T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

İRRASYONEL SAYI KAVRAMINA İLİŞKİN YAŞANILAN GÜÇLÜKLERİN İNCELENMESİ

Yusuf Emre ERCİRE

İzmir
2014

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

İRRASYONEL SAYI KAVRAMINA İLİŞKİN YAŞANILAN GÜÇLÜKLERİN İNCELENMESİ

Yusuf Emre ERCİRE

Danışman
Doç. Dr. Serkan NARLI

İzmir
2014

YEMİN

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum "İrrasyonel Sayı Kavramına İlişkin Yaşanılan Güçlüklerin İncelenmesi" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurulmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynak dizininde gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara ait atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

14/07/2014

Yusuf Emre ERCİRE

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İşbu çalışma, jürimiz tarafından İlköğretim Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Eğitimi Programında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan :Doç. Dr. Serkan Narlı

Üye : Doç. Dr. Cenk KEŞAN

Üye : Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL

Onay
Yukarıda imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

14/07/2014

Doç. Dr. Ali Günay BALIM
Enstitü Müdürü

T.C
YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
ULUSAL TEZ MERKEZİ

TEZ VERİ GİRİŞİ VE YAYIMLAMA İZİN FORMU

Referans No	10044793
Yazar Adı / Soyadı	YUSUF EMRE ERCİRE
Uyruğu / T.C.Kimlik No	TÜRKİYE / 45541420870
Telefon	554372155
E-Posta	yusuferc@gmail.com
Tezin Dili	Türkçe
Tezin Özgün Adı	İRRASYONEL SAYI KAVRAMINA İLİŞKİN YAŞANILAN GÜÇLÜKLERİN İNCELENMESİ
Tezin Tercümesi	INVESTIGATION OF DIFFICULTIES REGARDING THE CONCEPT OF IRRATIONAL NUMBER
Konu	Eğitim ve Öğretim = Education and Training
Üniversite	Dokuz Eylül Üniversitesi
Enstitü / Hastane	Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Bölüm	İlköğretim Bölümü
Anabilim Dalı	İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı
Bilim Dalı	İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı
Tez Türü	Yüksek Lisans
Yılı	2014
Sayfa	166
Tez Danışmanları	DOÇ. DR. SERKAN NARLI 18353521738
Dizin Terimleri	
Önerilen Dizin Terimleri	Matematik Eğitimi=Mathematics Education, Öğrenme Güçlükleri=Learning Difficulties, İrrasyonel Sayılar=Irrational Numbers, Kavram Tanımı ve Kavram İmgesi=Concept Definition and Concept Image, Procept=Procept, APOS Teorisi=APOS Theory
Kısıtlama	6 ay süre ile kısıtlı

Tezimin,Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi Veri Tabanında arşivlenmesine izin veriyorum. Ancak internet üzerinden tam metin açık erişime sunulmasının 15.01.2015 tarihine kadar ertelenmesini talep ediyorum. Bu tarihten sonra tezimin, bilimsel araştırma hizmetine sunulması amacı ile Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi tarafından internet üzerinden tam metin erişime açılmasına izin veriyorum.
NOT: Erteleme süresi formun imzalandığı tarihten itibaren en fazla 3 (üç) yıldır.

15.07.2014

İmza:.....

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın hazırlanmasında değerli düşüncelerini ve yardımlarını esirgemeyen başta danışman hocam Sayın Doç. Dr. Serkan NARLI olmak üzere Dokuz Eylül Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği anabilim dalındaki tüm hocalarıma içten şükranlarımı sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim süresince araştırmalarımda ve bilimsel etkinliklere katılımımda bana maddi olarak destek olan TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Dairesi Başkanlığı'na teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana anlayış gösteren Kargın Ortaokulu'ndaki idarecilerime, İzmir Kız Lisesi'nde, Kozağaç Ortaokulu'nda ve 75.Yıl Ortaokulu'nda uygulamalarım için yardımlarını esirgemeyen meslektaşlarıma ve içten bir şekilde sorularımı yanıtlayan öğrencilerimize teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca aldığım kararlarda yanımda olan aileme sonsuz saygı ve sevgilerimi sunarım.

