazarsam bu önermenin geçerli olduğunu gösterebilirim.

Böylece B'nin açık aralıklar ile $\mathbb{R}$, gerçel kümesinin denk olduğuna ilişkin görüşünü destekleyen formal bir yapıyı ortaya koyduğu söylenebilir.

Bu noktada onun görüşünü (*duraksamadan*) açıkça ifade etmesi Selden ve Selden (2007) tarafından ortaya konan duygusal olmayan bilişsel hislerden *bilme hissi* bağlamında değerlendirilebilir. Çünkü bu anda B yaptığı işlemler ile tanımladığı fonksiyonun, ispatın amacına hizmet ettiğinden ve doğru olduğundan emindir.

B, bu eşlemeyi oluştururken parçalı fonksiyon, asimptot, tanım kümesi ve görüntü kümesi gibi pek çok kavramı seçmiş (R-) ve bu kavramları amacını gerçekleştirmek için kullanmıştır (B-) . Onun kavramlar arasında kurduğu bu ilişkiler, imajın mantıksal bağlar içerme karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Ayrıca B'nin, her adımda kurduğu yeni bağlantılar sayesinde kavramsal ilişki ağını genişletmeye devam ettiği sonucuna ulaşılabilir. Tüm bu ilişkiler sayesinde başlangıçta sadece görsel bir temsil ile ifade edebildiği denklik ilişkisini cebirsel bir fonksiyon oluşturarak daha formal bir biçimde gösterebilmiştir. Bu durum da kanıt imajının dinamik olma karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Çünkü B'nin ispata yönelik imajı, gelişmemiş bir formdan daha gelişmiş bir forma doğru önceki adımları içerecek şekilde gelişmeye devam etmektedir.

Bu süreçte B'nin gerçekleştirdiği işlemleri bir arada sunan şekil aşağıda sunulmuştur.



B'nin ispatını tamamladığını belirtmesinin ardından araştırmacı ile arasında aşağıdaki kısa diyalog gerçekleşmiştir.

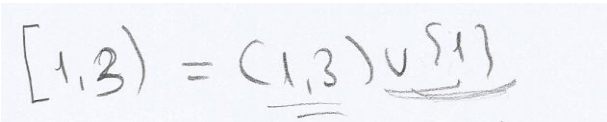
Tablo 24

Araştırmacı ve B arasında gerçekleşen diyalog (2)

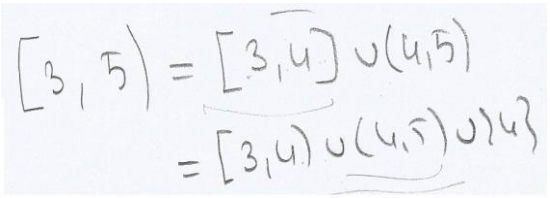
Araştırmacı	Sence şu anda ispatı tamamladın mı?
B	(*Gözlerini teorem üzerinde gezdirir.*) Şu ana kadar açık aralıkların gerçel sayılara denk olduğunu gösterdim. (*Kısa bir süre sessiz kalır.*) Teoremde herhangi bir açık aralığı kapsayan denmişti. Yani… İspatım henüz tamamlanmadı.

Diyalog incelendiğinde B'nin, ispatı henüz tamamlamadığını açıkça ifade ettiği görülebilir. Başka bir ifade ile o, olası durumlardan sadece biri için (*açık aralık*) teoremin doğruluğunu gösterdiğini belirtmiştir. Bu diyaloğun ardından açıklamalarına aşağıdaki gibi devam etmiştir.

*Teoremde açık aralıkları kapsayan bir küme denmiş. Bu küme yanında başka kümeler de içerebilir. Mesela fazladan bir eleman içerebilir. (*Önünde bulunan kâğıda bir şeyler yazmaya başlar.*) Örneğin [1,2) diyelim ya da [1,3) olsun. Bunu şu şekilde ifade edebiliriz.*



Bu da nihayetinde aynı kümeye eşittir. Başka bir örnek düşünürsem mesela bu da [3,5) aralığı olsun. Bu küme de [3,4]∪(4,5) kümesine eşittir. Dolayısı ile açık aralığı kapsayan bir küme kapalı bir aralık da içerebilir. Bu küme aynı zamanda [3,4)∪(4,5)∪{4} şeklinde de yazılabilir. Bunların hepsi açık aralığı içeren birer kümedir.



Sunulan bu açıklama ile B, *açık aralık içeren küme* tanımına uygun farklı kümeleri belirlemeye çalışmıştır. Kümeler arasında mantıksal ilişkiler kurarak (*açıkça*

belirtmese de) bir sınıflamaya ulaştığı söylenebilir. Bu sınıflamaya göre açık bir kümeyi kapsayan herhangi bir küme için farklı durumlar söz konusu olabilmektedir. Onun açıklamalarından anlaşılan bu durumlar daha açık bir şekilde aşağıda sunulmuştur.

- Bir açık aralığı kapsayan küme sadece açık aralıklardan oluşabilir.
- Bir açık aralığı kapsayan küme içerdiği açık aralığa ek olarak, sonlu veya sonsuz sayıda eleman içeren başka kümeleri veya aralıkları da içerebilir.

B, bu noktada küme kavramına ilişkin ön bilgilerini gözden geçirerek açık aralık, kapalı aralık, kümenin elemanı gibi çeşitli ön bilgilerini seçmiş (R-) ve teoremin ispatına ilişkin farklı durumların olabileceği sonucuna ulaşmıştır. Bu noktada B'nin kümelere yönelik oluşturduğu bu sınıflama, bir oluşturma (C-) eylemi olarak değerlendirilmemiştir. Çünkü B, mevcut eylem ile daha önceden sahip olmadığı yeni bir yapı elde etmemiştir. O, bu eylem sayesinde teoremi ispatlamak için farklı durumları göz önüne alması gerektiği sonucuna ulaşmıştır. Dolayısı ile bahsedilen bu sınıflamanın, bir kullanma (B-) epistemik eyleminin bir ürünü olduğu söylenebilir. Böylece B, içerisinde bulunduğu durumda teoremin içerdiği ilişkileri daha iyi anlayabilir hale geldiği söylenebilir.

Diğer yandan onun seçtiği örneklerden hareketle oluşturduğu bu ayrım, kişisel anlayışının bir ürünüdür. Başka bir ifade ile B'nin mevcut anda teoremde yer alan *açık aralık içeren küme* tanımına ilişkin ortaya koyduğu bu ayrım kendi anlayışının ve çabasının bir ürünüdür. Bu nedenle imajın kişisel anlayış karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir.

B, yukarıda sunulan açıklamalarının ardından düşünceli tavırlar sergilemeye başlamıştır. Bu noktada araştırmacıdan düşüncelerini açıklamasını istediğinde aşağıdaki yanıtı almıştır.

En son yazdığım bu kümenin gerçel sayılara denk olup olamayacağını düşünüyorum.*

* $[3,5) = [3,4) \cup (4,5) \cup \{4\}$

Bu soruya yanıt bulmak amacı ile bir süre düşünen ve bir önceki adımda oluşturduğu örneği inceleyen B, aşağıdaki açıklama ile düşüncelerini açıklamıştır.

Biz zaten (3,5) açık aralığının reel sayılara denk olduğunu zaten biliyoruz. Şimdi ben bu kümeye bir eleman daha eklesem bile bu denkliğin bozulmayacağını düşünüyorum.

Bu açıklama incelendiğinde B'nin, (3,5) ~ ℝ iken (3,5) kümesine bir eleman eklenmesi ile elde edilen [3,5) kümesinin de ℝ, gerçel sayılar kümesine denk olduğunu ifade ettiği görülmektedir. Bu açıklama iki başlık altında değerlendirilebilir. İlk olarak B'nin, (3,5) ~ ℝ olduğunu açıkça ifade etmesi, imajın varlık karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Çünkü onun önceki aşamalarda oluşturduğu yapılar hâlihazırda zihninde yer almaktadır. Dolayısı ile her (a,b) aralığı için geçerli olan (a,b)~ℝ sonucunu bu noktada (3,5)~ℝ şeklinde özel bir çerçevede ele aldığı söylenebilir. Başka bir ifade ile B, ispat sürecine yönelik tek ve bütün bir imaja sahip olduğu için önceki adımlarda ulaştığı bir sonucu mevcut duruma transfer edebilmiştir.

İkinci olarak onun [3,5)~ℝ sonucuna formal bir delik göstermeden ulaşması sezgisel bir yaklaşım olarak değerlendirilebilir. Çünkü ulaştığı bu sonucun bir varsayıma dayandığı söylenebilir.

Bu noktada B ile araştırmacı arasında aşağıdaki kısa diyalog gerçekleşmiştir.

Tablo 25

Araştırmacı ve B arasında gerçekleşen diyalog (3)

Araştırmacı	Verdiğin bu cevap, istediğin sonuca ulaştığını belirtmen için yeterli mi?
(Bu noktada bir süre sustu ve başıyla onaylamadığına ilişkin işaret yaptı. Bir süre daha düşündü. Kâğıt üzerinde bazı işlemler yaptı. Sonrasında açıklamasına devam etti.)	
B	(*Tereddütle*) Bu kümelerin denkliğini doğrudan gösteremesem bile dolaylı olarak alt kümeleri yardımı ile gösterebileceğimi düşünüyorum. Bunun için öğrendiğim bir teoremden yararlanmalıyım. Bu teoremde birbirinin alt kümesine denk olan kümeler denk oluyordu.

Sunulan diyalogdan görüldüğü gibi B'nin ortaya koymuş olduğu sezgisel yaklaşım onu matematiksel olarak ikna etmemiştir. Onun bu yaklaşımı yeterli kabul etmemesinin temel nedeni, bu yaklaşım ile bir sezgisel kesinlik hissine ulaşamamasıdır. Çünkü varsayıma dayanan bu yaklaşım ile B, düşüncelerini destekleyebilecek formal bir delile ulaşamamıştır. Bu nedenle imajın duyuşsal boyutunu oluşturan sezgisel ikna hissi ortaya çıkmamıştır. Sonuç olarak B, daha formal bir delil üretebileceği alternatif bir yöntemin arayışına girişmiştir.

B'nin bu arayış sürecinde [3,5) ve $\mathbb{R}$ kümelerinin kendilerini kullanarak formal bir yaklaşım biçimlendiremediği ve dolayısı ile bu kümelerin alt kümelerinden yararlanmaya karar verdiği söylenebilir. Dolayısı ile bu noktada, alt kümelerden hareketle ispatı oluşturmasını sağlayacak yapılardan Schröder-Bernstein Teoremi ile mantıksal bir bağlantı kurduğu sonucuna ulaşılabilir.

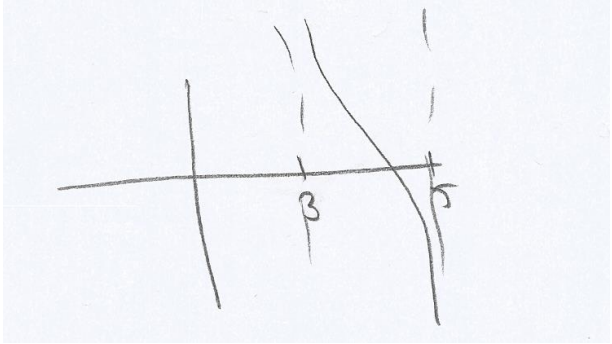
Bu teorem aşağıda sunulmuştur.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \subset A \Rightarrow A_1 \sim B \\ B_1 \subset B \Rightarrow B_1 \sim A \end{array}\right\} A \sim B$$

Yukarıda sunulan diyaloğun ardından B, seçtiği bu teoremi kullanarak [3,5) ve $\mathbb{R}$ kümelerinin denkliğini formal bir şekilde ortaya koyma çabasına girişmiştir. Bunun için her iki kümeden uygun alt kümeleri aşağıdaki yaklaşımla belirlemeye çalışmıştır.

Bu teoreme göre öncelikle [3,5) kümesinden bir alt küme almalıyım. Burada pek çok alt küme alabilirim. Mesela benim için en kolay (3,5) aralığını düşünebilirim. Bunun, gerçel sayılara denk olduğunu basit bir grafik yardımı ile gösterebilirim.

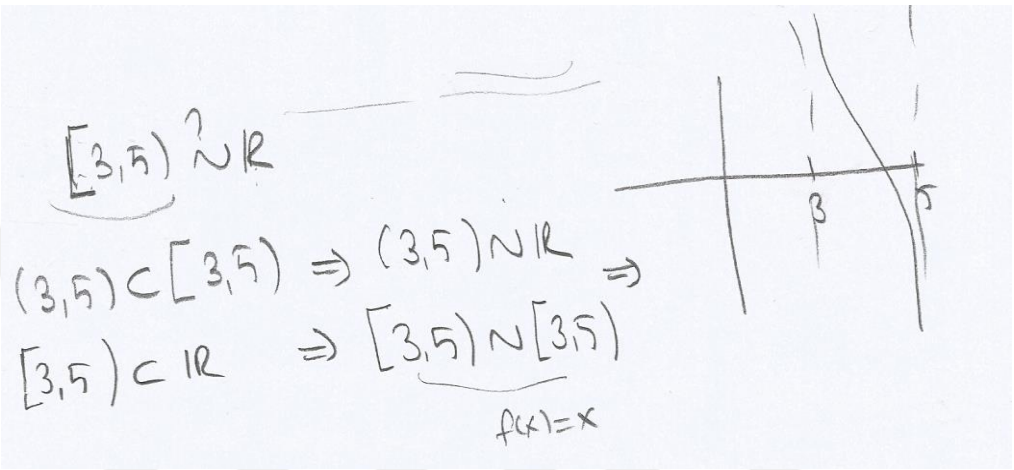
(Bu doğrultuda B'nin çizdiği grafik aşağıda sunulmuştur.)



(Çizimin ardından açıklamalarına aşağıdaki gibi devam etti.)

Şimdi de Reel sayıların bir alt kümesini almalıyım. Burada da pek çok alt küme mümkün. Mesela en kolay [3,5) kümesinin kendisini seçebilirim. Zaten bu küme üzerinde tanımlı f(x)=x birim fonksiyonu ile kendisine denkliğini göstermiş olurum.

B'nin bu noktadaki yaklaşımı bir bütün olarak yukarıda sunulmuştur.



B, açıklamaların ve işlemlerin ardından [3,5) aralığının ℝ, gerçel sayılar kümesine denk olduğunu açıkça ifade etmiştir. Ayrıca, bu noktada kendisinden emin bir tavır içerisinde olduğu araştırmacı tarafından gözlenmiştir. Bu noktada B'nin bir *bilme hissine* sahip olduğu yorumu yapılabilir.

Diğer yandan o, bu aşamada ortaya koyduğu yaklaşım ile Schröder-Bernstein Teoremi, alt küme kavramı ve birim fonksiyon gibi yeni kavramları seçerek (R-) bunları görüşünü desteklemek amacı ile kullanmıştır (B-). Bu sayede bir önceki aşamada ortaya koyduğu sezgisini formal bir delil üreterek doğrulayabilmiştir.

Bu noktada kavramlar arasında kurulan bu bağlantılar, imajın mantıksal bağlar içerme karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Ayrıca ispat sürecinin, yeni kavramları ve ilişkileri içerecek şekilde genişlemesi dinamik olma karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Çünkü bu noktada imaj, seçilen önceki yapıları içerecek şekilde gelişmeye devam etmektedir.

Bu aşamada araştırmacı, B'nin düşünme biçimini daha iyi anlayabilmek için ona bazı sorular yöneltmeye karar vermiştir. İkili arasında geçen diyalogun bir kısmı aşağıda sunulmuştur**.**

Tablo 26

Araştırmacı ve B arasında gerçekleşen diyalog (4)

Araştırmacı	Peki, kümelerin denkliğine ilişkin bu yaklaşımın seni ikna etti mi?
B	(*Duraksamadan*) Evet, bu yaptığımdan ikna oldum. Bunlar denk kümeler.
Araştırmacı	Peki, artık ispatı tamamladığını söyleyebilir miyiz?
(Gözlerini, önceki aşamada oluşturduğu örnek durum ve teorem üzerinde gezdirdi.	
B	Bir öncekine benziyor. Bu da bir örnekti. Her küme için doğru olduğunu gösterebilmek için değişkenlerden yararlanmalıyım.

Diyalog incelendiğinde, B'nin yaptığı işlemler ile ulaştığı $[3,5) \sim \mathbb{R}$ denkliğinden emin olduğu sonucuna ulaşılabilir. Bu noktada, işlemlerin kendisini ikna ettiğini açıkça ifade etmiştir. Onun bu noktada ikna olmasının temel nedeni, elde ettiği sonucu formal delillere dayandırmasıdır. Başka bir ifade ile B, bu delillerden hareketle bir önceki adımda ortaya koyduğu sezgisel görüşünü doğrulayabilmiştir. Dolayısı ile onun bu noktada bir *haklılık hissine* ulaştığı yorumu yapılabilir. Çünkü B, bu anda yaptığı işlemlerin ve elde ettiği sonucun doğru olduğunu görmektedir.

Diğer yandan B, bu noktada ispatın tamamlandığını ifade etmemiştir. O, yaptığı işlemler ile sadece (*tıpkı bir önceki aşamada olduğu gibi*) örnek bir durum oluşturduğunu açıkça ifade etmiştir. Genel bir sonuca ulaşmak için tüm durumlarda geçerli olabilecek cebirsel bir yaklaşımı kullanması gerektiğini belirtmiştir.

B, bu yaklaşımı önermesinin ardından aşağıdaki açıklamayı yaparak görüşlerini açıklamaya devam etmiştir.

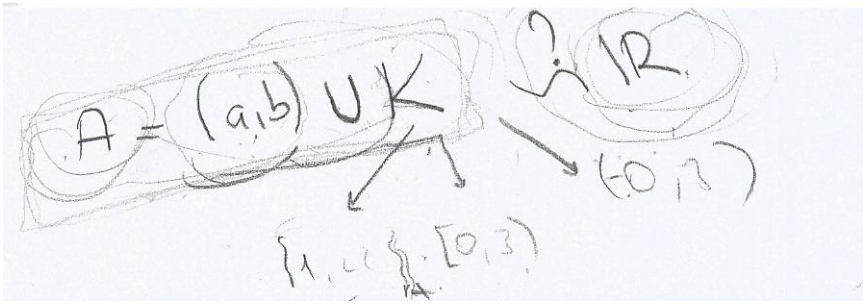
Bir açık aralığı kapsayan küme başka kümeleri de içerebilir. Bunu zaten daha önceden de söylemiştim. Mesela (a,b) aralığını kapsayan bir küme yanında eleman

veya açık aralık veya kapalı aralık içerebilir. Bunu bilemeyiz. Dolayısı ile tüm bu durumları nasıl ifade edebileceğimi bilmiyorum.

Bu açıklama ile B, önceki aşamalarda oluşturduğu sınıflamaya göre farklı durumlar oluşabileceğini ve bu durumları bir arada düşünemediğini açıkça ifade etmiştir. Bu noktada, olası durumlardan her birini ayrı ayrı incelemeyi düşünmüştür. Ancak bu yöntem ile çok sayıda ayrık durumu incelemesi gerektiğini belirterek bundan vazgeçmiştir. Cebirsel anlayışını biçimlendirmeye çalıştığı bu noktada bir süre işlem yapmadan düşünmüş, teorem ile verdiği önceki örnekleri incelemeye devam etmiştir. Bir süre sonra kendisinden daha emin bir şekilde görüşlerini açıklamaya başlamıştır. Bu süreçte kâğıda bazı notlar aldığı araştırmacı tarafından gözlenmiştir.

Herhangi bir açık aralık içeren küme düşüneceğim. (Bir an duraksar) *Mesela bu kümeye A kümesi dediğimizi düşünelim. A kümesinin, (a,b) gibi bir açık aralık içereceğini biliyorum. Ama burada (a,b) kümesinin yanında farklı kümelerin de olabileceğini söylemiştim. Yani pek çok durum var.* (Bir süre sessiz kalır) *Bunların hepsinin ortak özelliği (a,b) aralığını içermeleri. Ben (a,b) kümesinin yanında ne olduğunu bilmiyorum. Ama olabileceği şeyleri biliyorum.* (Bir süre daha sessiz kalır) *Tamam, mesela ben (a,b) kümesinin yanında olabilecek diğer kümeyi K olarak isimlendireyim. Bu durumda A kümesini şöyle yazabilirim.*

(Bu noktada yazdığı ifade aşağıda sunulmuştur.)



Bu noktada B'nin Rota 'daki (1997) anlamı ile bir Aydınlanma (*Enlightenment*) yaşadığı söylenebilir. Çünkü mevcut ana kadar o, teoremi ispatlayabilmek için olası durumları belirleyebilmiş ancak bunları ayrık durumlar olarak ele alabilmiştir. Diğer yandan mevcut anda gerçekleşen bu aydınlanma ile

teoremde yer alan *herhangi bir açık aralık içeren küme* kavramının formal ifadesine ulaşabilmiştir. Bu tanımlama sayesinde, önceden oluşturduğu durumları ve bunların birbiri ile olan ilişkilerini bir arada düşünebilmiştir. Bu sayede tüm olası durumları kapsayan genel (*cebirsel*) bir yapı ile ifade edebilmiştir.

Bu süreçte B'nin, önceki aşamalarda oluşturduğu sınıflamaya ait farklı durumları, teoremde sunulan ilişkiler çerçevesinde bir araya getirdiği ve böylece yeni bir yapı oluşturabildiği (C-) söylenebilir. Bu noktada biçimlenen cebirsel yapı sayesinde onun, belirlediği ayrık durumları tek çatı altında ifade edebilir hale geldiği söylenebilir. Başka bir ifade ile bu ana kadar ayrı ayrı ele alma ihtiyacı hissettiği tüm durumları oluşturduğu bu yapı sayesinde bir arada gösterebileceği bir seviyeye gelmiştir.

Bu durum imajın mantıksal bağlar içerme karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Çünkü B, teoremde yer alan kavramlar ve seçtiği diğer yapılar arasında mantıksal bağlantılar kurarak bu cebirsel yapıyı oluşturabilmiştir. Diğer yandan bu durum imajın dinamik olduğunun bir göstergesi olarak da yorumlanabilir. Çünkü B, oluşan bu yapı sayesinde mevcut ana tek çatı altında bir araya toplayamadığı ilişkileri bir araya getirebilmiştir. Dolayısı ile B'nin sahip olduğu imajın mevcut anda, önceki durumlara göre daha kompleks bir yapıya sahip olduğu sonucuna ulaşılabilir.

B'nin A kümesini tanımlamasının ardından araştırmacı arasında aşağıdaki kısa diyalog gerçekleşmiştir.

Tablo 27

Araştırmacı ve B arasında gerçekleşen diyalog (5)

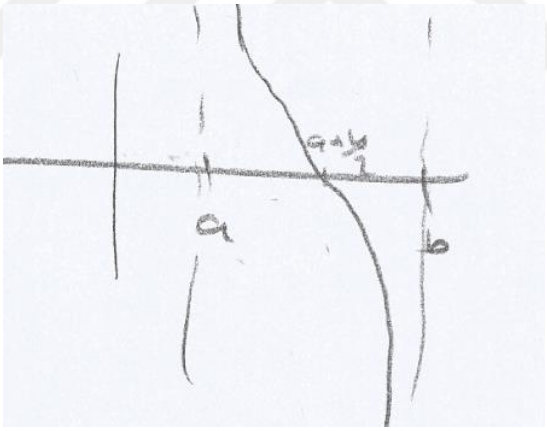
Araştırmacı	Peki, bu A kümesi reel sayılara denk midir?
B	(*Gülümser ve kendisinden emin olarak…*) Bence denktir.
Araştırmacı	Neden böyle düşündün?
B	Daha önce kullandığım yöntemi kullanırsam gösterebilirim.

Görüldüğü gibi B yapacağı işlemler ile doğru sonuca ulaşabileceğini açıkça ifade etmektedir. Dolayısı ile bu *noktada doğru iz üstüne olma hissine* sahip olduğu söylenebilir. Ayrıca bu noktada kullanabileceği yöntem ile doğru sonuca ulaşabileceğini açıkça ifade etmesi imajın varlık karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Çünkü B, bu anda ispata ilişkin tek ve bütün bir imaja sahiptir. Dolayısı ile önerdiği yaklaşım ile sürecin sonunda istediği sonuca ulaşabileceğini öngörebilmektedir.

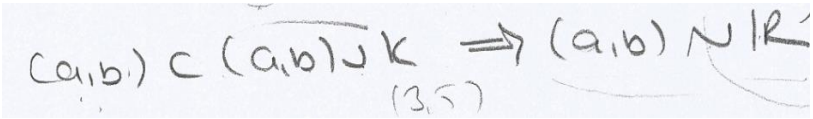
Bu diyaloğun devamında B, aşağıdaki açıklamaları yaparak devam etmiştir.