Yusuf Emre ERCİRE

Temmuz 2014

İÇİNDEKİLER

Yemin Metni i
Tutanak ii
Yüksek Öğretim Kurulu Dökümantasyon Merkezi Tez Veri Formu iii
Teşekkür iv
İçindekiler v
Tablo Listesi ix
Özet xii
Abstract xiii

BÖLÜM I
GİRİŞ 1
Problem Durumu 1
Öğrenme Güçlükleri 4
APOS Teorisi 6
Nesne-Süreç İkiliği ve Procept Kavramı 8
Kavram Tanımı – Kavram İmgesi 8
İrrasyonel Sayı Kavramı 9
Amaç ve Önem 11
Problem Cümlesi 13
Alt Problemler 13
Sayıltılar 14
Sınırlılıklar 14
Tanımlar 14
Kısaltmalar 15

BÖLÜM II
İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR 16

BÖLÜM III

YÖNTEM 21

Araştırma Modeli 21

Araştırma Grubu 22

Veri Toplama Araçları 23

İrrasyonel Sayı Kavram Testi 23

Yarı Yapılandırılmış Görüşmeler 23

Veri Çözümleme Teknikleri 24

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUM 26

Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayı Kavramına İlişkin Güçlükleri 26

Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Sayı Kümelerini Tanımlamalarıyla İlgili Güçlükleri 26

Sekizinci Sınıf Sayı Kümelerinin Birbirleriyle Olan İlişkilerine Yönelik Güçlükleri 35

Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Verilen Bir Sayıyı Sınıflamayla İlgili Güçlükleri 40

Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin π Sayısının Değerine İlişkin Algıları 47

Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayıların Ondalık ve Köklü Gösterimine İlişkin Algıları 48

Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayıların ve Rasyonel Sayıların Yoğunluğuna İlişkin Algıları 50

Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin İki İrrasyonel Sayının Toplanması ve Çarpılması ile İlgili Güçlükleri 58

Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayı Kavramına İlişkin Güçlükleri 62

Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Sayı Kümelerini Tanımlamalarıyla İlgili Güçlükleri 63

Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Sayı Kümelerinin Birbirleriyle Olan İlişkilerine Yönelik Güçlükleri 70

Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Verilen Bir Sayıyı Sınıflamayla İlgili Güçlükleri 74

Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin π Sayısının Değerine İlişkin Algıları 80

Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayıların Ondalık ve Köklü Gösterimine İlişkin Algıları 82
Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayıların ve Rasyonel Sayıların Yoğunluğuna İlişkin Algıları 84
Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin İki İrrasyonel Sayının Toplanması ve Çarpılması ile İlgili Güçlükleri 89
Sekizinci ve Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Öğrenme Güçlüklerinin Karşılaştırılması 94
Sekizinci ve Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Sayı Kümelerini Tanımlamayla İlgili Güçlüklerinin Karşılaştırılması 94
Sekizinci Sınıf ve Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Sayı Kümelerinin Birbirleriyle Olan İlişkilerine Yönelik Güçlüklerinin Karşılaştırılması 96
Sekizinci Sınıf ve Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Verilen Bir Sayıyı Sınıflamayla İlgili Güçlüklerinin Karşılaştırılması 97
Sekizinci ve Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin π Sayısının Değerine İlişkin Algılarının Karşılaştırılması 99
Sekizinci ve Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayıların Ondalık ve Köklü Gösterimine İlişkin Algılarının Karşılaştırılması 99
Sekizinci ve Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayıların ve Rasyonel Sayıların Yoğunluğuna İlişkin Algılarının Karşılaştırılması 100
Sekizinci ve Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin İki İrrasyonel Sayının Toplanması ve Çarpılması ile İlgili Güçlüklerinin Karşılaştırılması 102
Öğrencilerin İrrasyonel Sayılara İlişkin Algıları ve Güçlüklerine Yönelik Öğretmen Görüşleri 103
Öğrencilerin Sayıları Tanımlamalarıyla İlgili Güçlüklerine Yönelik Öğretmen Görüşleri 103
Öğrencilerin Sayı Kümelerinin Birbirleriyle Olan İlişkilerine Yönelik Güçlükleriyle İlgili Öğretmen Görüşleri 109
Öğrencilerin Verilen Bir Sayıyı Sınıflamaya İlişkin Güçlüklerine Yönelik Öğretmen Görüşleri 111
Öğrencilerin π Sayısının Değerine İlişkin Algılarına Yönelik Öğretmen Görüşleri 114
Öğrencilerin İrrasyonel Sayıların Ondalık ve Köklü Gösterimine İlişkin Algılarına Yönelik Öğretmen Görüşleri 115