Mesela önce A kümesinin bir alt kümesini alabilirim. Bu alt küme (a,b) açık aralığı olsun. Bunun gerçel sayılara denk olduğunu biliyorum. Çünkü daha önce gösterdim.

Bu noktada sadece aşağıdaki grafiği çizmekle yetinmiş ve fonksiyonun kuralını tekrardan oluşturmamıştır.



(Bu grafiğin altına aşağıdaki ifadeleri yazmıştır.)



Yazma işlemini tamamlamasının ardından aşağıdaki açıklamayı yaparak düşüncelerini açıklamaya devam etmiştir.

İlk adımı tamamladım. Burada, A kümesinden aldığım (a,b) alt kümesinin, gerçel sayılara denk olduğunu grafikle gösterdim. Sıra geldi, R kümesinden bir alt küme

almaya. Ama daha önce de söylediğim gibi burada K kümesini bilmiyorum. Sonlu olabilir, tek tarafı açık olabilir, iki tarafı açık olabilir, kapalı aralık olabilir. Pek çok durum söz konusu...

Sunulan açıklama incelendiğinde B'nin, teoremin ikinci adımını gerçekleştirmek için gerçel sayılar kümesinden uygun bir alt küme belirleme sürecinde K kümesi için oluşabilecek farklı durumları ayrı ayrı değerlendirdiği ve bu nedenle bir yaklaşım oluşturmada güçlük yaşadığı sonucuna ulaşılabilir.

Bu noktada araştırmacı, B'nin kümelere ait düşünme biçimini daha iyi anlayabilmek için ona aşağıdaki soruyu yöneltmiştir.

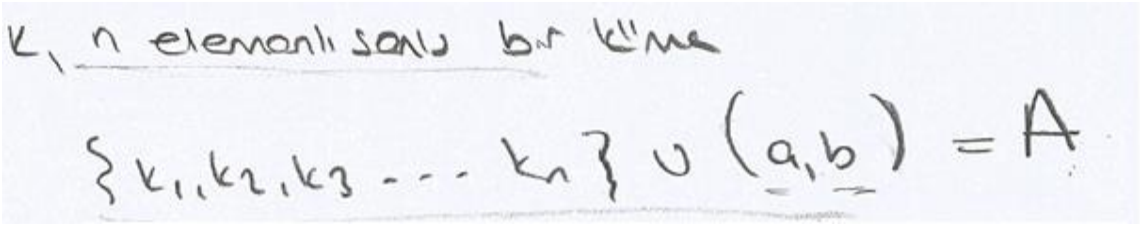
K kümesinin, bahsettiğin bu durumlardan hangisi olduğu ispatını nasıl etkileyecek?

Sunulan soru üzerine kısa bir süre düşünen B, yaptığı işlemler ile kümeler arasında bir bağlantı kurmaya çalıştığını belirtmiştir. Diğer yandan, bu bağlantıyı oluşturabildiği sürece K kümesinin nasıl tanımlandığının bir önemi olmadığını açıkça ifade etmiştir.

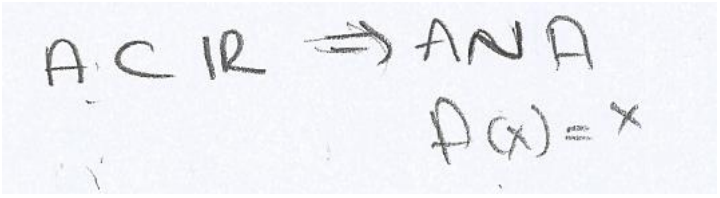
Bu kısa diyalogun ardından B, Schröder-Bernstein teoremini kullanarak oluşturmaya çalıştığı ispatın ikinci adımında K kümesine ilişkin durumu anlamlandırmak için aşağıdaki örnek durumu oluşturmaya karar vermiştir.

Mesela burada K kümesi sonlu bir küme olsun ve $K=\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}$ elemanlarından oluşsun. Bu durumda A kümesi bu küme ile (a,b) aralığının birleşiminden oluşacak. Öyleyse A kümesini şöyle ifade edebiliriz.

(Bu noktada önünde bulunan kâğıda aşağıdaki ifadeleri yazar.)



Bu gösterimi oluşturduktan sonra $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinden bir alt küme seçmesi gerektiğini belirtmiştir. Bu noktada pek çok alt küme seçebileceğini ancak en kolay $A \subset \mathbb{R}$ kümesini kullanarak istediği sonuca ulaşabileceğini ifade etmiş ve bu kümenin kendisine denkliğini birim fonksiyon yardımı ile aşağıdaki gibi göstermiştir.



Bu örnek durumu oluşturduktan sonra bir anda duraksamış ve ani bir hareketle K kümesini işaret ederek aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

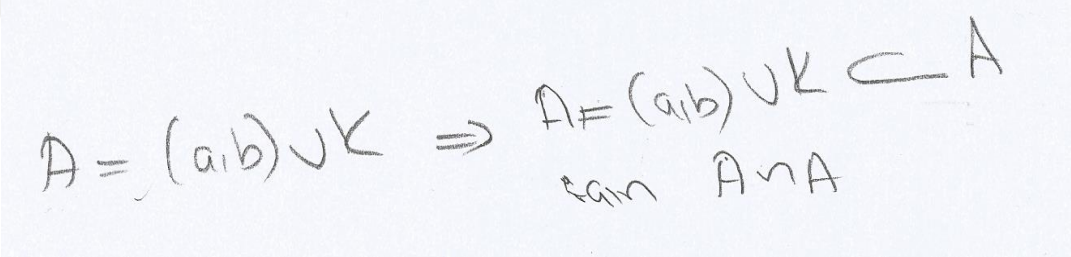
Tamam! Şu anda anladım. Şimdi ben, K'yı sonlu bir küme olarak seçtim ve burada denkliği gösterdim. Eğer K bundan farklı, mesela sonsuz bir küme olsaydı… Ben bu sefer de $\mathbb{R}$ *kümesinden bu sonsuz kümeyi alt küme olarak seçer ve işlemimi gerçekleştirirdim. Dolayısı ile K kümesinin sonlu veya sonsuz olması, yani nasıl tanımlandığı bu sonucu etkilemez.*

Bu noktada B'nin $K=\{k_1,k_2,\ldots,k_n\} \subset A$ kümesi için oluşturduğu özel durumdan elde ettiği sonuçtan hareketle Van der Waerden (1954) 'deki anlamı ile bir Einfall'a ulaştığı söylenebilir. Bu Einfall (ilham) ile zihninde hâlihazırda var olan yapıları mantıksal bir çerçeve ile bir araya getirebildiği ve dolayısı ile bir iç görüye ulaştığı söylenebilir. Böylece, K kümesine ait farklı durumların teoremin ispatına doğrudan bir etkisi olmadığına ilişkin bir yapı oluşturabilmiştir (C-). Yeni ortaya çıkan bu yapı ile B, herhangi bir açık kümeyi içeren kümenin (*yanında hangi kümeyi içerirse içersin*), gerçel sayılar kümesine denk olduğu sonucuna ulaşabilmiştir. Başka bir ifade ile K kümesinin nasıl tanımlandığının ispat sürecini doğrudan etkilemeyeceğini anlayabilmiştir. Çünkü bu küme nasıl tanımlanırsa tanımlansın Schröder-Bernstein Teoremine göre $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinden bir alt küme olarak A kümesinin kendisini seçebileceğini fark etmiştir.

B'nin bu noktadaki açıklaması ile *bilme hissine* sahip olduğu sonucuna ulaşılabilir. Çünkü bu anda yaptığı açıklamalardaki ses tonu ve vücut hareketleri

ile kendisinden emin bir tavır sergilemektedir. Diğer yandan bu andaki ifadeleri ile istediği sonuca ulaşabildiğini açıkça ifade etmiştir. Dolayısı ile mevcut anda ispata ilişkin bir tamamlanmışlık duygusuna sahip olduğu söylenebilir. Bu tamamlanmışlık duygusu imajın duyuşsal boyutunun kesin bir şekilde ortaya çıktığının bir göstergesi olarak değerlendirilebilir. Başka bir ifade ile ispat sürecinde işletilen bilişsel boyuta eşlik eden duyuşsal boyut ile sayesinde, sürecin doğruluğuna ait sezgisel iknanın sağlanabildiği sonucuna ulaşılabilir.

Yukarıda sunulan açıklamaların ardından B, tüm K kümeleri için geçerli olduğunu ifade ettiği aşağıdaki koşulu yazarak ispatın ikinci aşamasını tamamladığını ve ulaşmak istediği sonuca ulaşabildiğini açıkça ifade etmiştir.



Tüm bu sürecin sonunda B, $\mathbb{R}$'nin herhangi bir açık aralığı kapsayan her alt kümesinin $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesine denk olduğunu formal-matematiksel olarak ispatlayabilmiştir.

D'nin İspat Süreci

D, ispat sürecine kendisine sunulan teoremi kısık bir sesle okuyarak başladı. Bu anda, yüzünde kararsız bir ifade olduğu araştırmacı tarafından gözlendi. Kısa bir süre sonra, teoremi aynı ses tonu ile ancak daha yavaş bir tonda okuduğu görüldü. Ardından, başını elleri arasına alarak sessiz bir şekilde beklemeye başladı. Bu noktada bir süre sessizce bekledikten sonra aşağıdaki açıklamaları yaparak görüşlerini açıklamaya başladı.

Gerçel sayılar kümesi var. Biz bunun herhangi bir sonsuz alt kümesini alıyoruz. Bunun da sayılabilir sonsuz bir alt kümesi olduğunu söylüyor.

Sunulan açıklama incelendiğinde, D'nin ilk düşünme süreci ile teoremde yer alan ilişkileri belirlemeye çalıştığı söylenebilir. Ancak bu açıklamasından sonra da düşünceli tavırlar içerisinde olmaya devam ettiği gözlenmiştir. Tüm bu tavırlar, D'nin mevcut anda teoremin içerdiği soyut ilişkileri yeterince anlamlandıramadığının bir göstergesi olarak yorumlanabilir.

O, mevcut anda kısa bir süre duraksadıktan sonra aşağıdaki açıklamayı yaparak görüşlerini açıklamaya devam etmiştir.

Sayılabilirlik diyor… Yani doğal sayılar kümesine denk olacak sonsuz kümelerden bahsediyoruz.

Sunulan açıklama incelendiğinde D'nin, zihninde yer alan kavramları gözden geçirdiği ve denklik kavramını mevcut durumla ilişkili görerek seçtiği söylenebilir. Başka bir ifade ile onun, sayılabilir sonsuz küme kavramını doğal sayılara denk olabilen sonsuz küme olarak tanıdığı (R-) yorumu yapılabilir. Ayrıca D'nin, kavramlar arasında oluşturduğu bu bağlantı, şekillenmeye başlayan imajın mantıksal bağlar içerdiğinin ilk göstergesi olarak yorumlanabilir. Çünkü o, bu bağlantı sayesinde sayılabilirlik kavramının geri planında yatan ilişkileri dikkate alabilmiştir.

Diğer yandan D, yukarıda sunulan açıklamanın hemen devamında aşağıdaki açıklamayı yaparak düşünme sürecine devam etmiştir.

O zaman… Teoreme göre gerçel sayıların her sonsuz alt kümesinin doğal sayılara denk bir alt kümesi olduğunu söyleyebilirim.

Bu noktada D'nin, teoremi ilk okuduğundan daha farklı bir çerçevede ele almaya başladığı söylenebilir. Çünkü o, mevcut ana kadar gerçekleştirdiği düşünme süreci sayesinde sayılabilirlik kavramını bir denklik ilişkisi olarak ele alabilmiştir. Böylece kendisine sunulan bu teoremi, bir denklik ilişkisi bağlamında yorumlayabilmiştir. Dolayısı ile bir önceki adımda seçtiği denklik kavramını, teoremde yer alan ilişkileri daha anlamlı hale getirebilmek amacı ile kullandığı (B-) sonucuna ulaşılabilir.

Bu aşamada D'nin, bir an için duraksadığı gözlenmiştir. O, mevcut anda kendisine sunulan teoremi bir kez daha okumuş ve ardından aşağıdaki açıklamayı yaparak devam etmiştir.

Teoreme göre şimdi… Alt kümelerin, sayılamaz küme olması istenmiyor. Çünkü o zaman doğal sayılara denk olmaz. Bunun yerine doğal sayılara denk alt kümeler olduğunu göstermem gerekiyor. Bunun üzerinde düşünmeliyim.

Sunulan açıklama incelendiğinde D'nin, ön bilgileri arasından sayılamaz küme kavramını seçtiği söylenebilir. Mevcut anda o, sayılamaz kümeleri doğal sayılara denk olmayan kümeler şeklinde tanımış (R-) ve bunu açıkça ifade etmiştir. Bu sayede teoremin içerdiği ilişkileri sayılamaz küme kavramı açısından yorumlayabilmiştir. Böylece D'nin, seçtiği bu kavramlar (*sayılabilirlik-sayılamazlık*) arasındaki ayrımdan hareketle, ispat için uygun olan ve olmayan iki farklı yaklaşımı ayırt edebildiği sonucuna ulaşılabilir.

D'nin, sayılabilirlik ve sayılamazlık kavramları arasında kurduğu bu ilişki, imajın mantıksal bağlar içerme karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Çünkü o, seçtiği bu kavramları karşılaştırarak teoremde sunulan ilişkileri yorumlamış ve bu sayede kümelerin sahip olması gereken özellikleri belirleyebilmiştir. Diğer bir ifade ile bu kavramları birbirinden ayrık (izole) bir çerçeve ele almamıştır.

Diğer yandan D'nin, bu noktada ispatı için uygun bir yol seçtiğini düşünmesi Selden ve Selden (2007) tarafından ortaya konan duygusal olmayan bilişsel

hislerden *doğru iz üstünde olma hissi* bağlamında değerlendirilebilir. Çünkü o, mevcut andaki yaklaşımının kendisini bir sonuca götüreceğinden emindir. Bu durum, duyuşsal eylemlerin de ispat sürecinde yer aldığının bir göstergesi olarak yorumlanabilir.

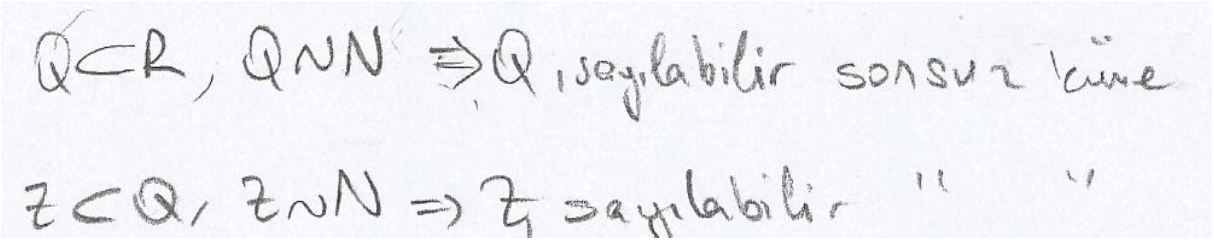
Mevcut ana kadar sunulan süreçte, D'nin teoremi farklı açılardan yorumladığı ve içerdiği ilişkileri anlamaya çalıştığı söylenebilir. Ancak o, tüm bu yaptığı açıklamaların ardından bir an için duraksamış ve düşünme sürecine ara vermiştir. Bu noktada (*kısık bir ses ile*) aşağıdaki soruyu kendisine yöneltmiştir.

Şu an düşündüğümde her sonsuz küme için bu gerçekten de böyle midir?

Bu sorudan hareketle, D'nin teoremi yorumlamasına rağmen teoremin içerdiği soyut ilişkileri tam olarak anlamlandıramadığı sonucuna ulaşılabilir. Dolayısı ile mevcut anda bir ispat sürecine başlamak yerine teoremi doğrulamaya karar verdiği söylenebilir.

Bu noktada yaptığı açıklamalar aşağıda sunulmuştur.

Gerçel sayılar kümesinin, alt kümelerini düşünürsem… Bunlar ya sayılabilirdir ya da sayılamazdır... Mesela bir alt küme olarak rasyonel sayıları düşünebilirim. (Bu anda bir şeyler yazmaya başlar.) *Rasyonel sayılar, gerçel sayıların alt kümesidir ve sayılabilirdir…* (Bir an için duraksar ve teoreme bakar.) *Şimdi rasyonel sayılardan da alt küme almalıyım. Mesela tam sayıları (ℤ) alabilirim. Tam sayılar da doğal sayılara denk olduğu için sayılabilir.*



Sunulan açıklama incelendiğinde D'nin, bir önceki adımda olduğu gibi sayılabilir-sayılamaz kümeler arasındaki ayrımı göz önüne aldığı görülebilir. Mevcut anda o, bu ayrımdan hareketle teoremdeki ilişkileri anlamasını sağlayabilecek uygun örnekler verme çabasına girişmiştir. Bu noktada onun ℝ,

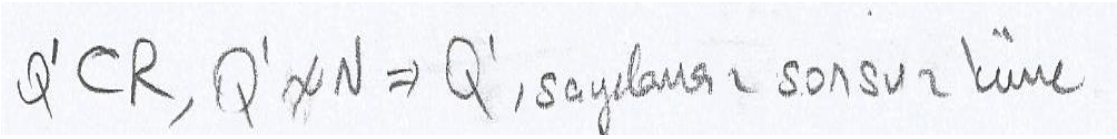
gerçel sayılar kümesini $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \bar{Q}$ şeklinde iki ayrık kümenin birleşimi şeklinde tanıdığı (R-) ve bu ilişkiyi örnek bir durum oluşturmak amacıyla kullanmaya (B-) karar verdiği söylenebilir. Bu doğrultuda $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir bir küme olduğunu göz önüne almış ve bu kümenin sayılabilir bir alt kümesi olarak tam sayılar ($\mathbb{Z}$) kümesini seçmiştir. Böylece, teoremin sayılabilir kümeler için doğru olduğunu anlayabileceği bir örneği biçimlendirebilmiştir.

Diğer yandan, bu noktada oluşturduğu örneğin sayılabilir kümeler açısından bir ispat olmadığını açıkça ifade etmiştir. Dolayısı ile mevcut adımda oluşturduğu bu özel durumun, tüm sayılabilir kümeler için geçerli olabilecek genel bir ilişkiyi temsil etmediğinin farkındadır.

Sayılabilir kümeler için oluşturduğu bu örneğin ardından, sayılamaz kümeler için de teoremin doğruluğunu göstermeye karar vermiştir. Bu noktada $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin sayılamaz bir kümesi olarak $\bar{Q}$, irrasyonel sayılar kümesini seçmiş ve ardından aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

İrrasyonel sayılar da gerçel sayılar kümesinin bir alt kümesi... Eğer teorem doğruysa bu kümenin de sayılabilir sonsuz bir alt kümesi olmalı. Çünkü her küme için böyle olduğu söylenmiş.

Bu noktada, önünde bulunan kâğıda aşağıdaki ifadeleri yazmıştır.
(Alttaki resimde yer alan Q' sembolü irrasyonel sayılar kümesini ifade etmektedir.)



Bu açıklama ile D'nin tümdengelimsel bir yaklaşım sergilediği söylenebilir. Çünkü o, her sonsuz alt küme için genel bir yargıyı kapsayan bu teoremin spesifik bir küme olan irrasyonel sayılar kümesi için de geçerli olması gerektiğini açıkça ifade etmiştir. Diğer yandan bu açıklamasının hemen devamında düşüncelerini aşağıdaki gibi ifade etmeye devam etmiştir.

İrrasyonel sayıları düşünürsem… Pi sayısı (π), e sayısı, $\sqrt{2}$ *ve* $\sqrt{3}$ *gibi sayılar var. Şimdi ben bu kümenin sayılabilir bir alt kümesini tanımlayacağım… Mesela…* (Bir süre düşünür.) *Hem irrasyonel olup hem de negatif olanları alsam… Ama olmaz… Çünkü negatif irrasyonel sayıları da sayamayız.*

Bu açıklama incelendiğinde, D'nin irrasyonel kümesine ilişkin zihninde yer alan bilgilerini gözden geçirdiği ve bu sayede ile sayılabilir bir alt küme tanımlamaya çalıştığı söylenebilir. Dolayısı ile mevcut anda irrasyonel sayılar kümesi ve sayılabilir küme kavramları arasında mantıksal bir ilişki oluşturmaya çalıştığı söylenebilir.

Bu noktada araştırmacı, D'nin düşünme biçimini daha iyi anlayabilmek için ona birkaç soru yöneltmeye karar vermiştir. İkili arasında gerçekleşen diyalog aşağıda sunulmuştur.

Tablo 28

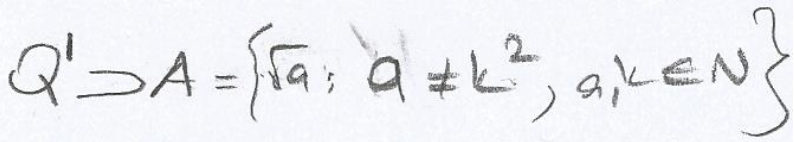
Araştırmacı ve D arasında gerçekleşen diyalog (1)

Araştırmacı	Şu anda neye ulaşmaya çalışıyorsun?
D	Sayılamaz bir küme seçtim. Bunun sayılabilir bir alt kümesi olmalı. Bunu bulmaya çalışıyorum.
Araştırmacı	Peki, bunu nasıl yapabilirsin?
D	Mesela ben bu irrasyonel sayıların tamamını değil ama bir kısmını seçebilirim diye düşünüyorum.

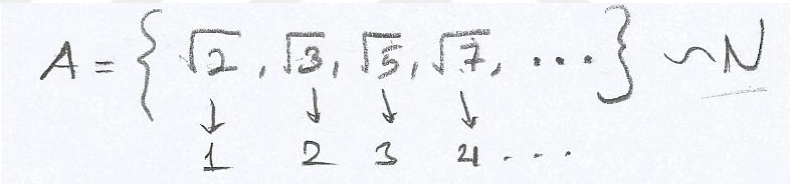
Diyalogda görüldüğü gibi D, uygun bir yaklaşım ile varmak istediği noktaya ulaşabileceğini düşünmektedir. Dolayısı ile Selden ve Selden (2007) tarafından ortaya konan duygusal olmayan bilişsel hislerden *doğru iz üstünde olma hissine* sahip olduğu söylenebilir. Çünkü o, mevcut andaki yaklaşımının kendisini bir sonuca götüreceğinden emindir.

Sunulan diyalogun ardından D, kısa bir süre daha düşündükten sonra aşağıdaki açıklamayı yaparak devam etmiştir.

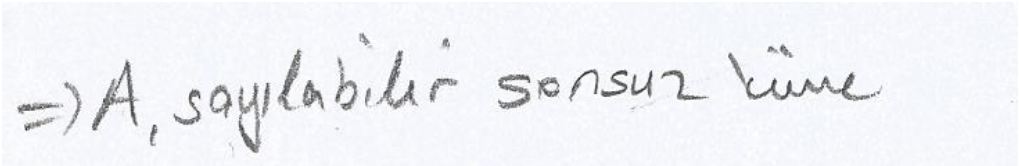
Şimdi ben… İrrasyonel sayıların bir alt kümesini A olarak isimlendirebilirim. Bu kümenin $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ *gibi kökten çıkamayan sayılardan yani elemanlardan oluştuğunu düşünsem... Sonuçta bunlar da irrasyonel sayılar…* (Bir süre sessiz kalır.) *Hatta şöyle yazabilirim.*



Bu noktada D'nin, irrasyonel sayılar kümesine ilişkin bilgilerini gözden geçirdiği ve kök içerisinden çıkmayan doğal sayıları irrasyonel olarak tanıdığı (R-) sonucuna ulaşılabilir. Bu tanıma eylemi sayesinde $A \subset \bar{Q}$ kümesini oluşturabilmiştir. Ayrıca, bu kümeyi tanımlamasının ardından, elemanlarını doğal sayılara aşağıdaki gibi eşleyerek A kümesinin sayılabilir sonsuz bir küme olduğu sonucuna ulaşabilmiştir.



Bu noktada D'nin denklik kavramını, A kümesinin sayılabilir olduğunu göstermek amacıyla kullandığı (B-) ve böylece teoremin sayılamaz kümeler için de doğruluğunu anlayabileceği bir örneği oluşturabildiği sonucuna ulaşılabilir. A~ ℕ ilişkisini oluşturmasının hemen ardından önünde bulunan kâğıda (*kendinden emin bir ifade ile*) aşağıdaki sonucu yazmıştır.



D'nin bu örneği biçimlendirme sürecinde zihnindeki yapılar arasından sayılabilir küme, sayılamaz küme, denklik gibi kavramları seçtiği ve bunlar arasında bağlantılar kurduğu söylenebilir. Tüm bu ilişkiler ispat imajının mantıksal bağlar içerme karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Bu durum, aynı

zamanda imajın dinamik bir şekilde gelişme gösterdiğinin de bir göstergesi olarak da değerlendirilebilir. Çünkü başlangıçta okuduğu teoremi anlamakta dahi güçlük çeken D, gerçekleştirdiği düşünme süreci sayesinde teoremin sayılabilir ve sayılamaz kümeler açısından doğru olduğunu görebileceği farklı örnekler oluşturabilmiştir.

Diğer yandan bu noktada D'nin tavırlarında kendinden emin bir duruş sergilediği gözlenmiştir. Çünkü o, bu yaklaşım ile bir önceki adımda ortaya koyduğu öngörüsünü doğrulayabilmiş ve sayılamaz kümeye ait sayılabilir sonsuz bir alt küme tanımlayabilmiştir. Dolayısı ile mevcut anda bir *haklılık hissine* sahip olduğu söylenebilir.

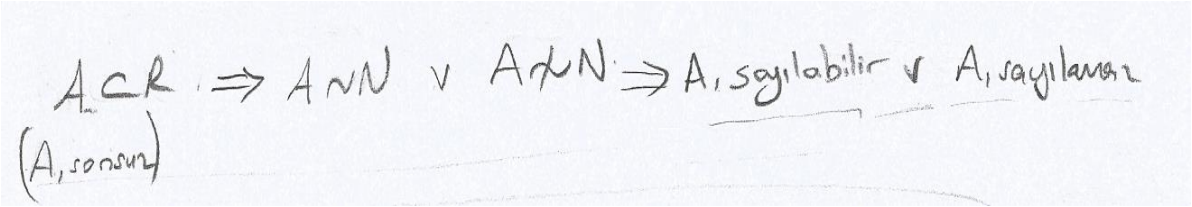
Bu noktada aşağıdaki açıklamaları yaparak devam etmiştir.

Böylece, irrasyonel sayılar kümesinin de A kümesi gibi sayılabilir sonsuz bir alt kümeye sahip olduğunu buldum. (Bir an için duraksar ve oluşturduğu ilk örneği işaret ederek açıklamalarına devam eder.) *Ancak bu da bir örnek ve hala daha ispat değil. Çünkü teoremde her sonsuz küme için denmiş.*

Sunulan bu açıklamadan görüldüğü gibi D (*bir önceki adımda olduğu gibi*) spesifik kümeleri kullanarak oluşturduğu özel durumun, teoremin doğruluğunu kanıtlamak için yeterli olmadığının farkındadır. O, mevcut ana kadar yaptığı işlemler ile teoremin neden doğru olduğunu anlayabileceği örnek durumlar oluşturabilmeyi başarmıştır. Başka bir ifade ile kendisine sunulan teoremi doğrulayabilmiştir. Böylece, teoremin içerdiği soyut ilişkileri kendisi için daha anlamlı hale getirdiği söylenebilir. Diğer yandan bu noktaya kadar genel bir yaklaşım sergilediği ve teoremi ispatlamaya çalıştığı söylenemez. Çünkü $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin tüm alt kümelerini göz önünde bulundurabileceği genel bir yaklaşım sergilememiştir. Ancak, bu noktadan itibaren daha genel bir yaklaşım benimsemiş ve teoremi kanıtlama çabasına girişmiştir. Bu doğrultuda yaptığı ilk açıklama aşağıda sunulmuştur.

Gerçel sayılar kümesinin alt kümeleri ya sayılabilirdir, ya da sayılamazdır. Yani iki durum var. Ben, ikisi için de birer örnek verdim. Ama ispat için daha genel

konuşmak gerekiyor. Diyelim ki gerçel sayılar kümesinin, A gibi sonsuz bir alt kümesi olsun. Bu durumda… (Bir süre bekler.) *Mesela, şöyle yazabilirim.*



Bu yaklaşım ile D, herhangi bir A⊂ ℝ sonsuz kümesinin sayılabilirlik/sayılamazlık durumunu matematiksel bir çerçevede ifade edebilmiştir. Ardından bu küme belirlediği için olası durumları incelemeye başlamıştır. Bu noktada aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

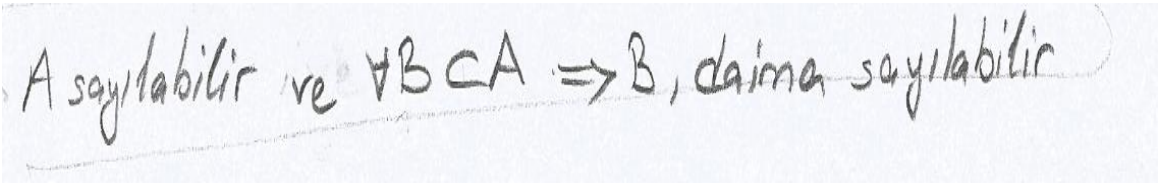
Şimdi ben, teoremi bu ayrıma göre ispatlamaya çalışırsam doğru bir sonuca ulaşabileceğimi düşünüyorum.

D'nin bu noktadaki açıklaması da hislerden *doğru iz üstünde olma hissi* bağlamında değerlendirilebilir. Çünkü o, bu yaklaşım ile ispatını şekillendirebileceği uygun bir yolu seçtiğini düşünmektedir. Bu noktada teoremi iki başlık altında incelemeye karar vermiştir. Bu başlıklar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

- A⊂R, sayılabilir sonsuz bir küme olabilir.
- A⊂R, sayılamaz sonsuz bir küme olabilir.

D, sunulan açıklamanın ardından kısa bir süre daha düşünmüş ve bu noktada aşağıdaki açıklamaları yaparak düşüncelerini ifade etmeye devam etmiştir.

Mesela önce A'nın sayılabilir sonsuz olduğunu düşünsem. Bunun alt kümelerini düşündüğümde… (Duraksar.) *O zaman bunların hepsinin sayılabilir olduğunu söyleyebilirim. Çünkü sayılabilir bir kümenin her alt kümesinin de sayılabilir olduğunu biliyorum. Dolayısı ile A sayılabilir bir küme ve B bunun bir alt kümesi ise şöyle yazabilirim.*



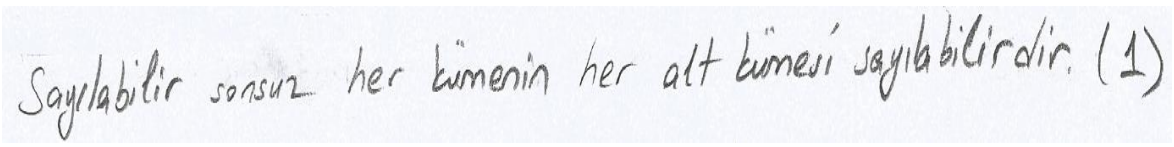
Bu noktada D'nin teoremde sunulan ilişkileri $A \subset \mathbb{R}$ sayılabilir kümesi için incelediği ve tüm $B \subset A$ alt kümeleri için geçerli olabilecek genel bir sonuca ulaşabildiği söylenebilir. Bu sonuç tüm sayılabilir alt kümeler açısından her zaman geçerli olan bir yargıyı içerisinde barındırmaktadır. Dolayısı ile için ispat süreci açısından formal bir delil niteliği taşıdığı söylenebilir.

Diğer yandan, D'nin bu yargıya ulaşma sürecinde, aşağıdaki teoremi ön bilgileri arasından seçtiği (R-) ve bunu kullandığı (B-) söylenebilir.

'' *Sayılabilir bir kümenin her alt kümesi de sayılabilirdir.*''

D'nin yaklaşımı incelendiğinde, seçtiği yapılar arasında mantıksal bağlar kurduğu ve böylece sayılabilir kümeler için teoremin doğruluğunu kanıtlayabildiği söylenebilir. Bu anda oluşturulan ilişki ağı, imajın mantıksal bağlar içerdiğinin bir göstergesi olarak yorumlanabilir. Diğer yandan bu noktada seçilen yapılar ve bunlar arasında kurulan ilişkiler sürecin önceki adımlarda gerçekleştirilen akıl yürütme süreçlerine paraleldir. Bu durum da imajın dinamik olma karakteristiği bağlamında ele alınabilir. Çünkü D'nin bu noktadaki imajı, önceki aşamalardan bağımsız değildir. Aksine, imaj önceki aşamaların ürünlerini içerecek şekilde genişlemeye ve gelişmeye devam etmiştir. Dolayısı ile imajın, bir süreci içerdiği ve bu nedenle dinamik olduğu sonucuna ulaşılabilir.

D, yukarıda sunulan düşünme sürecini tamamlamasının ardından önünde bulunan kâğıda aşağıdaki sonucu yazmış ve bu sonucu (1) olarak numaralandırmıştır.



Bu noktada araştırmacı ile arasında aşağıdaki diyalog gerçeklemiştir.

Tablo 29

Araştırmacı ve D arasında gerçekleşen diyalog (2)

Araştırmacı	Böylece ispat tamamlandı mı?
D	*(Kendinden emin bir şekilde.)* Hayır, bu belirlediğim yöntemin sadece bir bölümüydü. Ben şu anda sadece sayılabilir olanlar için teoremi ispatladım.
Araştırmacı	Peki, şimdi nasıl devam etmeyi planlıyorsun?
D	En başta kümeleri sayılabilir ve sayılamaz olarak gruplamıştım. Sayılabilir kümeler için bir sonuca ulaştım. Ama sayılamaz kümeler için de göstermem gerek.

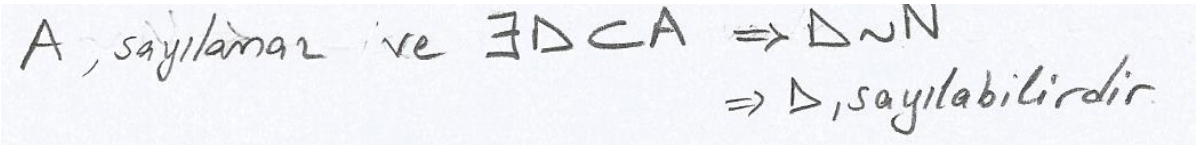
Diyalog incelendiğinde D'nin, sayılabilir kümeleri göz önüne alarak tamamladığı bu sürecin doğruluğundan emin olduğu sonucuna ulaşılabilir. Dolayısı ile bu noktada bir *bilme hissine* sahip olduğu söylenebilir. Diğer yandan o, bu yaklaşımı çerçevesinde sadece sayılabilir kümeleri göz önüne aldığını belirterek ispatı henüz tamamlamadığını açıkça ifade etmiştir. Bu durum ispat imajının varlık karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Bu karakteristik sayesinde D'nin mevcut ana kadar biçimlendirdiği ispat sürecini bir bütün olarak ele alabildiği söylenebilir. Bu bütünlük sayesinde önceki aşamalarda belirlediği sınıflamayı (*sayılabilirlik-sayılamazlık*) göz önüne alabilmiş ve bu sayede ispatın eksik yönlerini görerek henüz tamamlanmadığını açıkça ifade etmiştir.

D, sunulan açıklamaların ardından sayılamaz kümeler için de doğru olduğunu kanıtlamak amacı ile ikinci aşamaya geçiş yapmıştır. Bu doğrultuda yaptığı ilk açıklama aşağıda sunulmuştur.

Bu sefer de A'yı sayılamaz sonsuz bir küme olarak kabul edelim. Teoremde gerçel sayıların her alt kümesinin sayılabilir sonsuz bir alt kümesinin olduğu söyleniyor. Buna göre düşündüğümde… (Duraksar.) *O zaman bu A kümesinin de en az bir tane bile olsa sayılabilir sonsuz bir alt kümesi olmalı.*

(Bir süre düşünür ve açıklama yapmaz.) *Mesela bu sefer alt kümeyi önceki ile karışmaması için D olarak isimlendireyim. O zaman şöyle yazabilirim.*

(Aşağıdaki ifadeleri kâğıda yazar.)



Şimdi bunun doğruluğunu ispatlamam gerek…

Sunulan açıklamalar incelendiğinde, D'nin kendisine sunulan teoremi sayılamaz kümeler bağlamında tekrar yorumladığı söylenebilir. O, bu yorumlardan hareketle her sayılamaz küme için geçerli olabilecek (*yukarıdaki*) matematiksel ifadeyi oluşturabilmiştir. Bu sayede, ispatın ikinci aşamasında uygulayabileceği yaklaşıma ilişkin genel bir çerçeve ortaya koyduğu söylenebilir. Diğer yandan bu açıklama ile D'nin, doğru *iz üstünde olma hissine* sahip olduğu söylenebilir. Çünkü o, sergilediği bu yaklaşım ile istediği sonuca ulaşabileceğini ve böylece ispatı tamamlayabileceğini düşünmektedir.

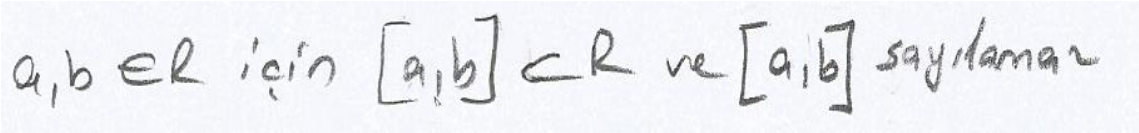
Bu noktada araştırmacı D'nin düşünme biçimini daha iyi anlayabilmek için ona birkaç soru yöneltmeye karar vermiştir. Bu noktada İkili arasında gerçekleşen diyalog aşağıda sunulmuştur.

Tablo 30

Araştırmacı ve D arasında gerçekleşen diyalog (3)

Araştırmacı	Bu ispata nasıl ulaşabilirsin?
D	Az önce sayılamaz kümeler üzerinde düşünmüştüm ve irrasyonel sayılar kümesini kullanarak örnek vermiştim.
Araştırmacı	Peki, şimdi nasıl devam etmeyi planlıyorsun?
D	(*Uzun bir süre düşünür.*) Bu biraz zor bir şey… Rasyonel sayılar, tam sayılar ve doğal sayılar sayılabilir kümeler... İrrasyonel sayılar ise sayılamaz. (*Bir süre daha düşünür.*) Aslında, açık ve kapalı aralıklar da sayılamaz kümeler. Mesela bir kapalı aralık üzerinde düşünebilirim.

Bu diyaloğun ardından D, önünde bulunan kâğıda aşağıdaki ifadeleri yazmıştır. Böylece seçtiği [a,b]⊂R kapalı aralığı üzerinde düşünmeye başlamıştır.

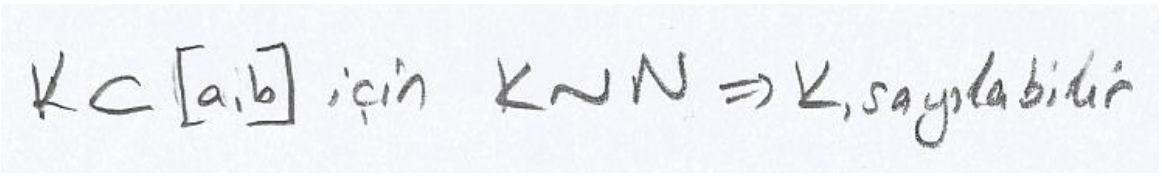


Sunulan diyalog incelendiğinde D'nin sayılabilir ve sayılamaz küme kavramlarına ilişkin ön bilgilerini gözden geçirdiği ve açık/kapalı aralıkları birer sayılamaz küme olarak tanıdığı (R-) sonucuna ulaşılabilir. Başka bir ifade ile o, sayılamaz kümelere ilişkin ön bilgilerini gözden geçirmiş ve bunlar arasından açık/kapalı aralıkları mevcut durum ile ilişkilendirerek seçmiştir. Dolayısı ile bu eylem, imajın mantıksal bağlar içeme karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Diğer yandan D, mevcut ana kadar sayılamaz kümelere ilişkin yaklaşımını irrasyonel sayılar kümesi ($\bar{Q}$) ile sınırlı tutmuştur. Ancak bu aşamada onun, daha genel bir çerçeveye ulaşabilmek için yaklaşımını genişletmeye çalıştığı ve bu nedenle seçtiği aralıklar üzerinde düşünmeye başladığı söylenebilir.

Bu noktada aşağıdaki açıklamayı yaparak devam etmiştir.

Şimdi bunun üzerinde düşüneceğim. Bu aralığın da teoreme göre sayılabilir sonsuz bir alt kümesi olmalı. Mesela bu kümeye K kümesi dersem şunu yazabilirim.

(Aşağıdaki ifadeleri yazar.)



Şimdi bu aralığın elemanlarını düşünerek doğal sayılara denk bir küme oluşturmaya çalışacağım. Ama sadece a ve b'nin bu aralıkta oluğunu biliyorum.

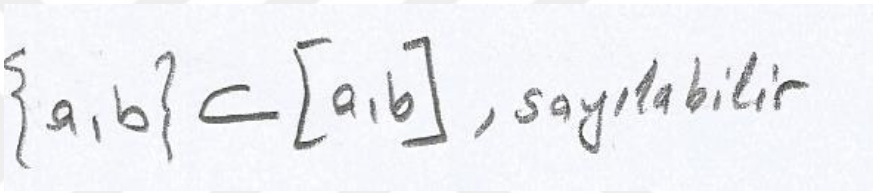
Sunulan açıklama incelendiğinde D'nin, [a,b] sayılamaz kümesinden hareketle K sayılabilir sonsuz kümesini oluşturmaya karar verdiği söylenebilir. Bu amaçla [a,b] aralığında yer alan elemanlar üzerinde düşünmesi gerektiğini

belirtmiştir. Diğer yandan bu noktada $a \in \mathbb{R}$ ve $b \in \mathbb{R}$ hariç [a,b] aralığında yer alan diğer elemanları belirleyemediğini açıkça ifade etmiştir. Dolayısı ile bu noktada D'nin, K sayılabilir sonsuz kümesini oluşturmaya yönelik bir güçlük yaşadığı sonucuna ulaşılabilir.

Mevcut noktada bir süre duraksadıktan sonra açıklamalarına aşağıdaki gibi devam etmiştir.

Bu aralıkta sonsuz sayıda eleman var. Ancak ben bunlardan en kolay a ve b elemanlarını seçebilirim. (Aşağıdaki ifadeyi yazar.) *Böylece sayılabilir ama sonlu bir küme oluşturdum. Ancak benim sonsuz bir kümeye ihtiyacım var…*

(Aşağıdaki ifadeleri kâğıda yazar.)



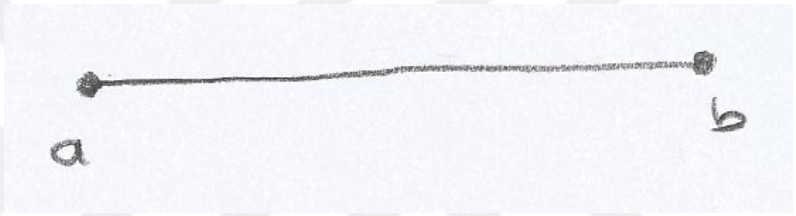
Bu noktada D'nin, $a \in \mathbb{R}$ ve $b \in \mathbb{R}$ elemanlarını seçerek [a,b] aralığının iki elemanlı bir alt kümesini oluşturduğu görülebilir. Ancak o, teoremde sunulan ilişkileri göz önünde bulundurarak bu kümenin ispat açısından yeterli olmadığını açıkça ifade etmiştir. Bu yetersizliğin sebebini oluşturduğu kümenin sayılabilir sonlu olması ile açıklamıştır. Dolayısı ile sayılabilir sonsuz bir küme oluşturması gerektiğini belirterek düşünme sürecine aşağıdaki gibi devam etmiştir.

Bu aralıktaki tam sayıları seçmeye çalışsam… (Bazı işlemler yapar.) *Ama burada tam sayı olup olmadığını bile bilmiyorum.* (Bir süre düşünür.) *Dışarıdan eleman da ekleyemem… Bu aralıktaki elemanlardan seçmeliyim.*

Bu noktada, D'nin [a,b] aralığındaki bazı elemanları seçmeye çalıştığı ancak bunun için uygun bir yöntemi belirleyemediği sonucuna ulaşılabilir. Bu noktada o, [a,b] aralığından bazı tam sayıları seçmeyi önermiş ancak incelediği birkaç örneğin sonunda bu yaklaşımdan da vazgeçmiştir. Bu aşamada, bir düşünme sürecine girdiği ve önünde bulunan kâğıtta yer alan işlemleri incelediği gözlenmiştir. Bu noktada aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

Bu aralıktan bazı elemanları seçmem gerektiğini biliyorum. Daha sonra bunları doğal sayılara eşleyeceğim. Ama aralıkta yer alan elemanları belirleyemediğim için seçemiyorum.

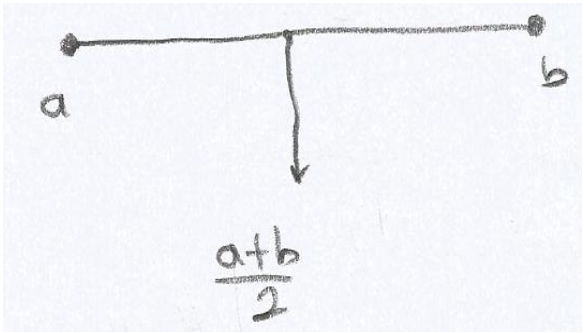
Sunulan açıklamadan görüldüğü gibi D, bu aralıktaki elemanların bir kısmını kullanarak sayılabilir sonsuz küme oluşturmayı amaçlamaktadır. Ancak sunulan aralıktaki elemanları seçemediği için bir güçlük yaşamaktadır. Bu açıklamanın ardından kısa bir süre sessiz kalmış ve bu süreçte bazı işlemler gerçekleştirdiği gözlenmiştir. Bunun devamında önünde bulunan kâğıda bir doğru parçası çizerek uç noktalarını aşağıdaki gibi isimlendirmiştir.



Sunulan çizimi oluşturmasının ardından aşağıdaki açıklamaları yaparak görüşlerini açıklamaya devam etmiştir.

Şimdi farklı bir şey düşündüm. Mesela [a,b] aralığı dediğimizde… Aslında bunu sayı doğrusunda bir parça gibi düşünebiliriz. Ben bu şekli çizdim ve uçlarını da isimlendirdim. (Bir an duraksar.) *Şimdi uç noktalara baktığımda, bunlardan hareketle orta noktayı belirleyebilirim.*

(Orta noktayı doğru parçası üzerinde işaretler.)



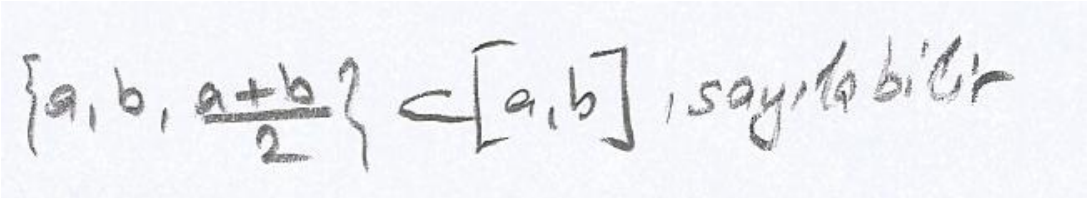
Bu noktada D'nin, [a,b] aralığına ilişkin durumu anlamlandırabilmek amacıyla farklı temsiller arasında ilişki kuruduğu söylenebilir. Bunlar temsiller aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

- [a,b] aralığını cebirsel olarak anlamlandırmayı sağlayan sembolik (statik) temsil
- [a,b] aralığını geometrik olarak anlamlandırmayı sağlayan geometrik (dinamik) temsil

Bu ilişkilendirme sürecinde D, ilk olarak kapalı aralık kavramına ilişkin bilgilerini gözden geçirmiş ve ardından seçtiği [a,b] aralığının sayı doğrusu üzerinde (*kesiksiz olarak*) gösterilebileceğini ifade etmiştir. Böylece [a,b] cebirsel temsilinden hareketle bir doğru parçası modeli (*görsel temsil*) oluşturmuştur. Daha sonra, gözlerini bu görsel temsil üzerinde gezdirerek teoremde sunulan ilişkileri [yorumlamaya çalışmıştır. Bu noktada $a \in \mathbb{R}$ ve $b \in \mathbb{R}$ uç noktalarına odaklandığında, görsel modelin orta noktasını belirleyebileceğini fark etmiştir. Ardından doğru parçasının orta noktasını (*yaklaşık olarak*) işaretleyerek bunu $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{R}$ olarak ifade edebilmiştir. Böylece görsel temsilden hareketle sembolik temsile geçiş yapabildiği söylenebilir.