Öğrencilerin İrrasyonel Sayıların ve Rasyonel Sayıların Yoğunluğuna İlişkin Algılarına Yönelik Öğretmen Görüşleri 116
Öğrencilerin İki İrrasyonel Sayının Toplanması ve Çarpılmasına İlişkin Algılarına Yönelik Öğretmen Görüşleri 120

BÖLÜM V
SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER 122
Sonuç ve Tartışma 122
Öneriler 129
KAYNAKÇA 133
EKLER 141
EK1 142
EK2 146
EK3 147
EK4 150

TABLO LİSTESİ

Tablo 1 "Rasyonel Sayı Denildiğinde Aklınıza Neler Gelmektedir?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtları (8.Sınıf) 27

Tablo 2 Rasyonel Sayının Tanımı ile İlgili Verilen Yanıtlar (8.Sınıf) 28

Tablo 3 Öğrencilerin Vermiş Oldukları Rasyonel Sayı Örnekleri (8.Sınıf) 29

Tablo 4 İrrasyonel Sayı Denildiğinde Öğrencilerin Aklına Gelen Kavramlar (8.Sınıf) 30

Tablo 5 İrrasyonel Sayının Tanımı ile İlgili Verilen Yanıtlar (8.Sınıf) 31

Tablo 6 Öğrencilerin Vermiş Oldukları İrrasyonel Sayı Örnekleri (8.Sınıf) 32

Tablo 7 Gerçek Sayı Tanımı ile İlgili Verilen Yanıtlar (8.Sınıf) 34

Tablo 8 Öğrencilerin Vermiş Oldukları Gerçek Sayı Örnekleri (8.Sınıf) 35

Tablo 9 "Hem İrrasyonel Hem de Rasyonel Olan Sayı Var mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf) 36

Tablo 10 "Rasyonel Sayıların Tamamı Gerçek Sayı mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf) 37

Tablo 11 "Her İrrasyonel Sayı Gerçek Sayı mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf) 38

Tablo 12 Venn Şemasına Sayı Kümelerini Yerleştirmede Yapılan Hata Sayısına Göre Öğrenci Dağılımı (8.Sınıf) 40

Tablo 13 Verilen Sayıların Sınıflandırılmalarını Gösteren Frekans ve Yüzde Tablosu (8.Sınıf) 41

Tablo 14 0,123123123... ve 0,123456... Sayılarının Sınıflandırılmasına İlişkin Soruda Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf) 45

Tablo 15 "0,123123123... ve 0,123456789... Sayıları İrrasyonel midir?" Sorusuna Verilen Öğrenci Yanıtlarının Birlikte Değerlendirilmesi (8.Sınıf) 46

Tablo 16 Π Sayısının Değerine İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf) 47

Tablo 17 "İrrasyonel Sayıların Tamamı Ondalık Biçimde Yazılabilir mi?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf) 48

Tablo 18 "Köklü Sayıların Tamamı İrrasyonel Sayı Mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf) 49