Temsiller arasında mevcut anda kurulan bu ilişki, imajın mantıksal bağlar içerme karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Çünkü D, mevcut düşünme süreci ile temsilleri birbirinden yalıtılmış (ayrık) bir çerçevede ele almamaktadır. Aksine o, bu temsiller arasında ilişki kurarak bunlar arasında geçiş yapabilmiştir. Dolayısı ile D'nin, görsel ve sembolik temsilleri ortak bir amaç için kullandığı söylenebilir. Bu sayede [a,b] aralığından eleman seçme sürecinde yaşadığı güçlüğü aşabileceği bir yaklaşım ortaya koyabilmiştir.

Bu yaklaşım sayesinde [a,b] aralığının alt kümesi olan üç elemanlı sayılabilir bir kümeyi aşağıdaki gibi oluşturabilmiştir.



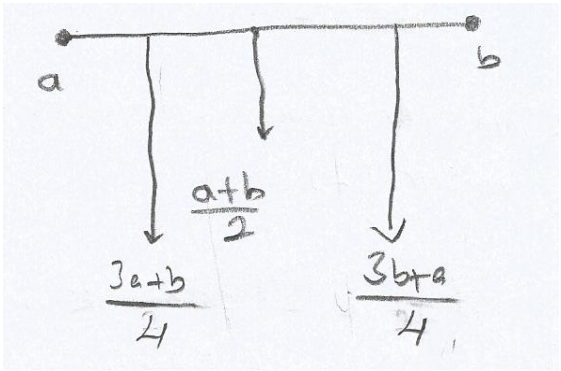
Bu kümeyi oluşturduktan sonra bir önceki adımda oluşturduğu iki elemanlı kümeyi işaret etmiş ve ardından aşağıdaki açıklamaları gerçekleştirmiştir.

Ben şu anda a ve b elemanlarını kullanarak bunların orta noktasını buldum. Böylece üç elemanlı yeni bir küme oluşturdum. Ama bu da bir öncekine benziyor. Çünkü sonlu bir küme oldu.

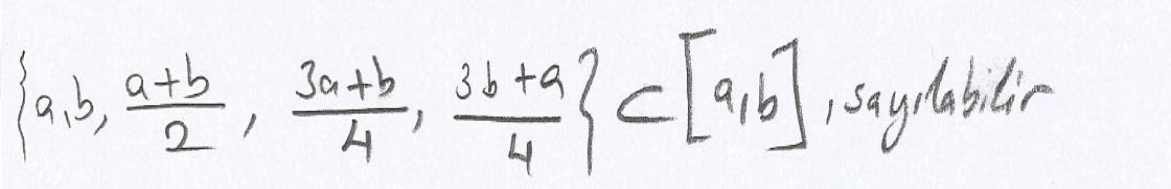
Görüldüğü gibi D, teoremde sunulan ilişkileri göz önünde bulundurarak bu yeni kümenin de ispat açısından yeterli olmadığını açıkça ifade etmiştir. Diğer yandan bu noktada oluşturduğu model üzerinde düşünürken (*bir şey fark ederek*) aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

Şimdi bu şey… Az önce ben, a ve b elemanlarını kullanarak bunların orta noktasını buldum. (Duraksar ve doğru parçasına bakar*.) Bir daha orta nokta bulsam…* (a ve $\frac{a+b}{2}$ elemanlarının orta noktasını gösterir.) *Buradan bir eleman daha oluşturabilirim.*

(Şekil üzerine yeni noktaları ekler.)



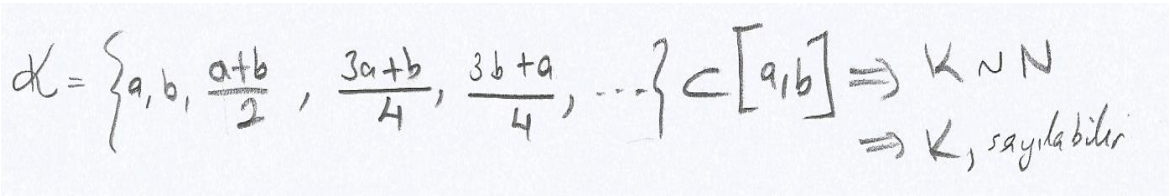
Yukarıda sunulan düşünme süreci incelendiğinde D'nin, görsel temsilden hareketle bir önceki aşamaya benzer bir düşünme süreci yürüttüğü görülebilir. Bu sayede [a,b] aralığından yeni elemanlar seçebileceğini fark etmiştir. Bu noktada onun, bir önceki adım ile bağlantı kurduğu sonucuna ulaşılabilir. Diğer yandan D'nin, temsiller arasında kurduğu bu ilişkiler sayesinde içerisinde bulunduğu durumun özünde yatan ilişkilere dönük bir iç görü sağlayabildiği söylenebilir. Bu sayede [a,b] aralığında yer alan elemanlardan bazılarını (*yukarıdaki gibi*) belirleyebilmiştir. Bu elemanları model üzerinde işaretledikten sonra aşağıda sunulan beş elemanlı sayılabilir kümeyi oluşturmuştur.



D, bu kümeyi oluşturduktan sonra kısa bir süre duraksamış ve ardından doğru parçası modelini işaret ederek (*kendisinden emin bir şekilde*) aşağıdaki açıklamaları yapmıştır.

Aslında [a,b] aralığındaki elemanlar, çizdiğim bu sayı doğrusu boyunca dizilmiş haldeler. Ben başlangıçta a ve b elemanları hariç aralıktaki diğer elemanları belirlemekte güçlük çekiyordum. Ama sonradan sürekli orta noktaları belirlemeye çalışarak sonsuz tane eleman elde edebileceğimi fark ettim. Orta noktaları yazarak oluşturduğum bu küme (K kümesi) *sayılabilir ve sonsuz bir küme olur.*

(Bu noktada önünde bulunan kâğıda aşağıdaki ifadeleri yazar.)



D, bu açıklaması ile yeni orta noktalar bulmaya devam ederek oluşturacağı K kümesinin sonsuz elemanlı ve sayılabilir bir alt küme olacağını belirtmiştir. Böylece [a,b] aralığının sayılabilir sonsuz bir alt kümesini tanımlayabilmiştir. Bu

noktada D'nin iki farklı kullanma (B-) eylemi gerçekleştirdiği söylenebilir. Bu eylemler ve sonuçları aşağıda ifade edilmiştir:

- [a,b] aralığının sonsuz bir küme olmasına ilişkin bilgisini kullanarak (B-) orta nokta bulma işleminin asla bitmeyeceği sonucuna ulaşmıştır. Bu sayede K kümesinin sonsuz bir küme olduğu sonucuna ulaşabilmiştir.
- (*Açıkça bir eşleme yapmasa da*) K, kümesinin sayılabilir olduğunu ifade etmek için denklik kavramını kullanmıştır (B-).

D'nin bu andaki düşünme süreci incelendiğinde, ispat imajının dinamik olduğuna ilişkin bir yorum yapılabilir. Çünkü bu süreçte o, [a,b] aralığının orta noktasını belirlemek için kullandığı yaklaşımı genelleştirebilmiştir. Başka bir ifade ile [a,b] aralığından seçtiği alt aralıkların orta noktalarını belirleyebileceğini ifade etmiş ve bu sayede sayılabilir sonsuz K kümesini tanımlayabilmiştir. Dolayısı ile bu noktada sunulan yaklaşımın, önceki düşünme aktivitelerinin sonuçlarını da içerecek şekilde biçimlendiği söylenebilir. Bu durum, D'nin ispata yönelik imajının bir süreci içerdiğinin göstergesi olarak değerlendirilebilir. Sonuç olarak (*daha önce belirtildiği gibi*) imajın dinamik olduğu yorumu yapılabilir.

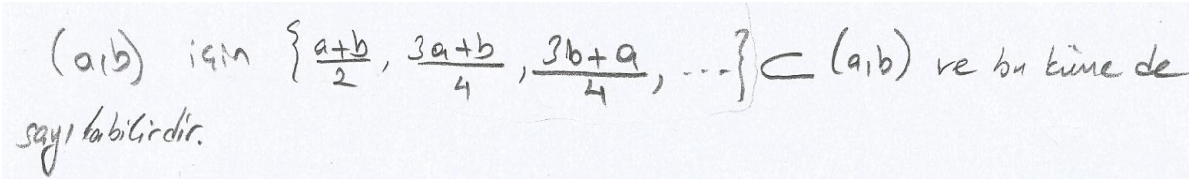
Diğer yandan D'nin, K kümesini tanımlamasının ardından duraksadığı ve (*mevcut ana kadar*) yaptığı işlemleri (*geriye doğru*) gözden geçirmeye başladığı gözlenmiştir. Böylece parçalar halinde oluşturduğu bu süreci bir bütün olarak inceleme fırsatı bulduğu söylenebilir. Bu noktada kalem ile bazı noktaları işaret ettiği gözlemlenmiştir. Düşünme sürecine bir süre devam ettikten sonra araştırmacıya dönerek aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

*Şu anda bir şeyi fark ettim. Eğer ben… (*Duraksar.*) Kapalı aralık yerine (a,b) açık aralığını seçmiş olsaydım… Sadece a ve b elemanlarını alamazdım. Yine sayılabilir bir alt küme oluştururdum.*

D tarafından sunulan bu açıklama, ispat imajının varlık karakteristiğinin bir göstergesi olarak değerlendirilebilir. Çünkü D, (*sunulan açıklamadan da anlaşılabileceği gibi*) ispat yaklaşımını zihninde bir bütün olarak ele alabilmektedir. Bu sayede, sürecin önceki adımlara dönerek yaklaşımını gözden geçirebilmiştir. Sonuç olarak, (a,b) açık aralığı ile aynı sürece başlamış olması durumunda K-

{a,b}⊂ (a,b) sayılabilir kümesini elde edebileceğini belirtmiştir. Bu açıklamalar dikkate alındığında D'nin ispata ilişkin tek ve bütün bir imaja sahip olduğu söylenebilir. Bu durum da (*daha önce belirtildiği gibi*) varlık karakteristiğinin bir göstergesi olarak yorumlanabilir.

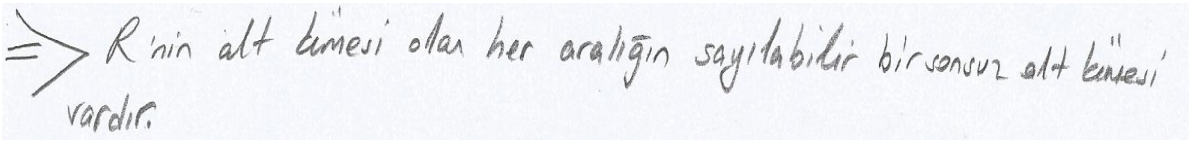
Diğer yandan D, sunulan bu açıklamaların sonunda önünde bulunan kâğıda aşağıdaki ifadeleri yazmıştır.



D, yukarıda sunulan açıklamadan kısa bir süre sonra [a,b] ve (a,b) kümeleri için ulaştığı sonuçlar arasında ilişki kurarak aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

*(*Emin bir şekilde*) O zaman fark etmiyor. İster açık aralık olsun ya da fark etmez kapalı aralık olsun. Her iki durumda da sayılabilir bir alt kümesini bulabiliyoruz.*

(Bu noktada önünde bulunan kâğıda aşağıdaki ifadeleri yazar.)



D'nin mevcut anda yaptığı işlemlerin sonuçlarını bir araya getirerek genel bir sonuca ulaşması imajın mantıksal bağlar içerme karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Çünkü mevcut anda o, iki durum için belirttiği ayrı sonuçları birleştirerek tüm aralıklar için genel bir sonuç haline getirebilmiştir. Bu noktada ulaşılan sonuç bir oluşturma (C-) eylemi olarak değerlendirilebilir. Çünkü D, mevcut işlemlerin ardından ulaştığı sonuçları bir araya getirerek daha önce sahip olmadığı yeni bir bilgiye ulaşabilmiştir. Bu bilgi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

'' ***Gerçel sayıların alt kümesi olan her aralığın sayılabilir sonsuz bir alt kümesi vardır.*** ''

Bu anda gerçekleşen bir araya gelme eylemi ile D'nin Rota 'daki anlamlı ile bir aydınlanma (*Enlightenment*) yaşadığı söylenebilir. Bu noktada D'nin, içerisinde bulunduğu durumun içerdiği ilişkilere yönelik bir kavrayış sağlayabildiği yorumu yapılabilir. Bu sayede o, (*aralıklara ilişkin*) yaşadığı belirsizliği ortadan kaldırabilmiştir. Böylece, açık/kapalı aralıkları göz önünde bulundurarak teoremdeki ilişkilere yönelik bir genel bir çıkarıma ulaşabilmiştir.

Diğer yandan onun, bu noktada ulaştığı sonucu kendisinden emin bir ifade ile sunması imajın duyuşsal bileşeni bağlamında değerlendirilebilir. Başka bir ifade ile bu noktada D'nin bir *bilme hissine* sahip olduğu sonucuna ulaşılabilir.

Yukarıda sunulan açıklamaların tamamlanmasının ardından araştırmacı D'ye, ispatın tamamlanıp tamamlanmadığını sormuştur. O, bu noktada kısa bir süre için düşünmüş ve yaptığı işlemleri incelemiştir. Ardından bu soruya aşağıdaki açıklamaları yaparak cevap vermiştir.

Teoremde gerçel sayılar kümesinin sonsuz alt kümesi denmiş. Burada pek çok durum var… Ben birkaç tanesini inceledim. Ama… (Duraksar.) *Her sonsuz küme için bir şey henüz söylemedim.* (Burada **(1)** sonucunu işaret ederek) *Az önce sayılabilir kümeler için genel bir sonuca ulaşmıştım. Bu çalışmaya da sayılamaz kümeleri anlayabilmek için başlamıştım. Açıkçası anladım da… Ama bu da özel bir şey.*

Sunulan açıklamalar incelendiğinde D'nin, açık/kapalı kümeler bağlamında oluşturduğu yaklaşımı da özel bir durum olarak nitelediği ve genel bir sonuca ulaşmak için yeterli kabul etmediği sonucuna ulaşılabilir. Bu durumun nedeni D'nin sayılamaz kümelere ilişkin anlayışı olabilir. Bu noktada D'nin sayılamaz kümeleri açık/kapalı aralıkları da içeren daha geniş bir küme olarak tanıdığı (R-) yorumu yapılabilir. Dolayısı ile açık/kapalı aralıklar ile oluşturduğu bu yaklaşımın tüm sayılamaz kümeler için genellenemeyeceğini düşündüğü söylenebilir.

D, sunulan açıklamanın devamında tüm sayılamaz alt kümeleri temsil edebilecek daha genel bir yaklaşım oluşturma çabasına girişmiştir. Bu noktada aşağıdaki açıklama ile görüşlerini ifade etmeye devam etmiştir.

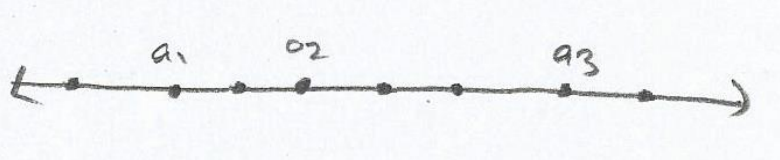
Her sayılamaz küme için… (Bu noktada verdiği örnekler üzerinde düşünmeye başlar.) *İrrasyonel olanları düşündüğümde… Bunun içerisinden bazı elemanları seçerek sayılabilir olduğunu gösterdim. (*Doğru parçası modelini işaret ederek*) Hatta herhangi aralıktan belirlediğim bir kurala göre elemanları seçtim. Bunların da doğal sayılara denk olabileceğini gösterdim.* (Bir süre daha düşünmeye devam eder.) *Yaptığım tüm işlemlerin ortak noktası bu… Yani ben gerçel sayılar kümesinden hangi (*sonsuz*) alt kümeyi seçersem seçeyim bunun bazı elemanlarını seçerek doğal sayılara denkleştirebilirim.*

Sunulan açıklama incelendiğinde D'nin, varlık karakteristiği sayesinde mevcut ana kadar oluşturduğu farklı yaklaşımları gözden geçirdiği söylenebilir. O, bu anda zihninde yer alan durumları araya getirebilmiş ve bunlar arasında bağlar kurabilmiştir. Bu sayede gerçekleştirdiği süreçlerin tümü için geçerli olabilecek genel bir sonuca ortaya koyabilmiştir. Bu sonuca göre $D \subset \mathbb{R}$ sayılamaz kümesinin, sayılabilir bir alt kümesini belirleyebilmek için bu kümeden bazı elemanları seçmesi gerekmektedir. Ayrıca, D'nin önceki düşünme süreçleri arasında bağlantılar kurarak bir sonuca ulaşması, imajın hem dinamik olma hem de mantıksal bağlar içerme karakteristikleri bağlamında değerlendirilebilir. Örnekler arasındaki ortak noktaların belirlenmesi mantıksal bağların bir göstergesi olarak yorumlanabilir. Bu noktada, incelenen örneklerden hareketle genel bir sonuca ulaşılması da dinamik olma karakteristiğinin bir göstergesi olarak yorumlanabilir.

Diğer yandan D, mevcut anda tüm sayılamaz kümelerden eleman seçmesini sağlayabilecek genel bir kural belirleyememiştir. Dolayısı ile bu aşamada bir sonuca ulaştığı ancak bu sonucu işlevsel hale getirebilecek bir yöntemi belirleyemediği yorumu yapılabilir.

Bu anda (*özellikle aralıklara ilişkin*) yaptığı işlemler üzerinde düşünmeye devam etmiştir. Araştırmacı tarafından müdahale olmaksızın düşünme sürecine devam etmiştir. Özellikle [a,b] kapalı aralığı için oluşturduğu görsel model üzerinde yoğunlaştığı bir noktada bir an için duraksamış ve ardından aşağıdaki açıklamaları yaparak düşüncelerini ifade etmiştir.

Şu an bir şey düşündüm. Mesela herhangi bir D sayılamaz kümesi olsun. Bir aralık olmak zorunda değil, sadece sayılamaz bir küme. (Kendisinden emin bir şekilde) *Az önce aralık için uyguladığım yaklaşımı burada da kullanabilirim. Sonuçta amacım bu kümeden bazı elemanları seçmek. D kümesinin alt kümesinin elemanlarını da sayı doğrusunda sıralanmış olarak düşünebilirim.* (Aşağıdaki sayı doğrusunu çizer.) *Bu sayılamaz bir küme olduğu için sağda ve solda pek çok elemanı daha var. Ben birkaç tanesini işaretledim.*



Bu aşamada sunulan açıklamalar incelendiğinde, D'nin önceki adımda benimsediği yaklaşımı kullanarak tüm durumlar için geçerli, genel bir yöntemi biçimlendirmeye çalıştığı sonucuna ulaşılabilir. Bu genelleştirmeyi sağlamak için keyfi bir $D \subset \mathbb{R}$ sayılamaz kümesinin elemanlarının sayı doğrusu boyunca sıralanabileceği bilgisinden yararlanmıştır. Daha sonra oluşturduğu görsel temsil üzerinde bazı elemanları (*gelişigüzel*) seçerek işaretlemiştir.

Bu modeli oluşturmasının aşağıdaki açıklamaları yaparak devam etmiştir.

Şimdi ben bu kümeden eleman seçmek istiyorum. Bunun için ilk elemanı (a_1) *seçeyim. Artık, bu elemandan itibaren sürekli aynı yönde ilerleyerek istediğim elemanları seçebilirim. Mesela bunları* (a_2 ve a_3) *seçebilirim. Böylece yeni bir küme oluşturabilirim. D, kümesi sayılamaz olduğu için bu şekilde oluşturduğum K kümesi de sayılamaz bir kümenin alt kümesi olan sayılabilir bir küme olur.*

Bu açıklamalar ile D, her sayılamaz kümeden eleman seçebileceği genel bir yaklaşım oluşturabilmiştir. Bu yaklaşımın temelini gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı adi sıralama bağıntısı oluşturmaktadır. Dolayısı ile bu noktada ön bilgileri arasından sıralama kavramını seçtiği (R-) söylenebilir. Bu noktada D, gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $(\mathbb{R}, \leq)$ posetinden hareketle $D \subset \mathbb{R}$ kümesinin elemanlarının (*görsel temsil kullanarak*) küçükten büyüğe sıralanabileceğini ifade etmiştir. Ayrıca aynı bağıntının tam sıralama özelliği sayesinde bir elemandan başlayarak daha

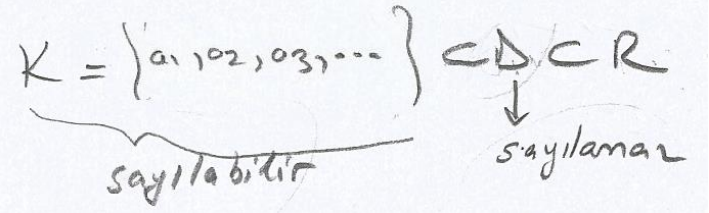
büyük (*veya daha küçük*) elemanlar seçebileceği sonucuna ulaşmıştır. Dolayısı ile mevcut anda sıralama kavramını kullanarak (B-) genel bir yaklaşıma ulaşabildiği söylenebilir. Diğer yandan D, bu yöntemi kullanarak oluşturacağı $K=\{a_i \mid i \in N\} \subset D$ kümesinin sayılabilir sonsuz bir küme olduğunu açıkça belirtmiştir.

Bu aşamanın öncesine kadar gerçekleşen ispat süreci incelendiğinde D'nin tüm sayılamaz kümeler üzerinde düşünebileceği genel bir yaklaşım oluşturmakta güçlük çektiği gözlenmiştir. Dolayısı ile D, seçtiği özel kümeler için geçerli olabilecek özel yaklaşımlar belirlemeyi tercih etmiştir. Diğer yandan bu adımda gerçekleşen düşünme sürecinde (*görsel model üzerinde düşünürken*) gerçel sayılar üzerinde tanımlı sıralama kavramına ulaşabilmiştir. Böylece tüm kümelerin elemanlarının sayı doğrusu üzerinde ifade edilebileceğini fark etmiştir. Dolayısı ile sıralama kavramı, D'ye tüm kümeler üzerinde uygulayabileceği genel bir çerçeve sunmuştur. Başka bir ifade ile D, kümelerden eleman seçmek için sıralama (*küçük-büyük*) ilişkilerini kullanmaya karar vermiştir.

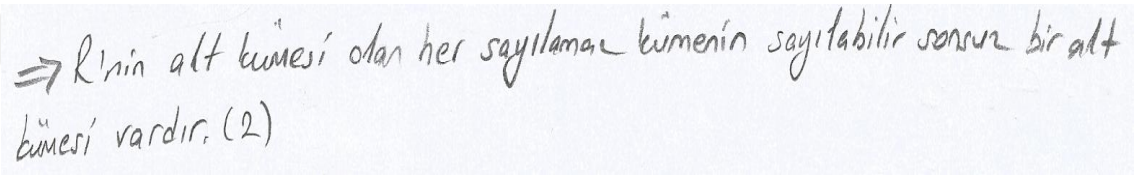
Onun ön bilgileri arasından sıralama kavramını seçerek tüm kümeler için genel bir kural ortaya koyması, Van der Waerden tarafından ifade edilen *ilham* (Einfall) ile açıklanabilir. Bu anda, D'nin zihninde halihazırda yer alan yapıların (*kavramlar-örnekler-modeller vb.*) uygun bir kombinasyon ile bir araya geldiği söylenebilir. Bu sayede D'nin, içerisinde bulunduğu duruma ilişkin bir kavrayışa ulaştığı yorumu yapılabilir. Bu kavrayışın özünü gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı adi sıralama kavramı oluşturmaktadır. Çünkü D, bu anda (*sıralama kavramını kullanarak*) tüm sayılamaz kümeleri göz önüne alabileceği genel bir yaklaşımın temelini atabilmiştir.

Bu noktada görsel temsil, sıralama kavramı ve sayılamaz kümeler arasında kurulan ilişkiler imajın mantıksal bağlar içerme karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Diğer yandan D'nin önceki adımda oluşturduğu görsel modeli göz önüne alarak genel bir yaklaşım oluşturmaya çalışması imajın varlık karakteristiği ve dinamik olma karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir.

D, sunulan açıklamaların devamında önünde bulunan kâğıda aşağıdaki ifadeleri yazmıştır.

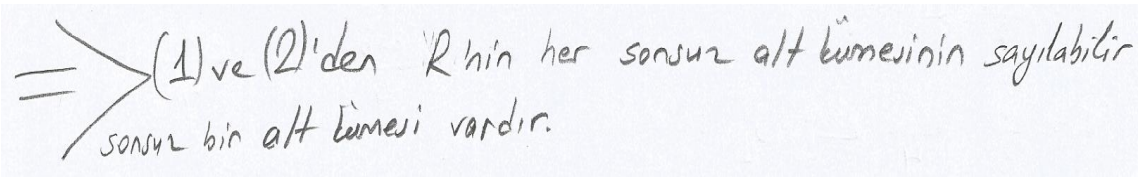


Bu noktada D'nin, tüm sayılamaz kümeler için geçerli olabilecek genel bir sonuca (*sıralama bağıntısı ile*) ulaştığı sonucuna varılabilir. Diğer yandan, yaptığı tüm bu işlemlerin ardından (*kendisinden emin bir şekilde*) önünde bulunan kâğıda tüm sayılamaz kümeler için geçerli olabilecek genel bir ifadeyi yazmış ve bunu (2) olarak numaralandırmıştır.



D'nin sıralama kavramından hareketle şekillendirdiği bu yöntem sayesinde (*sayılamaz kümeler açısından*) teoremin doğruluğunu açıklayabileceği formal bir yapı oluşturduğu söylenebilir. Bu yapı sayesinde sayılamaz kümeler için geçerli olabilecek genel bir sonuca ulaşabilmiştir. Bu sonuç, bir soyutlama olarak değerlendirilebilir. Çünkü D, bu süreçte seçtiği ve organize ettiği yapılardan hareketle önceden sahip olmadığı yeni bir bilgiye ulaşabilmiştir. Dolayısı ile bu noktada gerçekleşen soyutlama eylemi sayesinde D'nin sayılamaz kümelere ilişkin yeni bir yapı oluşturduğu (C-) söylenebilir. Bu bilgi, (2) olarak ifade edilmiştir.

D, yukarıda sunulan (2) sonucunu yazmasının hemen ardından (*duraksamadan*) daha önce ulaştığı (1) sonucu ile ilişki kurmuş ve ortak bir sonuca ulaşmıştır. Bu sonucu önünde bulunan kâğıda yazarak (*aşağıdaki gibi*) ifade etmiştir.



Böylece başlangıçta oluşturduğu sayılabilir ve sayılamaz küme ayrımı çerçevesinde teoreme ilişkin genel bir sonuca ulaşabildiği söylenebilir. Onun, ayrı iki sonuçtan hareketle ortak bir sonuca ulaşması imajın mantıksal bağlar içerme karakteristiği bağlamında değerlendirilebilir. Sürecin önceki aşamaları önceki aşamaları ile kurduğu bu bağlantı varlık karakteristiğinin bir göstergesi olarak yorumlanabilir.

Sürecin sonunda D, araştırmacıya dönerek aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

''*Keşke her ispatı böyle yapabilsem*.''

Bu açıklama, D'nin gerçekleştiği süreçten ve ulaştığı sonuçtan emin olduğunun bir göstergesi olarak yorumlanabilir. Başka bir ifade ile ispatın bilişsel boyutuna eşlik eden duyuşsal bileşenler sayesinde, D'nin sürece ilişkin bir tamamlanmışlık hissine ulaştığı söylenebilir. Bu his sayesinde ispatın sona erdiğini açık bir şekilde ifade etmiştir. Diğer yandan bu noktada onun bir haklılık hissine sahip olduğu da söylenebilir. Çünkü o, formal bir ispata ulaşarak sürece ilişkin düşüncelerini doğrulayabilmiştir.

V. BÖLÜM

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu kapsamında bir önceki bölümde sunulan bulgulara ilişkin tartışma ve sonuçlara yer verilecektir. Ulaşılan sonuçlar, ilgili alt problemler bağlamında sunulacaktır. Ayrıca bu sonuçlar, matematik eğitimi literatüründe yer alan diğer çalışmalar ile kıyaslanacak ve bu bağlamda tartışmalar gerçekleştirilecektir. Diğer yandan, bölümün son kısmında gelecek çalışmalar için çeşitli önerilere de yer verilecektir.

Sonuç ve Tartışma

I. Alt Probleme Yönelik Sonuç ve Tartışma

Araştırmanın birinci alt problemi aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

''İlköğretim matematik öğretmeni adayları sonsuz kümelerin denkliğini göstermede kullandıkları genel yaklaşımlar nelerdir?''

Bu bölümde öğrencilerin sonsuz kümelerin denkliğini belirleme yaklaşımlarına ilişkin sonuçlara yer verilecektir. Bu doğrultuda onların kullandıkları yöntemlerden ve sahip oldukları yanılgılardan bahsedilecektir.

Öğretmen adaylarının genel yaklaşımlarının belirlenebilmesi için iki temel veri kaynağından yararlanılmıştır.

- Genel Uygulama (I-IV) çalışmaları
- Mantık dersine ilişkin video kayıtları

Daha önce de belirtildiği gibi çalışmaya katılan öğretmen adayları, Cantor tarafından ortaya eşgüçlülük yaklaşımına ilişkin ön yaşantılara sahip değildirler. Diğer bir ifade ile kendilerine sunulan denklik ilişkileri ile ilk defa Mantık dersi kapsamında karşılaşmışlardır. Dolayısı ile yapılan gözlemler ve video kayıtları sayesinde öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin ilk yaklaşımlarının belirlenebilmesi amaçlanmıştır.

Diğer yandan öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin genel yaklaşımlarının belirlenebilmesi için ders içi gözlemlere ek olarak Genel Uygulama Çalışmaları'na da yer verilmiştir. Bu çalışmalara çalışma grubunu oluşturan tüm öğretmen adaylarının katılması amaçlanmıştır. Bu çalışmalar (I-IV) kapsamında öğretmen adaylarına sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin ispat soruları yöneltilmiştir. Onların anlayışlarını ortaya çıkarmak amacı ile kullanılan bu sorular uzman görüşü alınarak hazırlanmıştır. İlk hafta, öğrencilerin hazırbulunuşlukları göz önünde bulundurularak herhangi bir uygulama yapılmamıştır.

Genel uygulama formlarında yer alan sorular, amaçlarına göre iki temel başlık altında sınıflanabilir.

i. Öğrencilerin önceki derslerde öğrendikleri bilgiler ile sonuçlandırabilecekleri ispat soruları
ii. Öğrencilerin ispat için yeterli ön bilgiye sahip olmadıkları sorular

Genel uygulama çalışmalarında öğrencilere yöneltilen soruların büyük bir kısmı öğrencilerin (*önceki derslerden edindikleri*) ön bilgilerini kullanarak ispatlayabileceği sorulardır. Örneğin Genel Uygulama I çalışmasında yer alan aşağıdaki soru bu niteliktedir.

'' ℤ tam sayılar kümesi {51,52,…} kümesine denk midir? Gösteriniz.''

Bu sorunun bir önceki derste öğrenilen *denkliğin temel felsefesi* ışığında formal biçimde ispatlanabileceği söylenebilir.

Bu tarz soruların öğrencilere yöneltilmesindeki temel amaçlar aşağıda belirtilmiştir.

- Öğrencilerin sonsuz kümelerin denkliği ile ilişkili görerek seçtikleri ön bilgilerini belirlemek
- Öğrencilerin, seçtikleri ön bilgileri arasında kurdukları bağlantıları belirlemek
- Öğrencilerin seçtikleri önceki bilgilerini yeni durumlara nasıl transfer ettiklerini belirlemek

Diğer yandan genel uygulama çalışmalarında yer alan soruların bir kısmı da öğrencilerin yetersiz ön bilgileri nedeni ile formal biçimde ispatlayamayacakları sorulardan oluşmaktadır. Örneğin Genel Uygulama III çalışmasında yer alan aşağıdaki soru bu niteliktedir.

'' ℝ, gerçel sayılar kümesi [0,1] aralığına denk midir?''

Schröder-Bernstein teoremi kullanılarak ispatlanabilen bu sorunun, öğrenciler tarafından formal biçimde ispatlanması beklenmemiştir. Bu tarz soruların öğrencilere yöneltilmesindeki temel amaç, onların sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin informal yaklaşımlarını belirleyebilmektir.

Yapılan içerik analizi ve gözlemlerden hareketle öğrencilerin sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin genel yaklaşımları ve bu süreçte yaşadıkları güçlükler başlıklar halinde gruplanmıştır. Elde edilen başlıklara ilişkin bilgiler aşağıda sunulmuştur.

Sezgisel Yaklaşım

Gözlem kayıtları ve genel uygulama formları analiz edildiğinde, öğretmen adaylarının verilen iki sonsuz kümenin karşılaştırılmasına yönelik (*sıklıkla*) sezgisel yapılar oluşturduğu ve denklik sürecine bu çerçevede yaklaştıkları sonucuna ulaşılmıştır. Başka bir ifade ile öğrencilerin, varsayımlar ya da kabuller üreterek iki kümenin denkliğine ilişkin ispat sürecini şekillendirdikleri görülmüştür. Örneğin ℕ, doğal sayılar kümesi ve ℤ, tam sayılar kümesinin denk olduğunu göstermek isteyen bir

öğrencinin, herhangi bir delil (*veya kural*) ortaya koymaksızın kümeler arasında bijektif bir fonksiyon tanımlanabileceğini ifade etmesi bu yaklaşıma örnek olarak değerlendirilebilir. Çünkü herhangi bir formal yapı ortaya koyulmaksızın, sadece kümelerin sonsuzluğundan hareketle uygun bir fonksiyonun tanımlanabileceği varsayılmıştır. Bu tarz bir düşünce bireylerin *''her sonsuz küme denktir''* ya da daha özel olarak *''sonsuz varsa tektir''* şeklindeki düşüncelerinden kaynaklanıyor olabilir.

Bu tarz yaklaşımların temelinde sezgisel düşünmenin yer aldığı söylenebilir. Bu noktada sezgisel düşünme ile kastedilen, bireylerin formal matematiksel deliller yerine informal yaklaşımları (*varsayım veya kabul gibi*) kullanarak bir ispat sürecini biçimlendirmeleridir.

Sezgisel Yaklaşımın Nedenleri

Yapılan içerik analizinden elde edilen bulgular göz önünde bulundurularak öğrencilerin sezgisel yaklaşımların temel kaynakları aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

- Sonsuzluğun informal bir yapıda ele alınması ve formalleştirilememesi
- Önceki deneyimler ve bunların sonuçları [*Parça-Bütün etkisi*]
- Sonlu kümeler ile ilişkili ön yaşantıların olumsuz etkisi

Bu başlıklara ilişkin ulaşılan sonuçlar aşağıda sunulmuştur.

Sonsuzluğun formal bir kavram olarak içselleştirilmesinde yaşanan güçlükler

Öğretmen adaylarının sonsuzluğu anlamlandırmada ve sınıflamada yaşadıkları güçlüklerin daha iyi anlaşılabilmesi için bu kavramın gelişimine yönelik bazı açıklamalar aşağıda sunulmuştur.

Sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin sezgisel düşünmenin temelinde, bireylerin gündelik yaşam deneyimlerinin önemli bir rolü olduğu söylenebilir. Gerçek yaşam deneyimlerimiz, sonlu kavramına adapte olmuştur. Yani bireyler sonlu kavramını anlayabilir ve bunu içselleştirebilirler. Bu noktada sonsuzluğun informal tanımının, bireyler tarafından *''sonlu olmayan''* şeklinde inşa edildiği söylenebilir. Yani, Tall (1991) tarafından da belirtildiği gibi, bireylerin sonsuzluk kavramına ilişkin ilk anlayışlarının *''sonlu''* kavramından hareketle geliştiği yorumu yapılabilir. Bu

nedenle sonlu yaşantılar ile oluşan algımızın, sonsuzluğu tek ve bütün bir gerçeklik olarak algılamamıza izin vermeyeceği söylenebilir. Diğer yandan, gerçek yaşam deneyimleri sayesinde, bireylerin sonsuzluğu bir potansiyel olarak algılamalarının mümkün olduğu da söylenebilir. Örneğin iki paralel ayna arasına geçen bir kişinin görüntülerini düşünelim. Aynalara bakıldığında her defasında daha uzakta ve yeni bir görüntü bulmak mümkün olacaktır. Bu görüntüler asla bitmeyeceği için mevcut model kişinin zihninde potansiyel bir sonsuzluğa işaret edebilir. Diğer yandan tüm yansımaların tek seferde ve bir bütün olarak görülmesi mümkün değildir. Dolayısı ile (*bu model ile*) bireylerin gerçek sonsuzluğun deneyimlenmesi mümkün olmayacaktır.

Yukarıdaki açıklamalardan hareketle, (*gerçek*) sonsuzluğun gündelik yaşamda doğrudan deneyimlenmesi mümkün olmayan bir kavram olduğu sonucuna ulaşılabilir. Bireyler, sonsuzluğu potansiyel düzeyde algılayabildikleri için *''sonsuzluk varsa tektir''* anlayışına sahip olabilirler. Dolayısı ile (*bu çalışmada da görüldüğü gibi*) kendilerine sunulan sonsuz kümelerin daima denk olacağına ilişkin genelleyici bir yargıya sahip olabilirler.

Bu noktada, sonsuzluğa ilişkin informal algımızın, kümeleri sonsuzluklarına göre sınıflamamıza izin vermediği söylenebilir. Dolayısı ile (*bu çalışmada da görüldüğü gibi*) bireyler $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi ve $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi gibi farklı sonsuzluğa sahip kümelerin denk olduklarını (*sezgisel olarak*) varsayabilirler.

Diğer yandan, kümelerin farklı sonsuzluklara sahip olabileceği ilk defa Rus kökenli Alman matematikçi Georg Cantor (1846 -1918) tarafından ortaya konmuştur. Cantor, gerçek sonsuzluğu temel alan *kardinal sayılar teorisini* inşa etmiştir. Dolayısı ile yukarıdaki düşünme biçimine sahip bireylerin kardinalite yaklaşımını anlamlandırmakta, içselleştirmekte ve kullanmakta güçlük çektikleri sonucuna ulaşılabilir.

Öğrencilerin sonsuz kümeleri anlamlandırmaya ilişkin yaşadıkları güçlüklere matematik eğitimi literatüründe yer alan diğer çalışmalarda da değinilmiştir. Tirosh (1985), öğrencilerin sonsuzluğa ilişkin yaklaşımlarının sezgisel olduğunu ifade etmiştir. Fischbein, Tirosh, ve Melamed (1981) ise öğrencilerin sonsuzluğu bitmeyen bir süreç olarak algıladıkları sonucuna ulaşılmıştır. Benzer olarak, İşleyen (2013) de öğrencilerin sonsuzluğu potansiyel bir süreç olarak ele almaya eğilimli olduklarını belirtmiştir. Monaghan (1986) 'a göre süreç odaklı bu yaklaşım bireyleri tek sonsuzluk

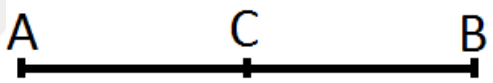
algısına yöneltmektedir. Dolaylısı ile Singer ve Voica (2003)'nın da belirttiği gibi farklı sonsuzların olabileceği düşüncesinin bireyler tarafından yeterince anlaşılamadığı sonucuna ulaşılabilir.

Parça-Bütün ilişkisinin genellenmesi

Sezgisel olarak nitelenen diğer bir yaklaşımın da *''Parça bütünden daha küçüktür.''* anlayışı çerçevesinde şekillendiği görülmüştür. Bu yaklaşıma sahip öğrencilerin gerçek yaşam tecrübelerinden hareketle sonsuz kümeler için böyle bir varsayıma ulaştıkları söylenebilir. Çünkü gerçek yaşam algımıza göre, bir bütün kendisini oluşturan parçaların toplamına eşittir ve bu parçaların her birinden daha büyüktür. Bu sonucun (*herhangi bir argüman sunulmaksızın*) sonsuz kümeler için de geçerli olduğunun kabul edilmesi, sezgisel düşünme bağlamında değerlendirilebilir.

Şekil 18

Keyfi bir C noktasından bölünmüş [AB] doğru parçası

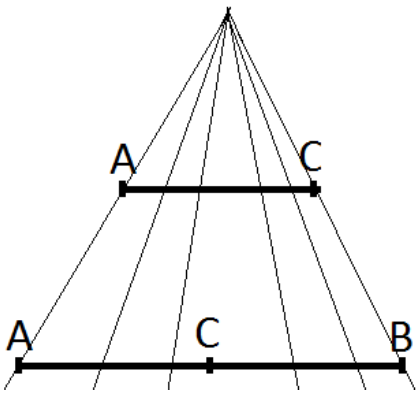


Örneğin yukarıdaki [AB] doğru parçası kendilerine sunulduğunda, öğrencilerin büyük bir kısmının [AB] üzerinde yer alan noktaların sayısının [AC] ve [CB] üzerinde yer alan noktaların sayısından daha fazla olduğunu düşündükleri görülmüştür. Bu öğrencilerin kardinalite kavramını anlamada ve kullanmakta güçlük çektikleri söylenebilir. Çünkü tüm bu doğru parçalarının ([AB], [AC], [CB]) kardinaliteleri $\#(R)=c$ kardinal sayısına eşittir. Diğer bir ifade ile, herhangi bir doğru parçası üzerinde yer alan noktaların oluşturduğu kümenin kardinalitesi bu doğru parçası üzerinde yer alan nokta sayısına bağlı değildir. Dolayısı ile bu kümelerin denk olduğu söylenebilir.

Bu denklik geometrik olarak aşağıdaki gibi modellenebilir.

Şekil 19

 # ([AC]) = # ([AB]) kardinal eşitliği için geometrik bir gösterim



Görüldüğü gibi [AC] üzerinde yer alan her nokta ile [AB] üzerinde yer alan her nokta arasında (*iki noktadan geçen doğrular ile*) bijektif bir eşleme oluşturulabilir.

Gerçek yaşam deneyimleri ile şekillenen parça-bütün ilişkisini kullanarak sonsuz kümeleri kıyaslayan bu öğrencilerin de sezgisel düşünme biçimine sahip oldukları söylenebilir. Çünkü bu öğrenciler, elemanları sayılamayacak çoklukta olan kümelerin eleman sayıları arasında miktara dayalı *(nicel)* bir ilişki kurulabileceğini varsaymışlardır. Diğer bir ifade ile bu öğrencilerin, kümelerin eleman sayılarını karşılaştırabilmek için aralık boylarını referans aldıkları ve bu sayede [AB] doğru parçası üzerinde yer alan noktaların sayısının [AC] doğru parçası üzerinde yer alan nokta sayısından daha fazla olduğunu düşündükleri söylenebilir. Diğer yandan öğrencilerin de kardinal sonsuzluk yaklaşımını yeterince anlamlandıramadıkları sonucuna ulaşılabilir.

Parça ve bütün arasında oluşturulan bu sezgisel ilişkiye literatürde yer alan diğer çalışmalarda da rastlanmıştır. Tall (1980), öğrencilerin doğru parçası üzerinde yer alan noktaların sayısını uzunlukları ile ilişkilendirerek karşılaştırdıklarını belirlemiş ve bunu *''Sonsuzluğu Ölçme''* yaklaşımı olarak ifade etmiştir. Ona göre öğrencilerin bu orantısal yaklaşımı, sezgisel düşünmelerinin bir ürünüdür. Monaghan (2001) 'a göre bu yaklaşım daha ileri yaştaki bireyler tarafından da kullanılabilmektedir. Diğer yandan Fischbein ve arkadaşları (1979) benzer durumların gerçek yaşamda dayalı ''*Parça, bütüne eşit olamaz.*'' tecrübesinin bir sonucu olarak ortaya çıktığını belirtmişlerdir. Benzer bir çalışma gerçekleştiren Tirosh ve Tsamir (1996) ise çalışma sonucunda kullanılan temsil biçimlerinin öğrencilerin sonsuzluk algısını etkilediği

sonucuna ulaşmışlardır. Bu çalışmada öğrencilerin, farklı uzunluktaki doğru parçaları üzerinde yer alan noktaların sayısını belirlerken sadece uzunlukları dikkate alarak sonuca ulaşmaya çalıştıkları gözlenmiştir. Bu durum, Mamolo (2009) tarafından sonlu ölçme uzayına ait ilkelerin sonsuz kümelere transfer edilmesi ile açıklanmıştır.

Sonlu kümelere ilişkin anlayışların etkisi

Yapılan analizlerde sezgisel yaklaşımın bir diğer nedeninin de öğrencilerin sonlu kümelere ilişkin anlayışları olduğu gözlenmiştir. Pek çok öğrenci sonsuz kümeleri kıyaslarken sonlu kümelere ilişkin anlayışlarını kullanmaya çalışmıştır.

Genel uygulamaların analizlerinde, öğrencilerin sonlu kümeler için geçerli olan aşağıdaki tanımı referans alarak sonsuz kümeleri karşılaştıkları sıklıkla görülmüştür.

$$A \sim B \Leftrightarrow s(A) = s(B)$$

Bu tanım eleman sayıları sonlu olan kümeler için uygun bir kıyaslama yöntemi sunmaktadır. Yani, eleman sayısı herhangi bir sayma sayısına eşit olan iki kümenin denk olduğu bu tanımdan hareketle kolaylıkla gösterilebilir. Diğer yandan bu tanım, elemanları sayılamayacak çoklukta olan kümelerin karşılaştırılması için uygun bir çerçeve sunmaz. Örneğin $\mathbb{Z}$, tamsayılar kümesi ve $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesinin eleman sayılarının bu tanım ile karşılaştırılması uygun bir yaklaşım olmayacaktır.

Mevcut çalışmalara katılan öğretmen adaylarının sonsuz elemanlı kümeleri kıyaslarken bu tanımı kendilerine referans aldıkları sıkça görülmüştür. Bu doğrultuda sonsuz kümeler arasında azlık-çokluk ilişkileri kurarak kümelerin denkliğini ifade etmeye çalıştıkları gözlenmiştir. Diğer yandan pek çok öğrencinin ‘’∞’’ simgesini, sonsuz kümelerin eleman sayısını ifade eden alışılmış bir sayı olarak kullandıkları gözlenmiştir. Bu durum öğrencilerin sonlu kümelere ilişkin anlayışlarının bir sonucu olarak nitelendirilebilir. Öğrenciler sonlu kümelerin eleman sayılarını ifade etmedeki yaklaşımlarını, sonsuz kümelere genişleterek bu kümelerin eleman sayılarını ifade etmeye çalışıyor olabilirler.

Örneğin bazı öğrencilerin $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi ve $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesini karşılaştırırken aşağıdaki eşitliği oluşturarak $\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$ sonucuna ulaştıkları görülmüştür.

$$s(\mathbb{N}) = s(R) = \infty$$

Bu öğrencilerin, sonsuz kümelerin denkliğini gösterebilmek için girişte sunulan (*sonlu kümelere uygun*) denklik tanımını referans aldıkları ve bu tanımı kullanabilmek için sonsuz kümelerin eleman sayılarını (*tıpkı sonlu kümelerde olduğu gibi*) ifade etmeye çalıştıkları söylenebilir. Bu noktada ''∞'' simgesini sonsuz kümelerin eleman sayısını ifade eden bir nesne olarak ele aldıkları sonucuna ulaşılabilir.

Yapılan analizlerde bazı öğrencilerin de sonlu kümeler için geçerli olabilecek öz alt küme ilişkisinden hareketle sonsuz kümelerin denklik ilişkilerini belirlemeye çalıştıkları gözlenmiştir. Örneğin $\mathbb{Z} \overset{?}{\sim} \mathbb{Z} - \{0\}$ şeklinde bir soru yöneltildiğinde, bazı öğrencilerin sonlu kümelere ilişkin anlayışlarını göz önüne alarak kümelerin denk olamayacağını ifade ettikleri görülmüştür. Bu düşünme biçimine sahip öğrencilerin, sonlu kümeler için geçerli olan *''Bir küme öz alt denk olamaz.''* şeklindeki düşüncelerinden hareketle böyle bir sonuca ulaşmış oldukları söylenebilir. Sonlu kümeler için geçerli olan bu önermenin sonsuz kümeler için geçerli olması beklenemez. Dolayısı ile bu öğrencilerin yaklaşımının da sezgisel düşünme bağlamında değerlendirilebileceği söylenebilir. Çünkü öğrenciler, sayılamaz çoklukta elemana sahip kümelerin eleman sayılarını azlık-çokluk ilişkileri kurularak karşılaştırmakta ve bir kümenin diğerinden daha az sayıda elemana sahip olduğunu (*formal bir delil sunmaksızın*) kabul etmektedirler.

Diğer yandan sonsuz kümelerin denkliğinin belirlenmesinde Cantor tarafından kullanılan bijektif eşleme yaklaşımından yararlanılır. Bu yaklaşın aşağıda sunulmuştur.

$$A \sim B \Leftrightarrow f = \{f \mid f: A \rightarrow B, \text{bijektif}\} \neq \emptyset$$

Bu yaklaşıma göre sonsuz bir kümeden sonlu sayıda eleman çıkarmak (*veya bu kümeye sonlu sayıda eklemek*) kümenin kardinalitesini değiştirmeyecektir. Dolayısı ile bahsedilen $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}$-$\{0\}$ kümelerinin kardinaliteleri $\aleph_0$ (*alef sıfır*) değerine eşit olduğundan bu kümelerin denk olduğu açıktır.