Tablo 19 "Hangisinden Daha Fazla Vardır, Rasyonel Sayı mı İrrasyonel Sayı mı?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf) 50

Tablo 20 "İki İrrasyonel Sayı Arasında Her Zaman Bir Rasyonel Sayı Var Mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf) 52
Tablo 21 "İki İrrasyonel Sayı Arasında Her Zaman Bir İrrasyonel Sayı Var Mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf) 53
Tablo 22 Vamvakoussi ve Vosniadou (2004) Tarafından Kullanılan Kategoriler 54
Tablo 23 İrrasyonel Sayıların Yoğunluğuna İlişkin Kategoriler 55
Tablo 24 Öğrencilerin İrrasyonel Sayıların Yoğunluğuna İlişkin Kategorilere Göre Dağılımı (8.Sınıf) 56
Tablo 25 "İki İrrasyonel Sayının Toplamı Rasyonel Sayı Olabilir Mi?" Sorusuna Öğrencilerin Verdiği Yanıtların Dağılımı (8.Sınıf) 58
Tablo 26 "İki İrrasyonel Sayının Çarpımı Rasyonel Sayı Olabilir Mi?" Sorusuna Öğrencilerin Verdiği Yanıtların Dağılımı (8.Sınıf) 60
Tablo 27 Ondalık ve Köklü Gösterimli İki Sayının Toplanması veya Çarpılmasıyla İlgili Öğrencilerin Verdiği Yanıtların Dağılımı (8.Sınıf) 61
Tablo 28 "Rasyonel Sayı Denildiğinde Aklınıza Neler Gelmektedir?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtları (9.Sınıf)..... 63
Tablo 29 Rasyonel Sayının Tanımı ile İlgili Verilen Yanıtlar (9.Sınıf) 64
Tablo 30 Öğrencilerin Vermiş Oldukları Rasyonel Sayı Örnekleri (9.Sınıf) 65
Tablo 31 İrrasyonel Sayı Denildiğinde Öğrencilerin Aklına Gelen Kavramlar (9.Sınıf) 66
Tablo 32 İrrasyonel Sayının Tanımı ile İlgili Verilen Yanıtlar (9.Sınıf) 67
Tablo 33 Öğrencilerin Vermiş Oldukları İrrasyonel Sayı Örnekleri (9.Sınıf) 68
Tablo 34 Gerçek Sayı Tanımı ile İlgili Verilen Yanıtlar (9.Sınıf) 69
Tablo 35 Öğrencilerin Vermiş Oldukları Gerçek Sayı Örnekleri (9.Sınıf) 70
Tablo 36 "Hem İrrasyonel Hem de Rasyonel Olan Sayı Var mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf) 71
Tablo 37 "Rasyonel Sayıların Tamamı Gerçek Sayı mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf) 72
Tablo 38 "Her İrrasyonel Sayı Gerçek Sayı mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı 73
Tablo 39 Venn Şemasına Sayı Kümelerini Yerleştirmede Yapılan Hata Sayısına Göre Öğrenci Dağılımı (9.Sınıf) 74
Tablo 40 Verilen Sayıların Sınıflandırılmalarını Gösteren Frekans ve Yüzde Tablosu (9.Sınıf)..... 74

Tablo 41 0,123123123… ve 0,123456… Sayılarının Sınıflandırılmasına İlişkin Soruda Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)..... 79
Tablo 42 "0,123123123… ve 0,123456789… Sayıları İrrasyonel midir?" Sorusuna Verilen Öğrenci Yanıtlarının Birlikte Değerlendirilmesi (9.Sınıf)..... 80
Tablo 43 Π Sayısının Değerine İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)..... 81
Tablo 44 "İrrasyonel Sayıların Tamamı Ondalık Biçimde Yazılabilir mi?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)..... 82
Tablo 45 "Köklü Sayıların Tamamı İrrasyonel Sayı mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)..... 83
Tablo 46 "Hangisinden Daha Fazla Vardır, Rasyonel Sayı mı İrrasyonel Sayı mı?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)..... 84
Tablo 47 "İki İrrasyonel Sayı Arasında Her Zaman Bir Rasyonel Sayı Var mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)..... 86
Tablo 48 "İki İrrasyonel Sayı Arasında Her Zaman Bir İrrasyonel Sayı Var mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)..... 86
Tablo 49 Öğrencilerin İrrasyonel Sayıların Yoğunluğuna İlişkin Kategorilere Göre Dağılımı (9.Sınıf)..... 88
Tablo 50 "İki İrrasyonel Sayının Toplamı Rasyonel Sayı Olabilir mi?" Sorusuna Öğrencilerin Verdiği Yanıtların Dağılımı (9.Sınıf)..... 90
Tablo 51 "İki İrrasyonel Sayının Çarpımı Rasyonel Sayı Olabilir mi?" Sorusuna Öğrencilerin Verdiği Yanıtların Dağılımı..... 91
Tablo 52 Ondalık ve Köklü Gösterimli İki Sayının Toplanması veya Çarpılmasıyla İlgili Öğrencilerin Verdiği Yanıtların Dağılımı (9.Sınıf)..... 92

ÖZET

İrrasyonel Sayı Kavramına İlişkin Yaşanılan Güçlüklerin İncelenmesi

Yusuf Emre ERCİRE

Bu çalışmada 8.sınıf ve 9. Sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayılara ilişkin yaşadığı güçlüklerin belirlenmesi amaçlanmıştır

Çalışma betimsel türde ve nitel bir çalışmadır. Buca Kozağaç Ortaokulundan ve Dokuz Eylül Üniversitesi 75. Yıl Ortaokulundan 58 öğrenciye ve İzmir Kız Lisesi'nden 50 öğrenciye "İrrasyonel Sayı Kavram Testi" uygulanmıştır. Toplanan verilerin analizi sonrası bu öğrencilerden bazılarıyla yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Öğrencilerin irrasyonel sayılara ilişkin yaşadığı güçlükleri öğretmenler açısından değerlendirmek adına 8.sınıf ve 9. sınıfta derse giren 5 tane öğretmenle de yarı yapılandırılmış görüşme gerçekleştirilmiştir.

Veriler; Tall ve Vinner'ın kavram tanımı-kavram imgesi teorik çatısıyla, Gray ve Tall'un nesne-süreç ikiliği çatısıyla ve Dubinsky'nin APOS teorik çatısıyla analiz edilmiştir.

Öğrencilerin irrasyonel sayı ile ilgili kareköklü ifade kavram imgesinin ağır bastığı görülmüştür. Ayrıca sayı kümelerinin birbirleriyle olan ilişkisini anlamada, verilen bir sayının irrasyonel sayı olup olmadığına karar vermede, π sayısını nesneleştirmede, sayıların yoğunluklarını kavramada ve çoklu temsillerinde güçlükler yaşandığı görülmüştür. İrrasyonel sayıların toplanması ve çarpılması sürecinde öğrencilerin birçoğunun eylem aşamasında kaldığı belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: *İrrasyonel sayı, güçlükler, kavram tanımı ve kavram imgesi, procept, APOS Teorisi, matematik eğitimi*

ABSTRACT

Investigation of Difficulties Regarding the Concept of Irrational Number

Yusuf Emre ERCİRE

The aim of this study is to determine the difficulties of 8th and 9th grade students related to the irrational numbers.

This study is a descriptive and qualitative study. "Irrational Number Concept Test" was applied to 50 students from Izmir Girls High School and 58 students from Buca Kozağaç Secondary School and Dokuz Eylül University 75th Year Secondary School. Semi-structured interviews were conducted with some of these students after the analysis of the data collected. In order to evaluate the difficulties of students related to irrational numbers in terms of teachers, semi-structured interviews were conducted with 5 teachers teaching 8th and 9th grade students, as well.