Dolayısı ile bu başlık altında sunulan düşünme biçimlerine (*ve benzerlerine*) sahip öğrencilerin Cantor tarafından ortaya konan birebir-örten eşleme mantığını ve kardinalite kavramını yeterince anlamlandıramadığı sonucuna ulaşılabilir.

Benzer genellemelere literatürde yer alan diğer çalışmalarda da rastlanmıştır. Singer ve Voica'ya (2003) göre öğrenciler, sonsuz kümeleri karşılaştırırken sonlu kümelere ait ilkeler ile hareket etmekte ve sezgisel yaklaşımlar sergilemektedirler. Tall (1980), öğrencilerin sonlu kümeler üzerinde gerçekleştirdiği gözlemlerin sonuçlarını sonsuz kümelere genelleştirme çabası içerisinde olduklarını belirtmiştir. Narlı ve Narlı (2012) 'da öğrencilerin sonlu kümelerde olduğu gibi biçimsel özelliklere odaklanarak sonsuz kümeleri karşılaştırmaya çalıştıkları sonucuna ulaşmıştır.

Sezgisel Yaklaşımın İspat Sürecin Etkisi

Kümelerin denkliğine ilişkin sezgisel yaklaşım benimseyen öğrenciler formal bir ispat sürecini yürütememişlerdir. Bunun nedeni, sunulan yaklaşımların formal deliller içermemesidir. Diğer bir ifade ile bireyler, ispat sürecinde mantıksal argümanlara yer vermek yerine varsayım ve kabullerini temel alan yaklaşımlar biçimlendirebilmişlerdir.

Daha önce de açıklandığı gibi, ispat süreci hipotez ile hüküm arasındaki ilişkinin neden doğru olduğunu açıklayabilmelidir. Bu da hipotez ile hüküm arasındaki ara deliller aracılığı ile sağlanabilir. Eğer hipotez ile hüküm arasındaki bağlantıyı oluşturan bu deliller, önermenin neden doğru olduğunu anlamaya olanak sağlıyor ise ispat formal olarak nitelendirilebilir. Diğer yandan bu deliller yeterli mantıksal bağlardan yoksun bir şekilde varsayımlar-kabuller çerçevesinde şekilleniyor ise ispat formal olarak değerlendirilemez. Bu noktada bahsedilen varsayım ve kabullerin bireylerin kişisel anlayışları bağlamında (*sezgisel olarak*) şekillendiği söylenebilir.

Sezgisel olarak nitelendirilen bu yaklaşımlara özellikle sürecin başlangıcında daha çok rastlanmıştır. Ancak uygulama sürecinin son aşamalarında *(özellikle IV. uygulamada)* bu tarz yaklaşımları benimseyen öğrenci sayısında önemli azalma olduğu gözlenmiştir. Bu bulgudan hareketle, öğrencilerin yaşantıları sonucunda sezgisel yaklaşımlarından vazgeçmeye başladıkları ver denklik ilişkilerini daha formal bir çerçevede ele almaya başladıkları sonucuna ulaşılabilir.

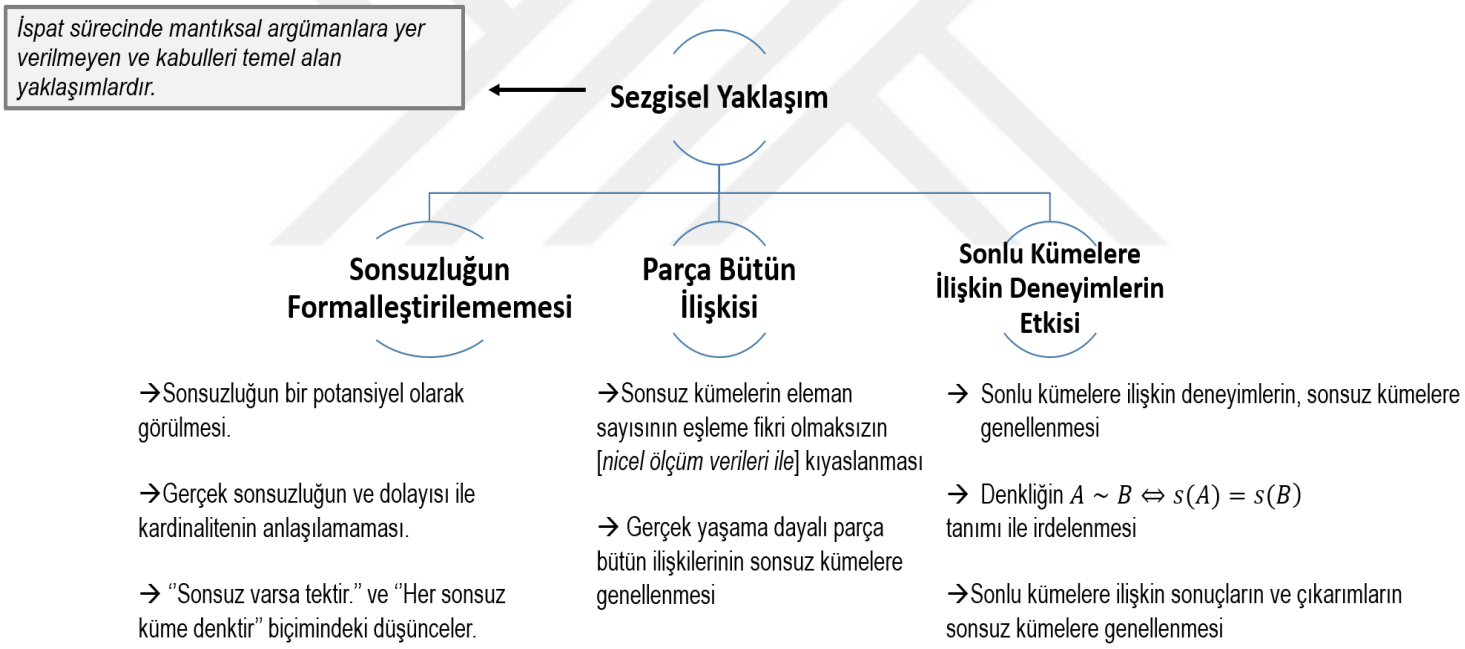
Bu noktada öğrencilerin sezgisel yaklaşımlarından vazgeçmesinin uzun bir zaman aldığı da söylenebilir. Bu durumun nedeni Cantor tarafından ortaya konan küme

teorisinin ilkelerinin öğrenciler tarafından benimsenmesinin uzun zaman alması ile açıklanabilir.

Tüm bu sonuçlardan hareketle öğrencilerin Cantor tarafından modern küme teorisi çerçevesinde ortaya konan eşgüçlülük fikrini istenen düzeyde kullanamadıkları sonucuna ulaşılabilir. Pek çok birey matematiksel durumları kurallı fonksiyonlar ya da bijektif eşlemeler ile kanıtlamak yerine sezgisel yaklaşımları ile doğrulayamaya çalışmıştır. Dolayısı ile öğrencilerin sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili ispat süreçlerinde genel olarak sezgisel yaklaşımları tercih ettikleri ve tam formal seviyeye geçmede zorluklar yaşandığı söylenebilir.

Şekil 20

Sezgisel Yaklaşım ve Nedenlerine İlişkin Özet Diyagram



Kavram Yanılgıları ve İspat Sürecine Etkileri

Sezgisel yaklaşım önemli bir etmen olsa da öğrencilerin formal ispata ulaşamamasının tek nedeni onların sezgisel yaklaşımları değildir. Yapılan analizlerde, kavramlara ilişkin yanılgıların da öğrencilerin formal ispata ulaşmalarını engelleyen faktörler arasında yer aldığı görülmüştür. Kavramsal temel, ispat sürecinden ayrı düşünülemez. Çünkü istenen bir ispata ulaşılabilmesi için doğru kavramların seçilmesi ve bu kavramlar arasında doğru ilişkilerin kurulması beklenmektedir. İspat sürecinin temelini oluşturan bu kavramlara ilişkin yanılgılar, bireylerin formal açıdan doğru bir ispata ulaşmasını engelleyebilir.

Süreç içerisinde pek çok noktada öğrencilerin kavram yanılgıları nedeni ile formal ispata ulaşamadıkları gözlenmiştir.

Genel uygulama çalışmaları ve gözlemler bir arada değerlendirildiğinde öğrencilerin çeşitli konulara ilişkin fonksiyon, birebirlik ve örtenlik gibi pek çok temel kavrama ilişkin yanılgılara sahip oldukları sonucuna ulaşılmıştır Ayrıca öğrencilerin alt küme, üst küme ve kuvvet kümesi gibi çeşitli kavramı birbiri yerine kullandığı ve bu nedenle formal ispata ulaşamadıkları görülmüştür.

Bu kategoriyi açıklayacak bazı örnekler aşağıda sunulmuştur.

Örneğin bir öğrenci tanımladığı f fonksiyonun birebirliğini aşağıdaki koşulu sağlayarak kontrol etmiş ve tanımladığı fonksiyonun birebir olduğu sonucuna ulaşabilmiştir.

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{?}{=} f(x_2)$$

Oysaki bir f fonksiyonun birebirliği ‘’tanım kümesindeki farklı elemanları görüntülerinin farklı olması’’ ile açıklanır. Yani birebirlik için aşağıdaki koşul geçerlidir.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \overset{?}{=} x_2$$

Bu noktada öğrencinin, fonksiyon olma şartını yanlış yorumladığı ve birebirlik şartı olarak değerlendirdiği ve bu nedenle formal ispata ulaşamadığı gözlenmiştir.

Sınırlılık/sınırsızlık ile ilgili karşılaşılan yanılgılar da bu kategori bağlamında örnek olarak gösterilebilir. Singer ve Voica (2003) tarafından yürütülen çalışmada da karşılaşılan bu yanılgılardan bazıları aşağıda sunulmuştur.

- Sonsuz küme sınırsızdır.
- Sınırlı küme sonludur.
- Sınırlı kümelerin eleman sayısı sınırsız kümelerden daha azdır.
- Sonlu kümeler ve sınırlı kümeler denktir.
- Sınırlı bir küme ile sınırsız bir küme denk olamaz.

Örneğin ‘’*Sınırlı bir küme sınırsız bir kümeye denk olamaz.’’* yanılgısına sahip olan bir birey $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesinin (0,1) aralığına denk olamayacağını düşünmüş ve ispatını bu doğrultuda gerçekleştirmeye çalışmıştır. Öğrencilerin bu noktadaki yanılgılarının temelini, kavramları birbiri yerine kullanmaları oluşturuyor olabilir. Yani öğrenciler, sınırlı kümeleri sonlu kümeler ve sınırsız kümeleri de sonsuz kümeler olarak ele aldıkları için bu sonuca ulaşmış olabilirler. Bu ve benzeri örneklere yapılan çalışmada sıklıkla rastlanmıştır.

Kavramsal temelin, formal bir ispatın ön şartlarından birini oluşturduğu söylenebilir. Öğrencilerin istenen formal ispata ulaşabilmeleri için ilgili kavramlara hâkim olmaları ve bunları işlemsel düzeyde etkin bir şekilde kullanabilmeleri gerekmektedir. Bu açıdan ispat sürecinin çok boyutlu bir süreç olduğu ve öğrencilerin önceki öğrenmelerinden doğrudan etkilendiği söylenebilir. Öğrencilerin ispat becerilerinin geliştirilmesi için yeterli kavramsal temellerinin oluşturulması gerektiği sonucuna ulaşılabilir.

İspat Sürecine İlişkin Yetersizlikler

Öğretmen adaylarının formal ispata ulaşamamalarının diğer bir nedeni de ispata ve ispat yöntemlerine ilişkin bilgi eksiklikleri olarak tespit edilmiştir. Bu noktada bahsedilen bilgi eksikliği iki temel boyutta ele alınabilir.

i. İspatın biçimine (diline) ilişkin yetersizlikler
ii. İspat yöntemine ilişkin yetersizlikler

Matematik eğitimi literatüründe ispat ve tanımına ilişkin pek çok farklı açıklamanın yer aldığı görülebilir. Matematikçiler, kendi bakış açılarına göre farklı ispat tanımları ve ispat süreçleri belirlemişlerdir. Bu çalışma herhangi bir matematikçinin ispata ilişkin görüş, yaklaşım ve sınıflamalarını doğrudan temel almamaktadır.

Mevcut çalışma kapsamında sıklıkla vurgulanan *''formal ispat ''* becerisine ilişkin anlayışın detaylandırılabilmesi için literatürde yer alan bazı matematikçilerin görüşlerini sunan Tablo 31 incelenebilir.

Tablo 31

Bazı matematikçilerin ispata bakış açıları

Shipley (1999)	İspatı, hipotezlerin formüle edildiği, kontrol edildiği karmaşık ve sistematik bir problem çözme aktivitesi olarak tanımlamaktadır.
Lee (2002)	İspat sürecini süreci üç eylem ile açıklamaktadır. Bunlar: ispat için tahminde bulunma, ispatın organize edilmesi, diğer insanlara ispatın açıklanmasıdır.
Tall (1998)	Matematiksel bir ispatın iki temel amacı olduğunu belirtmiştir. Bunlardan ilki hipotezin mantıklı adımlarla bir sonuca ulaştığını göstermektir. Diğeri ise varsayımlardan neden ve nasıl gidildiğini anlamaktır.
Bell (1976)	İspatı bir süreç olarak ele almış ve aşağıdaki üç temel eylem ile bu sürecin gerçekleştiğini ifade etmiştir. i. Doğrulama (önermenin doğruluğunu gösterme) ii. Açıklama (önermenin neden doğru olduğunu gösterme) iii. Sistematik hale getirme (Matematiksel yapıları bir sistem olarak sunma)

Tablo 31 incelendiğinde, görüşlerin sunulan matematikçilerin ispata yönelik tanımlarının iki temel noktada uzlaştığı görülebilir. İlki matematiksel ispatın, matematiksel bir mantığı (*akıl yürütme sürecini*) içermesidir. Yani ispat, hipotezden hareketle hükme ulaşma sürecinde ara adımlarda mantıksal ilişkilerin kurulduğu bir süreçtir. Bu yol ile bireyler verilen bir iddianın sadece doğru olduğunu değil aynı zamanda neden doğru olduğunu da anlayabilirler. Diğer yandan ispat süreci, akıl yürütme eylemine ek olarak matematiksel bir dili de içermektedir. Yani bireyler

düşünme süreçlerinin ürünlerini açıklayabilecek uygun (*ikna edici*) bir dil kullanarak görüşlerini başkalarına aktarabilmelidirler. Bu yeterlik, ispatın biçimsel (*dil*) boyutunu oluşturmaktadır.

Çalışmaya katılan öğrencilerin sundukları yaklaşımlar analiz edildiğinde pek çok öğrencinin, matematiksel dili yetersiz kullanmadan kaynaklı sorunlar yaşadığı gözlenmiştir. Diğer bir ifade ile öğrencilerin formal ispata ulaşamama sebeplerinden biri, matematiksel dili yetersiz kullanmalarıdır. Bu öğrenciler, muhakemelerini ifade edebilecek sistematik bir dil oluşturamadıkları için ispat sürecini hatalı tamamlamış ya da eksik bırakmışlardır.

Diğer yandan bazı öğrencilerin de ispat yöntemlerine ilişkin yetersiz bilgilerinden dolayı formal ispata ulaşamadıkları gözlenmiştir. Bu noktada en sık karşılaşılan yaklaşımın örnek verme yaklaşımı olduğu gözlenmiştir. Pek çok öğrenci, kendilerine sunulan bir durumun daima geçerli gösterebilmek için (*sonlu sayıda*) özel örnekler oluşturmakla yetinmiştir. Bu öğrenciler, oluşturdukları özel örnekleri geçerli birer ispat olarak değerlendirmişlerdir. Örneğin bir öğrenci *iki sayılabilir kümenin birleşiminin daima sayılabilir* olduğunu gösterebilmek için $\mathbb{Z}$, tam sayılar kümesi ve $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi gibi iki sayılabilir küme seçmiş ve $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}$ kümesinin de sayılabilir olduğunu ifade ederek ispatı tamamladığını belirtmiştir. Oysaki bu öğrenci ifadenin doğru olduğuna ilişkin spesifik bir örnek sunmasına rağmen genel bir ispat sunmamıştır. Dolayısı ile bu öğrencinin, ispat yöntemine ilişkin ilgili hatalı bir düşünme biçimine sahip olduğu sonucuna ulaşılabilir. Bu ve benzeri durumlara genel uygulamalar ve gözlemler içerisinde sıkça rastlanılmıştır.

Bu ispat yaklaşımına yönelik yetersizliklerin nedenlerinden biri öğrencilerin aşırı genelleyici düşünme biçimleri olabilir. Aşırı genelleme, özel bir durum için doğru olan kural, prensip veya kavramın diğer tüm durumlarda da doğru olduğunun düşünülmesi olarak tanımlanabilir. Bu yaklaşımı benimseyen öğrenciler, özel örnekleri için geçerli olan bir önermenin genel olarak (*daima*) geçerli olduğunu (*tümevarımsal olarak*) düşünerek ispata ulaştıklarını ifade etmiş olabilirler.

Bir diğer neden ise öğrencilerin *''aksine örnek verme''* ispat yaklaşımını yanlış yorumlamaları olabilir. Aksine örnek verme yaklaşımında, doğru olduğu iddia edilen bir önermenin yanlışlığının gösterilebilmesi için aksi bir örnek vermek yeterlidir. Örneğin *''İki tek sayının çarpımı çifttir.''* önermesinin yanlış olduğunu ispatlamak için

herhangi iki tek sayı (*mesela 3 ve 5*) seçilerek çarpımın çift sayı olmadığı gösterilebilir. Diğer yandan çalışmaya katılan öğrenciler herhangi bir önermeyi yanlışlamak için geçerli olan bu yaklaşımın, ispat için de geçerli olabileceğini varsaymış olabilirler. Yani öğrenciler, doğrulamak için de bir (*veya daha çok*) örneğin yeterli olabileceğini düşünmüş olabilirler. Bu tarz bir yaklaşım, matematiksel açıdan formal olarak nitelendirilmez. Örneğin *''İki tek sayının çarpımı tektir.''* önermesini düşünelim. Bu önermenin her zaman doğru olduğunu göstermek için herhangi tek iki sayının (*3 ve 5 tekrar alınabilir*) çarpımının tek olduğunun gösterilmesi yeterli değildir. Çünkü önermenin özel örnekler için geçerli olması, koşulu sağlayan her durum için geçerli olduğu anlamına gelmeyecektir. Dolayısı ile spesifik durumlar üzerinde sağlanan doğrulama işlemleri, genel bir ispat olarak nitelendirilemez. Diğer yandan, bireylerin formal ispata ulaşabilmeleri için tüm durumların göz önünde bulundurulabileceği genel (*cebirsel*) bir yaklaşımları benimsenmeleri beklenebilir.

Bu sonuçlar, öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğini gösterme sürecine kavramsal, işlemsel ve yöntemsel açıdan yetersizlikler yaşadıklarının göstergeleri olarak yorumlanabilir.

Bireylerin ispat sürecin etkili bir şekilde yürütmekte güçlük çektiğine ilişkin sonuçlara literatürde de sıkça rastlanmaktadır. Örneğin Moore (1994) öğrencilerin ispat yapma sürecinde yaşadıkları güçlükleri araştırmıştır. Buna göre öğrencilerin kavramları kullanamadıkları için ispata ulaşamadıklarını belirlemiştir. Ayrıca bireylerin uygun bir ispat yapısı oluşturamadıklarını belirtmiş ve onların ispat yöntemlerini doğru uygulayamadıkları sonucuna da ulaşmıştır. Benzer olarak Schabel (2001) de yapmış olduğu doktora tez çalışmasında üniversite öğrencilerinin de ispat yapma sürecinde güçlükler yaşadığını belirlemiştir. Elementer Sayılar Kuramı (*Sayılar Teorisi*) dersi kapsamında 4 katılımcı ile yapılan çalışmalarda gerçekleştirilen etkinlik temelli klinik mülakatlar sonucunda aşağıdaki alanlarda yetersizlikler olduğu belirlenmiştir.

- Öğrencilerin genelleme ve aksi örnek verme becerilerinin kullanımı
- Öğrencilerin (özgün) ispat yapabilme
- Öğrencilerin ispatlarını açıklayabilme

II. Alt Probleme Yönelik Sonuç ve Tartışma

Bu başlık altında bireysel çalışmaların her birine ilişkin değerlendirme sonuçları paylaşılacaktır. Çalışma sürecinde 3 farklı öğretmen adayı ile (*A,B ve D olarak isimlendirildi*) toplamda 12 etkinlik temelli mülakat gerçekleştirilmiştir. Bu mülakatlardan üçüne ilişkin ayrıntılı analizler bir önceki bölümde sunulmuştur. Dolayısı ile bu bölümde süreçlere ilişkin genel değerlendirilmelerde bulunulacaktır.

Çalışmaya katılan her üç öğretmen adayının da formal ispata ulaşabildikleri gözlenmiştir. Ayrıca her üç öğretmen adayının da Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından ortaya konan tanım ışığında ispat imajlarına sahip oldukları söylenebilir. Bu bölümde imajların bileşenlerine ilişkin spesifik örneklere değinilmeyecektir. Bunun yerine daha genel bir bakış açısı ile imajlara ilişkin sonuçlar sunulacaktır.

A'nın İspat İmajının Değerlendirilmesi

Bu süreçte A olarak isimlendirilen bir öğretmen adayının ispatlama etkinliğindeki bilişsel süreçleri, bu süreçlerle etkileşim halinde olan hisleri ve bilgiyi oluşturma sürecine odaklanılmıştır. Bu bağlamda A'nın sonsuz kümelerin denkliğine yönelik bir soruya verdiği cevaba ilişkin ispatlama sürecindeki ispat imajı, duygusal olmayan bilişsel hisleri ve epistemik eylemlerin bağlamında analiz edilmiştir. [*Bu ispat imajına ilişkin genel bir çerçeve sunmak amacı ile sürece ilişkin akış şeması ve ilgili göstergeler ayrıntılı bir biçimde sunulacaktır.*]

A'nın ispat imajını iki bileşeni yönünden incelenmiştir. Bu bileşenlerden ilki 4 özellik içeren bilişsel anlayıştır. Bu özelliklerle ilgili gözlemlerimize göre A'nın ispat imajının kişisel anlayışa sahip olduğu söylenebilir. Sürecin başında düşündüklerini tam olarak ifade edememesi ve anlama gerçekleştikçe sürecin devamında düşüncelerini paylaşabilir hale gelmesi buna örnek olarak gösterilebilir. Her adımda seçtiği bilgi yapıları arasında mantıklı ilişkiler kurması da hem sezgisel hem formal olarak ispat imajının mantıksal bağlar içerdiğinin bir göstergesi olarak değerlendirilebilir. Bunun yanı sıra A'nın ispat imajı sezgisel olarak başlayan ama oluşturduğu yapılar ve mantıksal bağlarla ilerleyen bir süreç olarak dinamik bir karaktere de sahiptir.

Zihninde var olan çözümün öğelerine yönelik olarak A'nın zihninde yer alan bu öğeleri uygun bir kombinasyon ile bir araya gelmesi sonucu yaşadığını gözlemlediğimiz iç görü anı ile ispatı oluşturabilmiştir. Bu durum A'nın ispat imajının tek bir bütün olma özelliğine sahip olduğunun göstergesi olarak değerlendirilebilir.

Ayrıca önceki ve sonraki adımları ile ilgili çıkarımları da varlık karakteristiğinin birer örneği olarak değerlendirilebilir. Yani varlık karakteristiği bakımından A'nın ispatın bir bütünlük oluşturması ve bu bütünlüğün bir oluşuma/ürüne sebebiyet vermesi söz konusudur.