Data was analyzed with Tall ve Vinner's concept definition-concept image theoretical framework, Gray ve Tall's object-process duality framework and Dubinsky's APOS theoretical framework.

It is observed that expression with square root concept image related to irrational numbers overweigh with the students. It is also observed that students have difficulties in understanding the relationship between the number sets, deciding whether a given number is irrational or not, objectifying the number π, comprehending the intensity of the numbers and in multiple representations. Many students were determined to stay in action stage in the process of addition and multiplication of irrational numbers.

Keywords: Irrational number, difficulties, concept definition and concept image, procept, APOS theory, mathematics education

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu bölümde araştırmanın problem durumuna, ilgili alıştırmalara, problem cümlesine, alt problemlere, sayıltılara, sınırlılıklara, araştırmanın amacı ve önemine yer verilmektedir.

1.1. Problem Durumu

"Matematik nedir?" diye sorulduğunda yanıt vermek de güçlük yaşayabiliriz. Bunun nedeni matematiğin hemen hemen her alanda kullanılıyor olması ve çok farklı tanımlara sahip olması olabilir.

Türk Dil Kurumu sözlüğünde matematik "Aritmetik, cebir, geometri gibi sayı ve ölçü temeline dayanarak niceliklerin özelliklerini inceleyen bilimlerin ortak adı" şeklinde ifade edilmektedir (TDK, 2013). Tepedenlioğlu (2007)'e göre matematik, nesnel gerçekliği daha iyi kavramak, onu biçimlendirmek için soyutladığı bazı kavramlar ve bu kavramlar arasındaki ilişkilerle uğraşan bilim dalıdır. Karaçay (1985) insanoğlunun, on binlerce yıl süre gelen doğaya egemen olma çabasında değerli bilgiler ürettiğini, yeni bilgilerin üretilmesi, elde edilen bilgilerin açıklanması denetlenmesi ve sonraki kuşaklara aktarılmasında güvenilir bir araca gereksinim duyduğunu ve bu aracın matematik olduğunu belirtmiştir. (Kiriş, 2008)

Matematik; örüntülerin ve düzenlerin bilimidir. Bir başka deyişle matematik sayı, şekil, uzay, büyüklük ve bunlar arasındaki ilişkilerin bilimidir. Matematik, aynı zamanda sembol ve şekiller üzerine kurulmuş evrensel bir dildir. Matematik; bilgiyi işlemeyi (düzenleme, analiz etme, yorumlama ve paylaşma) üretmeyi, tahminlerde bulunmayı ve bu dili kullanarak problem çözmeyi içerir (Matematik Öğretim Programı, 2006)

Matematik, somut ve soyut olmak üzere iki şekilde karşımıza çıkmaktadır. Somut matematik (Faydacıl Matematik, Sosyal değer Taşıyan Matematik), pratik hesaplamalar, problem çözme ve ölçme yaparken kullanılır. Soyut Matematik (Pür Matematik), teorem ispatı,sayı sistemlerinin kurulması, yeni matematik yapılarının yaratılması ve bunların iç dinamiğinin açıklanmasını kapsayan matematiğin kendi iç tartışmalarının yer aldığı bir matematik türüdür (Kiriş, 2008).

Somut matematiğin mühendisliklerde, tıpta, endüstride, bankacılıkta, ekonomide, astronomide ve daha birçok alanda yararları inkar edilemez bir gerçektir. Somut matematik farklı alanlarda yarar sağlarken ve ortak bir dil oluştururken bu dilin kendi içinde gelişmesi de soyut matematiğin kapsamındadır. Somut ya da soyut matematik eğitiminin önemi işte bu noktada ortaya çıkmaktadır.