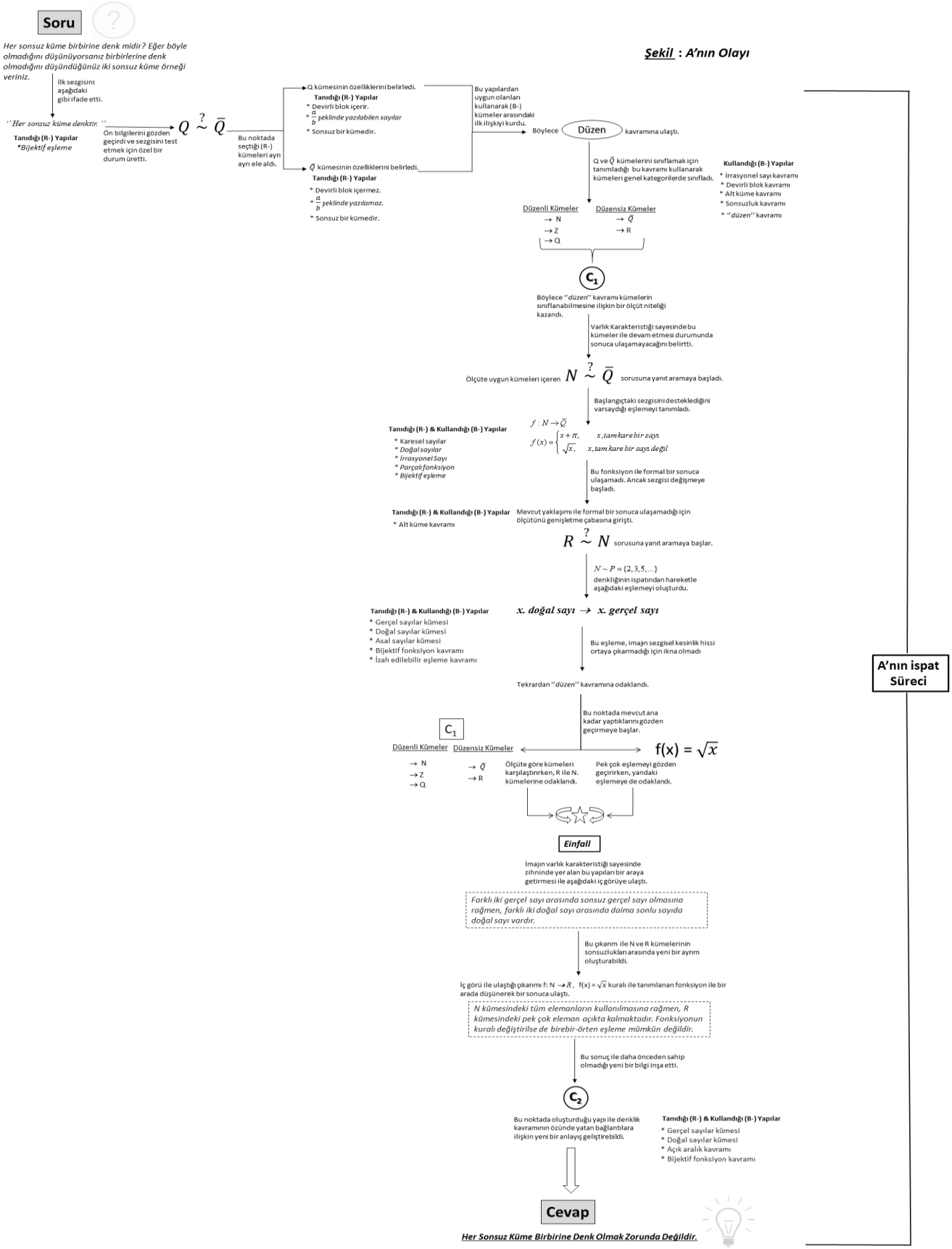
İspat imajının duyuşsal ikna hissi bakımından, A'nın hem vücut ifadelerinden hem de ses tonundan sezgisel kesinlik hissi gözlemlenmiştir. Yani duyuşsal ikna hissinin oluştuğu söylenebilir. Aynı zamanda imajın sezgisel ikna hissinin oluşumunun derinlemesine analizi için A'nın duygusal olmayan bilişsel hisleri de incelenmiştir. Bu noktada duyuşsal kesinlik hissine yol açtığı düşünülen veya onunla ilişkili olabilecek hislere odaklanılmıştır. Buna göre A ispatlama sürecinde *bilme hissi, haklılık hissi, aşina olma hissi* ve *doğru iz üstünde olma hissi* gibi bilişsel hisleri deneyimlediği gözlenmiştir. Ayrıca bu deneyimlerinin ispatı oluşturmasında önemli bir role sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Örneğin *doğru iz üstünde olma hissi* ile süreç içerisinde doğru bir şekilde ilerleyebilmiştir.

Epistemik eylemler bakımından A ispat için gerekli bilgileri tanımış, bu bilgileri aralarında bağlantılar kurarak kullanmıştır. Süreç boyunca önceki adımlardaki epistemik eylemlerin sonuçlarını kullanarak yeni bilgi yapılarına ulaşmıştır. Aynı zamanda bu bilgi yapılarını kullanarak daha önceden sahip olmadığı yeni bilgi yapılarını inşa ederek ulaşmak istediği sonuca varabildiği yorumu yapılabilir.

Özetle bu süreçte, başlangıçta sezgisel bir yaklaşımın içerdiği mantıksal bağları her adımda genişleterek basitten karmaşığa doğru dinamik bir biçimde ilerlediği ve nihayetinde yeni bir bilgi oluşumu ile sonuçlandığı gözlenmiştir. Tüm bu süreç boyunca ortaya konan yaklaşımın kişiye özgü bileşenleri içerisinde barındıracak şekilde ve bir bütünlük içerisinde biçimlendiği de söylenebilir. Ayrıca bu sürece bilişsel faktörlerin yanı sıra birer tamamlayıcı olarak duyuşsal faktörlerin de dâhil olduğu söylenebilir. Sonuç olarak A tüm bu bileşenlere dayalı bir imajı oluşturabildiği ispat sürecinde gerekli noktalarda uygun (epistemik) eylemleri gerçekleştirerek ulaşmak istediği sonuca ulaşabilmiştir.

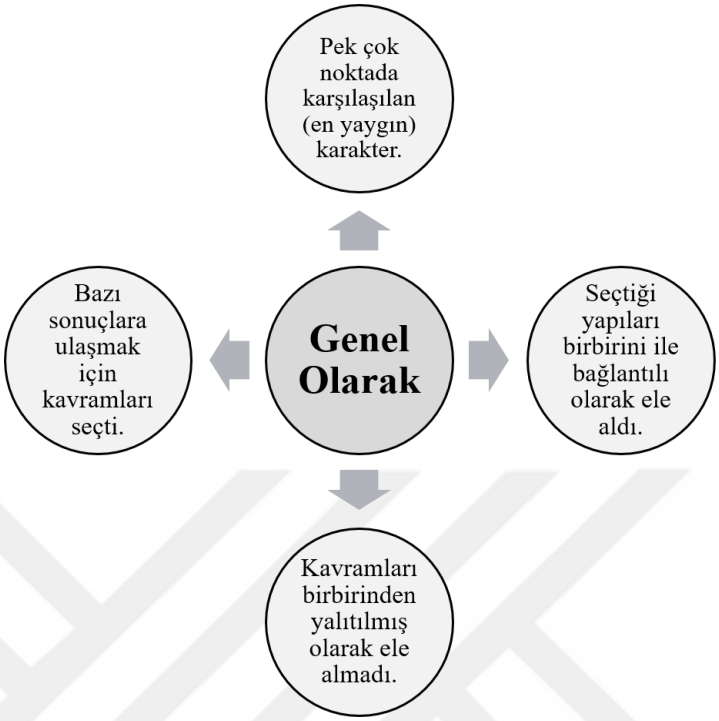
Şekil 21

A'nın ispat sürecini özetleyen akış şeması



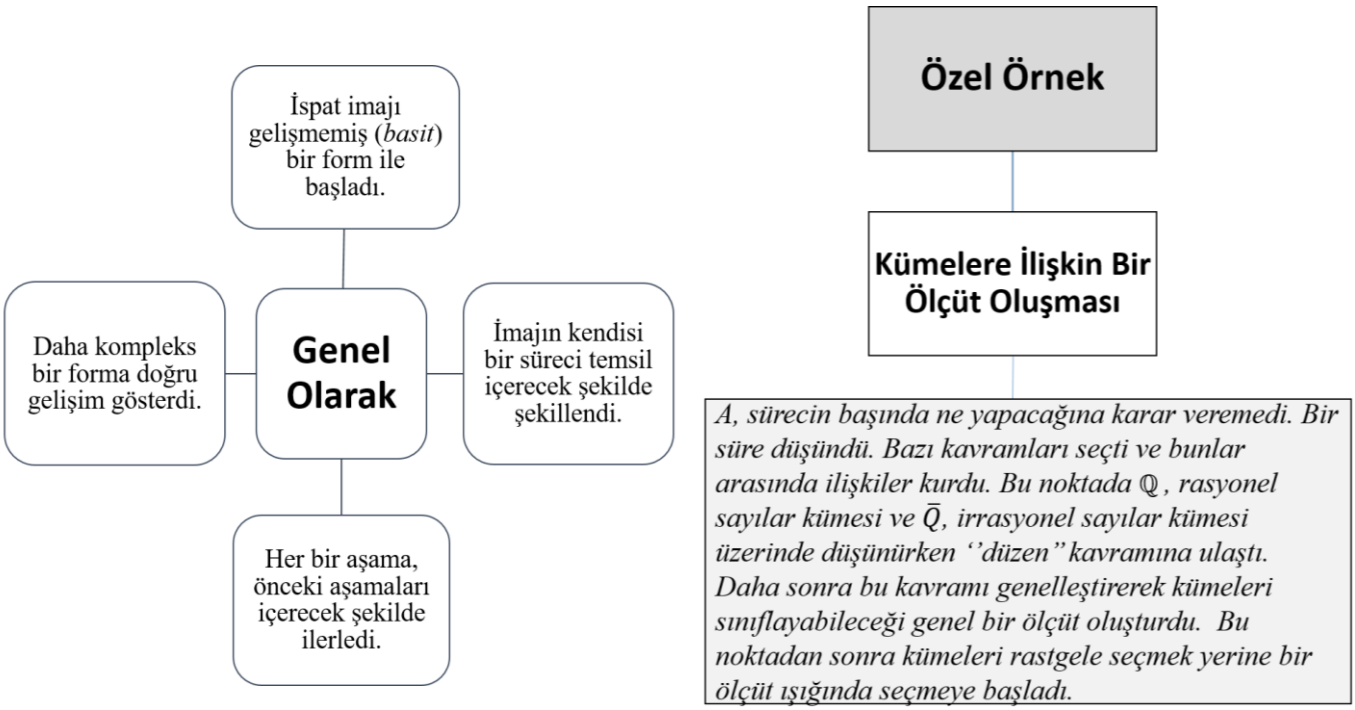
Şekil 22

A'nın Kanıt İmajının Mantıksal Bağlar İçerdiğine İlişkin Genel Göstergeler



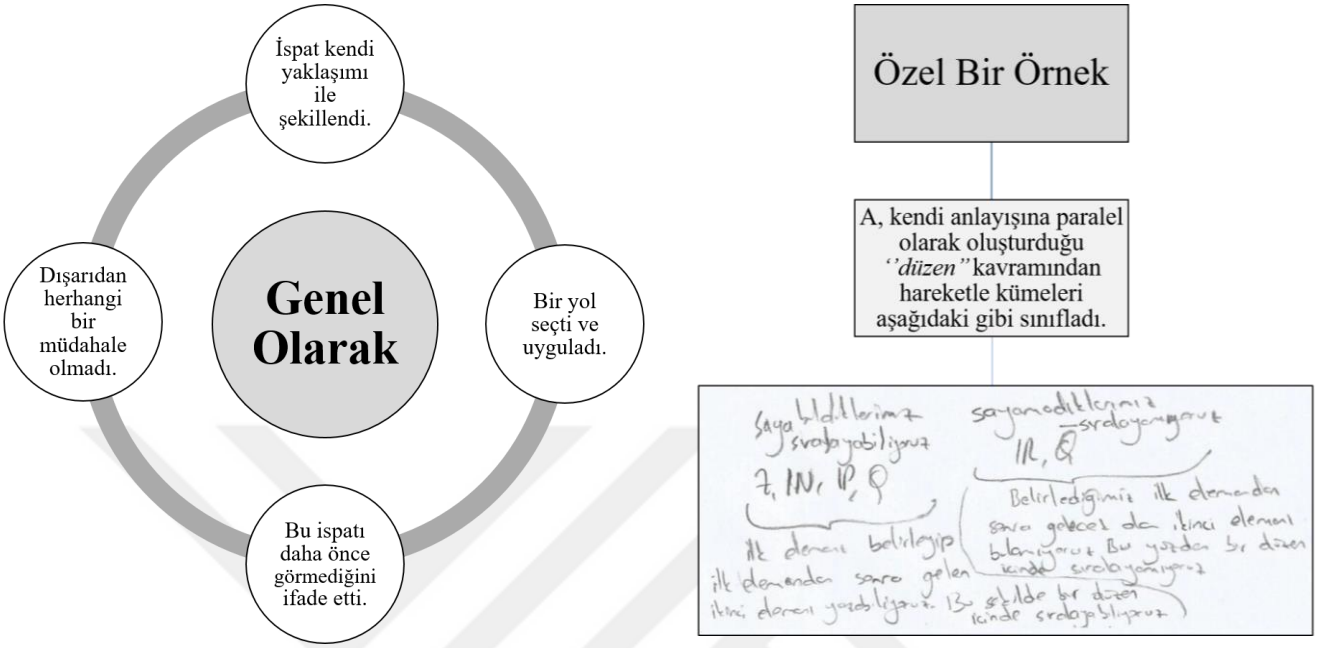
Şekil 23

A'nın Kanıt İmajının Dinamik Olduğuna İlişkin Genel Göstergeler ve Spesifik Bir Örnek



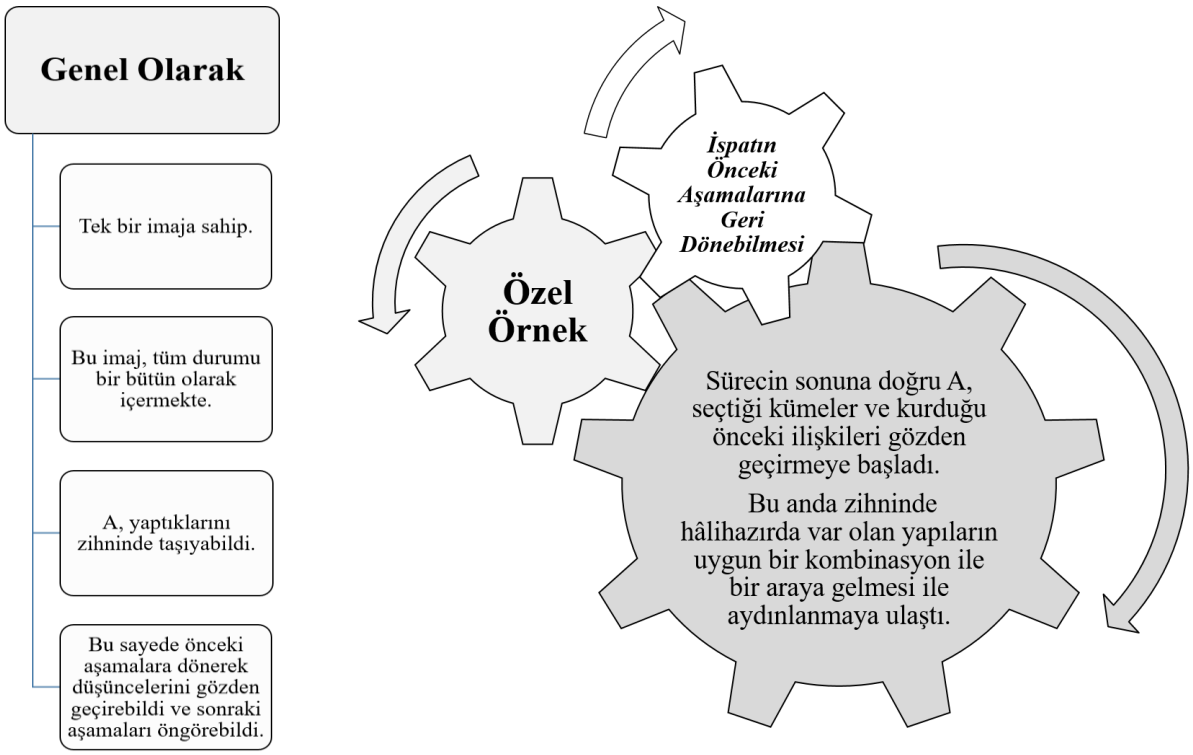
Şekil 24

A'nın Kanıt İmajının Kişisel Anlayış Çerçevesinde Şekillendiğine İlişkin Genel Göstergeler ve Spesifik Bir Örnek



Şekil 25

A'nın Kanıt İmajının Varlık (*Bütünlük*) Karakteristiğine Sahip Olduğuna İlişkin Genel Göstergeler ve Spesifik Bir Örnek



B'nin İspat İmajının Değerlendirilmesi

Bu süreçte B olarak isimlendirilen bir öğretmen adayının ispatlama etkinliğindeki bilişsel süreçleri, bu süreçlerle etkileşim halinde olan hisleri ve bilgiyi oluşturma sürecine odaklanılmıştır. Bu bağlamda B'nin kendisine sunulan bir teoremin ispatını oluşturma sürecindeki ispat imajı, duygusal olmayan bilişsel hisleri ve epistemik eylemlerin bağlamında analiz edilmiştir.

B'nin ispat imajını iki bileşeni yönünden incelenmiştir. Bu bileşenlerden ilki 4 özellik içeren bilişsel anlayıştır. Bu özelliklerle ilgili gözlemlerimize göre B'nın ispat imajının kişisel anlayışa sahip olduğu söylenebilir. Çünkü tüm süreç onun zihinsel çabasının bir ürünü olarak şekillenmiştir. Verdiği örnekler, seçtiği yapılar ve kurduğu ilişkilere doğrudan bir müdahale olmamıştır. Düşünme sürecinde rahat olabilmesi için zaman ve işlem bakımından herhangi bir sınırlama getirilmemiştir. Diğer yandan B'nin süreç içerisinde seçtiği bilgi yapıları arasında hem sezgisel hem formal olarak ilişkiler kurması da ispat imajının mantıksal bağlar içerdiğinin bir göstergesi olarak değerlendirilebilir. Çünkü o, süreç içerisinde pek çok noktada seçtiği kavramlar ve verdiği örnekler arasında kurduğu ilişkiler ile ispat sürecini tamamlayabilmiştir. Bunun yanı sıra B'nın ispat imajı her bir adımda önceki süreçleri içerisinde barındıracak şekilde, daha gelişmemiş bir formdan daha gelişmiş bir forma doğru şekillenmiştir. Mantıksal bağlar çerçevesinde ilerleyen bu süreç, imajın dinamik bir karaktere sahip olduğunun göstergesi olarak yorumlanabilir.

B ispat sürecinde iki temel iç görü anı yaşayarak formal ispata ulaşabilmiştir. Her bir iç görü anı, onun zihninde hâlihazırda yer alan yapıları uygun bir biçimde bir araya getirebilmesi ile gerçekleşebilmiştir. Dolayısı ile bu anlar ispat imajının tek bir bütün olma özelliğine sahip olduğunun göstergesi olan varlık karakteristiğinin göstergeleri olarak değerlendirilebilir. Diğer yandan B'nin önceki ve sonraki adımları ile ilgili çıkarımları da varlık karakteristiğinin birer örneği olarak değerlendirilebilir. Yani varlık karakteristiği ile ispatın bir bütünlük oluşturduğu ve bu bütünlüğün bir oluşuma/ürüne sebebiyet vermesi söz konusudur.

İspat sürecinde doğrulamanın gerçekleştiği pek çok noktada, B'nin hem vücut ifadelerinden hem de ses tonundan sezgisel ikna hissinin ortaya çıktığı gözlenmiştir. Özellikle sürecin son adımında, ortaya çıkan kesinlik hissi ile B'nin bir

tamamlanmışlık duygusuna sahip olduğu kendi ifadelerinden anlaşılmıştır. Sonuç olarak sürecin genelinde bilişsel faktörlerin birer tamamlayıcısı olarak duyuşsal bileşenlerin de ortaya çıktığı sonucuna ulaşılabilir Diğer yandan duyuşsal boyutun derinlemesine analizi için B'nin duygusal olmayan bilişsel hisleri de incelenmiştir. Bu noktada duyuşsal kesinlik hissine yol açtığı düşünülen veya onunla ilişkili olabilecek hislere odaklanılmıştır. Buna göre B'nin ispatlama sürecinde farklı noktalarda *bilme hissi*, *haklılık hissi* ve *doğru iz üstünde olma hissi* gibi bilişsel hisleri deneyimlediği gözlenmiştir. Ayrıca bu deneyimlerinin ispatı oluşturmasında önemli bir role sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Örneğin *haklılık hissine sahip* olduğu noktalarda sunduğu yaklaşımların doğru olduğunu görebilmiş ve bu sayede ispat sürecinde doğru bir şekilde ilerleyebilmiştir.

Epistemik eylemler bakımından pek çok noktada B'nin ispat için gerekli bilgileri tanıdığı, bu bilgileri aralarında bağlantılar kurarak bunları kullandığı söylenebilir. B, süreç içerisinde seçtiği ve ilişkilendirdiği önceki bilgi yapılarını kullanarak iki bilgi yapısına ulaşabilmiştir. Aynı zamanda bu bilgi yapılarını kullanarak teoremi formal bir yol ile ispatlayabilmiştir.

D'nin İspat İmajının Değerlendirilmesi

Bu süreçte D olarak isimlendirilen bir öğretmen adayının ispatlama etkinliğindeki bilişsel süreçleri, bu süreçlerle etkileşim halinde olan hisleri ve bilgiyi oluşturma sürecine odaklanılmıştır. Bu bağlamda D'nin kendisine sunulan aşağıdaki teoremi ispatlama süreci bilişsel ve duyuşsal bileşenleri bakımından incelenmiştir.

$\mathbb{R}$*, gerçel sayılar kümesinin alt kümesi olan her sonsuz kümenin, sayılabilir sonsuz bir alt kümesi vardır.*

Bilişsel süreçlerin incelenmesinde RBC soyutlama teorisi kapsamında sunulan epistemik eylemler bağlamında analizler gerçekleştirilmiştir. Diğer yandan imajın duyuşsal boyutunun derinlemesine analizini sağlayabilmek için Selden ve Selden (2007) tarafından ortaya konan duygusal olmayan bilişsel hislerden yararlanılmıştır.

İmajın bileşenleri bağlamında ulaşılan sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

D'nin imajının kişisel bir anlayışa sahip olduğu söylenebilir. Bu karakteristiğin varlığına ilişkin genel göstergeler aşağıdaki gibi sunulabilir.

- ✓ D'nin ispat süreci onun kendi yaklaşımı çerçevesinde şekillenmiştir. Seçtiği kavramlar, oluşturduğu modeller ve kurduğu ilişkiler onun kendi düşünme sürecinin ürünlerdir.
- ✓ D, ispat sürecini gerçekleştirirken dışarıdan (*araştırmacı dâhil*) herhangi bir müdahaleye doğrudan maruz kalmamıştır. Kendi kararlarını vermiş ve bunları uygulamıştır.
- ✓ İspatın sonunda araştırmacıya, bu ispatı daha önce görmediğini açıkça ifade etmiştir.

D'nin imajının varlık karakteristiğine sahip olduğu söylenebilir. Bu alt bileşene ilişkin genel göstergeler aşağıdaki gibi sunulabilir.

- ✓ D, ispata ilişkin tek ve bütün bir imaja sahiptir.
- ✓ Bu süreçte gerçekleştirdiği işlemleri bir bütün olarak zihninde bulundurmaktadır. Bu sayede (gerek gördükçe) sürecin önceki noktaları ile bağlantılar kurabilmiştir. İhtiyaç duydukça önceki düşüncelerini/yaklaşımını gözden geçirebilmiştir.

D'nin imajının mantıksal bağlar içerme karakteristiğine sahip olduğu söylenebilir. Bu alt bileşene ilişkin genel göstergeler aşağıdaki gibi sunulabilir.

- ✓ D, süreç boyunca ön bilgileri arasından pek çok kavramı ve ilişkiyi seçmiştir.
- ✓ Diğer yandan bu yapıları birbirinden ayrık/yalıtılmış bir çerçevede ele almamıştır.
- ✓ Pek çok defa seçtiği yapılar arasında (bir amacı gerçekleşmek üzere) bağlantılar kurmuştur.

D'nin imajının dinamik olma karakteristiğine sahip olduğu da söylenebilir. Bu alt bileşene ilişkin genel göstergeler aşağıdaki gibi sunulabilir.

- ✓ D'nin ispat süreci gelişmemiş bir formdan daha gelişmiş bir forma doğru şekillenmiştir.
- ✓ Başlangıçta okuduğunu anlamakta bile güçlük çekerken ilerleyen aşamalarda karmaşık ilişkiler oluşturabildiği gözlenmiştir.
- ✓ İspat sürecinde her bir aşama, önceki aşamaların bir sonucu olarak gelişim göstermiştir.

- ✓ Yani imajın bir süreci içerisine alacak şekilde geliştiği söylenebilir.

Bu göstergeler göz önünde bulundurularak imajın bilişsel anlayış karakteristiğinin ortaya çıktığı sonucuna ulaşılabilir.

D ispat sürecinde iki temel iç görü anı yaşayarak formal ispata ulaşabilmiştir. Bu iç görü anlarına iki oluşturma (C-) eylemi eşlik etmiştir. Bu özel anlarda, D'nin zihninde yer alan yapıların uygun bir biçimde bir araya geldiği ve bir oluşuma sebebiyet verdiği yorumu yapılabilir.

Diğer yandan ispat sürecinde doğrulamanın gerçekleştiği pek çok noktada, D'nin sezgisel ikna hissine sahip olduğu gözlenmiştir. Bilişsel eylemlere eşlik eden duyuşsal hislerin de D'nin ispat sürecinde önemli etkileri olduğu söylenebilir. O, her bir adımda gerçekleştirdiği eylemlerden emin olarak (*veya olmayarak*) bir sonraki adım için kendisine yön çizmiştir. Özellikle sürecin son adımında, ortaya çıkan kesinlik hissi ile bir tamamlanmışlık duygusuna ulaştığı (*yaptığı açıklamalardan*) anlaşılmıştır. Diğer yandan süreç içerisinde duyuşsal boyutun derinlemesine analizi için duygusal olmayan bilişsel hislere ilişkin göstergeler araştırılmıştır. Bu noktada duyuşsal kesinlik hissine yol açtığı düşünülen veya onunla ilişkili olabilecek hislere odaklanılmıştır. Buna göre D'nin ispat sürecinde farklı noktalarda *bilme hissi*, *haklılık hissi* ve *doğru iz üstünde olma hissi* gibi bilişsel hisleri deneyimlediği gözlenmiştir.

Bu göstergeler dikkate alınarak D'nin imajının duyuşsal bileşenlerinin ortaya çıktığı sonucu yapılabilir. Dolayısı ile Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından ortaya konan tanım çerçevesinde D'nin bir imaja sahip olduğu ve bu imajı da kullanarak formal ispata ulaşabildiği sonucuna ulaşılabilir.

Öneriler

Bu bölümde yapılan çalışmalardan hareketle ulaşılan sonuçlara ilişkin önerilerde bulunulacaktır. Bu öneriler ile öğretimsel düzenlemelere katkı sağlanması ve yeni yapılacak çalışmalara fikir sunulması amaçlanmıştır.

- Bu çalışma 5 haftalık bir gözlem sürecini içerecek şekilde planlanmıştır. Daha uzun süreli gözlemler ile bireylerin sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin genel yaklaşımlarındaki değişimin geniş çerçevede ortaya konması önerilebilir.

- Bu çalışma İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde okuyan ikinci sınıf öğrencilerinin katılımları ile gerçekleştirilmiştir. Farklı bölümlerde ve/veya sınıf düzeyinde öğrenim gören öğrenciler ile çalışmalar yürütülebilir. Bu sayede farklı düzeylerdeki bireylerin sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin genel yaklaşımlarındaki benzerlikler/farklılıklar belirlenebilir.

- Bu çalışma bağlamında, ispat imajının incelenebilmesi için sonsuzluk öğrenme alanı ve bu kapsamda yer alan eşgüçlülük teorisine ilişkin ispatlar kullanılmıştır. Farklı öğrenme alanları üzerinde yapılacak çalışmalar ile ispat imajının bileşenleri ve doğası hakkında fikir sahibi olunabilir. Ayrıca imaja sahip olan ve olmayan bireylerin ispat süreçleri hakkında genel çerçeveler ortaya konabilir.

- Öğretmen adaylarının denkliğe ilişkin genel yaklaşımları incelendiğinde sonsuzluğun sıklıkla bir potansiyel olarak ele alındığı görülmüştür. Diğer bir ifade ile öğretmen adayları sonsuzluğu tek ve bütün bir nesne olarak ele almada güçlük yaşamaktadırlar. Bu durum sonsuzluğa ilişkin gündelik yaşam deneyimlerinin bir sonucu olarak değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının kardinal sayı kavramını anlayabilmeleri için gerçek sonsuzluğa ilişkin anlayışlarının detaylandırılması önerilebilir.

- Öğretmen adaylarının sürecin başında sezgisel yaklaşımı sıklıkla tercih ettikleri görülmüştür. Özellikle *'' Tüm sonsuz kümeler denktir.''* veya *''Sonsuz varsa tektir.''* gibi sözel ifadeler ile aktarılan bu düşüncelerin ısrarcı bir yapı

sergilediği gözlenmiştir. Bireylerin gündelik yaşam deneyimleri ile şekillenen bu sezgisel düşünme biçimlerinin, formal sonsuzluk kavramı ile bir tutarsızlık yarattığı söylenebilir. Bu tutarsızlıklar (*örneğin bütün parçaya denk olamaz*) öğrencilerin sezgisel yaklaşımlarını gidermede bir araç olarak kullanılabilir. Örneğin uzunlukları farklı doğru parçaları üzerinde yer alan noktaların sayısının olabileceğinin (*geometrik olarak*) modellenmesi ile öğretmen adaylarının *parça-bütün* arasındaki varsayımlarının ortadan kaldırılması mümkün olabilir. Bu nedenle sezgisel yaklaşımların, formal sonsuzlukla çelişen yönlerinin öğreticiler tarafından bilinmesi bir gerekliktir.

- Araştırma sürecinin başlangıcından son aşamasına kadar sezgisel yaklaşımların sıklıkla tekrar ettiği görülmüştür. Ancak özellikle son uygulamalarda sezgisel yapılarını kullanan bireylerin sayısında gözle görülür bir azalma olduğu belirlenmiştir. Bu sonuçtan hareketle, sezgisel yaklaşımları azaltabilmek için sonsuzluk ile ilgili iyi yapılandırılmış formal yaşantılar sunulması önerilebilir.

- Yapılan çalışmalarda sezgisel yaklaşımların sıklığının azaldığı gözlense de son çalışmalarda bile bu yaklaşımlarını temel alan bireylere rastlanmıştır. Bu durumdan hareketle sezgisel yapıların ısrarcı (*dirençli*) olduğu sonucuna ulaşılabilir. Öğreticilerin, sezgisel yaklaşımın bu ısrarcı yapısını göz önüne almaları önerilebilir. Yani öğrencilerin düşünme biçimlerinde istenen değişimin sağlanabilmesi için onlara yeterli zaman verilmeli, kısa süreli hedefler ile ısrarcı olunmamalıdır.

- Yapılan bu çalışmada öğretmen adaylarının ‘’∞’’ işaretini bir nesne olarak kullandıkları gözlenmiştir. Yani, öğretmen adayları bu işareti sonsuz elemanlı bir kümenin eleman sayısını gösteren işaret olarak kullanabilmektedirler. Bu işaretin erken yaşlardan itibaren hatalı kullanımı, bireylerde yanılgılara yol açabilmektedir. Dolayısı ile bu işareti kullanmayı gerektiren durumlarda gerekli özen gösterilmelidir. Bu işaretin sayısal bir belirteç olmadığı, *‘’eleman sayısı daima artan’’* bir kümeyi ifade ettiği açıklanmalıdır. Bu işarete ilişkin hatalı anlayışlar özellikle limit konusuna ilişkin yanılgılara sebep olabilmektedir. Bu durum göz önüne alınmalıdır.

- Sonsuzluk kavramı programda pek çok noktada (*doğru, düzlem, devirli ondalık açılım vb.*) vurgulanmasına rağmen özel bir konu içerisinde doğrudan ele alınmamaktadır. Dolayısı ile öğrencilerin sonsuzluğa ilişkin anlayışlarının denetlenebileceği formal bir çerçeve sunulmamıştır. Bu tarz bir çerçevenin (*soyut düşünmenin gelişimi ile birlikte*) ortaokul müfredatından başlanılarak sunulması önerilebilir. Bu sayede bireylerin sonsuzluğa ilişkin anlayışlarının sadece gerçek yaşama dayalı informal deneyimleri çerçevesinde şekillenmesinin önüne geçilebilir.

- Bu çalışma kapsamında D olarak kısaltılan öğretmen adayı, ispat sürecini görsel ve cebirsel temsiller arasında kurduğu ilişki sayesinde tamamlayabilmiştir. Temsiller arsındaki ilişkilendirmenin gücüne diğer pek çok noktada daha rastlanmıştır. Dolayısı ile çoklu temsil modelinin, kullanımı önerilmektedir. Bu modelin, hem ispat sürecinin gelişimine katkı sağlayabileceği hem de özel konuların (*sonsuzluk gibi*) bireylerde anlamlı düzeyde oluşumuna katkı sağlayabileceği söylenebilir. Dolayısı ile eğer mümkün ise farklı temsiller arasında ilişkiler kurulması sağlanmalıdır.

- Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından, imajın varlığından ya da yokluğundan bahsetmek için kriterler sunulmuştur. Ancak ispat imajının bir düzeyinin olup-olmadığı yönünde bir bulgu sunulmamıştır. Yapılacak çalışmalar ile imajın (*eğer varsa*) dereceleri veya düzeyleri tanımlanabilir. Ayrıca yapılabilecek klinik mülakatlar ile imajının değişime ne kadar dirençli olduğu da belirlenebilir.

- Bu çalışmada pek çok noktada bireylerin sahip oldukları kavram yanılgıları nedeni ile ispatları yürütemedikleri gözlenmiştir. Bireylerin ispat becerilerinin istenilen düzeyde gelişimi için Cantor'un Küme Teorisi ile ilgili kavramlar basitten karmaşığa doğru, kavramlar arası ilişkilendirmeye uygun ve dolaysı ile transfer etmeye yardımcı şekilde öğretilmelidir. Örneğin sonsuzluk kavramına geçmeden önce bağıntı, küme ve fonksiyon gibi temel kavramlar bireylerde net olarak oluşturulmalıdır.

- Bireylerin ispatın anlamına ve biçimine yönelik zorluklar yaşadıkları da gözlenmiştir. Pek çok birey düşüncesini ifade edecek uygun bir dil oluşturamamıştır. Ayrıca bazı bireylerin ispat yöntemlerine ilişkin yanlış anlayışlara sahip oldukları da gözlenmiştir. Dolayısı ile ders içerisinde ispat süreçlerine daha fazla yer verilmesi önerilebilir. Bu sayede öğretmen adaylarının ispat sürecinin biçimine ve içeriğine ilişkin belirli yeterlikleri kazanması sağlanabilir.

- Soyut Matematik dersi, adından da anlaşıldığı gibi gündelik hayat modellerinin oluşturulması zor olan ve soyut kavramları içeren bir derstir. Bu nedenle kavramlar arası ilişkilendirme ön plana çıkarılmalı ve ön koşul öğrenmelerin yeni öğrenmelere temel oluşturması önerilebilir.

KAYNAKÇA

Antonini, S. & Mariotti, M.A. (2008), Indirect proof: what is specific to this way of proving? Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 40 (3), pp. 401-412.

Akbulut, K. ve Akgün, L. (2005). Matematik ve Sonsuzluk. Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi. Sayı 11, 548-559.

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünmenin Aşamalarındaki Yaşantılarından Yansımalar. Eğitim ve Bilim,35(156).

Aztekin, S. (2008). Farklı yaş gruplarındaki öğrencilerde yapılanmış sonsuzluk kavramlarının araştırılması. Yayınlanmış Doktora Tezi, Ankara: Gazi Üniversitesi Eğitim Bölümleri Enstitüsü

Bikner-Ahsbahs, A. (2004). Towards the emergence of constructing mathematical meanings. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Pychology of Mathematics Education*. *2*, 119-126.

Bozkuş, F. *Ortaokul Öğrencilerinin Sonsuzluk Kavrayışları*, yayınlanmış yüksek lisans tezi, Bolu : Abant İzzet Baysal Üniversitesi, 2014.

Büyüköztürk, Ş. (2005). Anket geliştirme. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 3(2), 133–151.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak E., Akgün Ö.E., Karadeniz Ş. ve Demirel F. (2013). *Bilimsel Araştırma Yöntemleri* (15.baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Cohen, L., & Manion, L. (1994). Research methods in education (4 ed.). New York: Routledge

Çallıalp, F. (2011). *Örneklerle Soyut Cebir*, İstanbul: Birsen Yayınevi.

Denzin, N. ve Lincoln, Y. (2000). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks: Sage.

Doruk, M. ve Kaplan, A. (2013). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Dizilerin Yakınsaklığı Kavramı Üzerine İspat Değerlendirme Becerileri. Journal of Research in Education and Teaching, Cilt:2 Sayı:1, 231-240.

Dreyfus, T. 2007. Processes of abstraction in context the nested epistemic actions model, Retrieved 10.06.2015 from http://medicina.iztacala.unam.mx/medicina/dreyfus.pdf

Fischbein, E. (2001). "Tacit Models and Infinity" Educational Studies in Mathematics 48: 309-329.

Fischbein, E., D. Tirosh and P. Hess. 1979. *The intuition of infinity.* Educational Studies in Mathematics, 10, 3–40.

Fischbein, E., Tirosh, D. ve Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement?. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(4), 491-512.

Güney, Z. ve Özkoç, M. (2015). *Soyut Matematik*, İzmir: Dinozor Kitapevi

Güven, B. ve Karataş, İ. (2004). Sonsuz kümelerin karşılaştırılması: öğrencilerin kullandığı yöntemler. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 15, 65 -73.

Güven, B., Çelik, D. ve Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. Çağdaş Eğitim Dergisi, 30, 319.

Karataş, Z. (2015). Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri, Manevi Temelli Sosyal Hizmet Araştırmaları Dergisi, Cilt 1, Sayı 1.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes. Research on Collegiate Mathematics Education, Vol. III. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), AMS, 234-283.

Hart, E. W. (1994). Aconceptual Analysis of The Proof-Writing Performance of Expert and Novice Students in Elemantary Group Theory in J.J. Kaput and E. Dubinsky (eds.).

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*, 195–222.

İspat. 14.05.2016 tarihinde http://www.tdk.gov.tr adresinden erişildi.

Karasar, N. , Bilimsel Araştırma Yöntemi, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara 2008.

Kidron, I. & Dreyfus, T. (2014). Proof Image. Educational Studies in Mathematics. November 2014, Volume 87, Issue 3, pp 297-321.

Lee, J. K. (2002). " Philosophical perspectives on proof in mathematics education", Philosophy of Mathematics Education, vol.16, http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome16/docs/lee.pdf (02-Temmuz-2005).

Hacısalihoğlu, H. H., Hacıyev, A., Kalantarov, V. ve Sabuncuoğlu, A. (2009). *Matematik Terimleri Sözlüğü*, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Mamolo, A. M. (2009). Intuitions of "infinite numbers": Infinite magnitude vs. infinite representation. *The Montana Mathematics Enthusiast.*, *6*(3), 305-330.

Maria, K., Thanasia, M., Katerina, K., Constantinos, C. ve George, P. (2009). Teachers' perceptions about infinity: a process or an object?. Proceedings of CERME 6 sunulan bilindiri (28 January- 1 February, Lyon, France, ss.1771-1780).

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). Ortaokul *Matematik Dersi (5,6,7 ve 8.Sınıflar) Öğretim Programı,* Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.

Mcmillan, H. J. (2000). Educational research: fundamentals for the consumer (3rd ed.). New York: Longman.

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E., & Yeşildere, S. (2006). Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri. Kastamonu Eğitim Dergisi. 14(1), 147–160.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. Educational Studies in Mathematics, 27, 249-266.

Monaghan, J. 2001, *Young Peoples' Ideas of Infinity.* Educational Studies in Mathematics, 48, 239–257.

Monaghan, J. (1986). Adolescents' understanding of limits and infinityUnpublished PhD thesis. Mathematical Education Research Centre, Warwick University.

Nesin, A. (2010). *Matematik ve Sonsuz* (4. Baskı). İstanbul: Nesin Yayıncılık

Narlı S. , Narlı P. ,(2012) Sonsuz Sayı Kümeleri Işığında İlköğretim Öğrencilerinin Sonsuzluk Algı ve Yanılgılarının Belirlenmesi, Buca Eğitim Fakültesi Dergisi, Sayı 33, sayfa: 123-137.

Özdemir, H. B. (2000). Matematik öğretimde tanım, terim ve sembollerin önemi, *H.Ü. Fen Bilimleri Eğitimi Kongresi Sempozyumu*, 19–20 Eylül, İzmir, 647–649.

Özmantar, F.(2010). Sonsuzluk Kavramı: Tarihsel Gelişimi, Öğrenci Zorlukları ve Çözüm Önerileri. M.F. Özmantar, E. Bingölbali ve H.Akkoç (eds.). *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* (ss. 151-180) İçinde, (2.Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Patton, M. Q. (2014). *Nitel Araştırma ve Değerlendirme Yöntemleri*, (Çev. M. Bütün, S. B. Demir), Anlara: Pegem Yayınevi.

Powers R A, Craviotto C,Grassl R M (2010).Impact of proof validation on proof writing in abstract algebra, International Journal of Mathematical Education in Science and Techonology,41(4):501-514.

Rota, G.-C. (1997). *Indiscrete thoughts*. Basel: Birkhäuser.

Punch, F. K. (2005). *Sosyal araştırmalara giriş, nitel ve nicel yaklaşımlar*, (çev. D. Bayrak, H.B. Arslan, Z. Akyüz), Ankara: Siyasal Kitapevi.

Sarı, M., Altun, A. ve Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: örnek olay çalışması. Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40(2), 295-319.

Schwarz, B., Dreyfus, T., Hadas, N. ve Hershkowitz, R. (2004). Teacher guidance of knowledge construction. M. J. Hoines ve A.B. Fuglesad, (Ed.), Proceedings of the 28th Conference of the In-ternational Group for the Psychology of Mathematics Education (169-176).

Selden A, & Selden J. (2007). Overcoming students' difficulties in learning to understand and construct proofs. Technical Report. Mathematics Department, Tennessee Technological University. Available from: http://www.math.tntech.edu/techreports/TR_2007_1.pdf">.

Selden, A., McKee, K., & Selden, J. (2010). Affect, behavioural schemas and the proving process. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 199-215.

Shipley, A. J. (1999). An ınvestigation of collage students' understanding of proof construction when doing mathematical analysis proofs. Unpublished doctoral dissertation. University of American, Washington.

Singer, M. ve Voica, C. (2003). *Perception of infinity: does it really help in problem solving*. In Proceedings of the International Conference "The Decidable and the Undecidable in Mathematical Education" sunulan bildiri (Ekim, *Brno, Czech Republic*, ss. 252-256).

Stylianides A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics, *Journal of Research in Mathematics Education*, *38*, 289-321.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. Educational Studies in Mathematics, 72, 237–253.

Tall, D. O. (1980). Mathematical _ntuition, with special reference to limitting processes. Proceedings of PME 4, Berkeley, 170-176.

Tall, D. O. (ed.) 1991. Advanced Mathematical Thinking. Kluwer: Dordrecht.

Tall, D. (1998). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some?, Conference of the University of Chicago School Mathematics Project, August, USA.

Tavşancıl, E. ve Aslan, E. (2001*). İçerik Analizi Ve Uygulama Örnekleri*. İstanbul: Epsilon Yayıncılık.

Tirosh, D. (1985). The intuition of infinity and its relevance for mathematics education. Yayımlanmamış Doktora Tez, İsrail: Tel Aviv Üniversitesi.

Tirosh, D. ve P, Tsamir. (1996). The role of representations in students' intuitive thinking about infinity. *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27(1), 33–40.

Tsamir, P. (2001). WhenThe Same'is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2-3), 289-307.

Türk Dil Kurumu, Ankara: *Türkçe Sözlük*, 1988.

Türnüklü, E. ve Özcan, B. (2014). Öğrencilerin Geometride Bilgiyi Oluşturma Süreci İle Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri Arasındaki İlişki: Örnek Olay. Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, Cilt: 11, Sayı: 27, s: 295 316.

Ünan, Z. ve Doğan, M. Sonlu Ve Sayılabilir Sonsuz Kümeler Ve Sayılamayan Sonsuz Kümelerin Bir Modellemesi. e-Journal of New World Sciences Academy 2011, Volume: 6, Number: 2, Article Number: 1C0418

Van der Waerden, B. L. (1954). Einfall und Überlegung: Drei kleine Beiträge zur Psychologie des mathematischen Denkens [Idea and reflection: Three small contributions to the psychology of mathematical thinking]. Basel, Switzerland: Birkhäuser.

Weber, K. (2001). Student Difficulty in Constructing Proof: The Need for Strategic Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101–119.

Weber, K. (2005). Problem solving, proving and learning: the relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof contruction, Journal of Mathematical Behaviour, 24, 351-360.

Yıldırım, C. (2000). Matematiksel Düşünme, 3. Basım, Remzi Kitapevi, İstanbul.

Yıldırım A. ve Şimşek H. (2013). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zenon'un Paradoksları. (23 Aralık 2014*). Wikipedia, The Free Encyclopedia* içinde. 10 Mart 2016 tarihinde https://tr.wikipedia.org/wiki/Zenon%27un_paradokslar%C4%B1 adresinden erişildi.

EKLER

EK-1

Genel Uygulama Formu – I

Adı : Soyadı : Grubu :

Soru 1 : Bir küme öz alt kümesine denk olabilir mi? Açıklayınız.

Soru 2 : Z tam sayılar kümesi {51,52,…,n,…} kümesine denk midir? Gösteriniz.

Soru 3 : Z tam sayılar kümesi P asal sayılar kümesine denk midir? Gösteriniz.

EK-2

Genel Uygulama Formu – II

Adı : Soyadı : Grubu :

Soru 1 : N doğal sayılar kümesi , Z^2 kümesine denk midir? Açıklayınız.

Soru 2 : R , gerçel sayılar kümesi (0,1) aralığına denk midir?

EK-3

Genel Uygulama Formu – III

Adı : Soyadı : Grubu :

Soru 1 : R , gerçel sayılar kümesi [0,1] aralığına denk midir?

Soru 2 : N doğal sayılar kümesi R gerçel sayılar kümesine denk midir? Açıklayınız.

EK-4

Genel Uygulama Formu – IV

Adı : Soyadı : Grubu :

Soru 1: IR reel sayılar kümesinin alt kümesi olan ve boştan farklı herhangi bir açık aralığı kapsayan her küme IR reel sayılar kümesine denktir? İspatlayınız.

Soru 2: Sayılabilir sonsuz tane sayılabilir sonsuz kümenin birleşimi sayılabilir sonsuzdur, Gösteriniz

Soru 3: Q rasyonel sayılar kümesi sayılabilir midir? İspatlayınız

EK-5

Bireysel Uygulama Formu – I

Adı : Soyadı : Grubu :

Soru: Her sonsuz küme birbirine denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirlerine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.

EK-6

Bireysel Uygulama Formu – II

Adı : Soyadı : Grubu :

Aşağıdaki teoremi ispatlayınız.

Teorem: R, gerçel sayılar kümesi boştan farklı herhangi bir açık aralığı kapsayan her alt kümesine denktir.

EK-7

Bireysel Uygulama Formu – III

Adı : Soyadı : Grubu :

Teorem: R'nin alt kümesi olan her sonsuz kümenin sayılabilir sonsuz bir alt kümesi vardır. İspatlayın.

EK-8

Bireysel Uygulama Formu – IV

Adı : Soyadı : Grubu:

Soru: Q rasyonel sayılar kümesi sayılabilir midir? Cevabınızı ispatlayınız

T.C.
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
İlköğretim Anabilim Dalı Başkanlığı

SAYI : 58329303-302.08.01/151 16 /02/2016
KONU : Tez Uygulaması

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

İlgi: 15/02/2016 tarih ve 67493393-302.08.01-607 sayılı yazınız

Enstitümüz İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı yüksek lisans programı 2014950007 numaralı öğrencisi Ozan PALA'nın "İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sonsuz Kümelerin Denkliği Konusundaki Kanıt İmajlarının İncelenmesi" konulu tez çalışması kapsamında Anabilim Dalımız Matematik Eğitimi Bilim Dalında öğrenim gören öğrencilere tez uygulama istemi, uygulamayı bizzat kendisinin yapması ve uygulama yapacağı dersten önce dersi yürüten öğretim üyesinden önceden izin alması şartıyla Anabilim Dalı Başkanlığınca uygun bulunmuştur.

Bilgilerinizi ve gereğini arz ederim.

Prof.Dr.İlhan SILAY
İlköğretim Anabilim Dalı Başkanı

Uğur Mumcu Caddesi 135 Sokak No.5 35150 Buca / İZMİR Tel.: 0- 232 - 4204882-4204883-4204884-4204885-4204886-4204887 – 4204598 – 4207602 – 4400808 – 4409609 – 4409611 – 4409612 - 4409613 – 4409615 – 4201472 Fax.: 0-232-4204895 – 0-232-4409610 web: www.deu.edu.tr/egitim e-mail: egitim@deu.edu.tr