Baki'ye (1996) göre; matematiğin pozitif bilime sağladığı katkılar göz ardı edilemez bir gerçektir. Zaten matematik eğitiminin amacı, toplumdaki büyük bir kitleyi matematik yönünden eğiterek sanayinin, teknolojinin ve günlük hayattaki diğer alanların ihtiyaç duyduğu elemanları yetiştirmek olarak ifade edilmektedir. Matematik eğitiminin diğer amacı ise akademik matematikte çalışacak matematikçileri küçük yaşlarda yetiştirerek hazırlamaktır. Matematik eğitimi sonunda insanların matematikçi olmaları beklenmiyor. İnsanlardan beklenen, matematikte okuryazar olmalarıdır. Okul matematiği bütün öğrencilerin keşfetme, bulma, karar verme, mantıksal çıkarımda bulunabilme, birçok matematiksel metotları

ve yöntemleri etkili bir biçimde kullanarak problem çözme becerilerini geliştirmelerini amaçlamaktadır (Çetin, 2009).

Matematik eğitiminin amacı, bireylerin günlük hayatlarında karşılarına çıkabilecek problemlerini çözmelerinde yardımcı olacak, akıl yürütme yoluyla her türlü problemlerinde neden-sonuç ilişkilerini açığa çıkarabilen yani eleştirel düşünebilen ve bunları yaparken kullanılacak matematiksel kavramları, işlemleri ve bunların arasındaki bağı kuran bireyler olarak yetişmelerini sağlayacak becerileri kazanmalarına yardımcı olmaktır (Yazıcı, 2004). Bu becerilere sahip olan bireyler yetiştirmek ancak uygun bir matematik öğretimi ile mümkündür.

Matematiğin yapısına uygun bir öğretim şu üç amaca yönelik olmalıdır (Walle, 2004; Baykul, 2006'dan alıntı):

1.Öğrencilerin matematikle ilgili kavramları (conceptual knowledge of mathematics) anlamalarına,

2.Matematikle ilgili işlemleri anlamalarına (procedural knowledge of mathematics),

3.Kavramların ve işlemlerin arasındaki bağları (connections of between conceptual and procedural knowledge) kurmalarına yardımcı olmak.

Bu üç amaç, ilişkisel anlama (relational understanding) olarak adlandırılmaktadır. İlişkisel anlama, matematikteki yapıları (kavramları ve bunların öğelerini) anlama, sembollerle ifade etme ve bunun kolaylıklarından yararlanma; matematikteki işlemlerin tekniklerini anlama ve bunları sembolle ifade etme; metotlar, semboller ve kavramlar arasındaki bağıntılar veya ilişkileri kurma olarak açıklanabilir (Baykul, 2006).

Uygun bir matematik öğretimi yapılmasına karşın mutlaka yapılan öğretimin sonucunda eksikler, yanlış anlamalar ve istenmeyen durumlar ortaya çıkacaktır. (Çetin, 2009) Öğrencilerin ilişkisel anlamayı gerçekleştirememelerinin nedeni kavramsal bilgilerinin veya işlemsel bilgilerinin eksikliği ya da bunlar arasındaki ilişkileri kurmada yaşadığı sorunlar olabilir. Önemli olan sorunun nereden kaynakladığını teşhiş etmek ve giderilmesi için uygun bir öğretim ortamı sağlamaktır.

1.1.1. Öğrenme Güçlükleri

Bir davranışın öğrenme olup olmadığı aşağıdaki sorularla anlaşılabilir:

a. Tekrar veya yaşantı yoluyla mı oluşmuştur?

b. Davranışta değişiklik meydana gelmiş midir?

c. Değişiklik oldukça kalıcı mıdır?

Bu sorulardan herhangi birisine hayır cevabı alınıyorsa, o davranış öğrenme değildir (Bacanlı, 2004).

Elbette matematik eğitiminin amacı, bütün öğrencilerin öğrenmeyi en üst düzeyde gerçekleştirmesidir. Fakat bir kaçının bunu gerçekleştirmesine karşın büyük çoğunluğun matematikte güçlük yaşaması yaşamın bir gerçeği olarak görülür (Tall & Razali, 1993; Tatar, 2006'dan alıntı). Ersoy ve Ardahan'a (2003) göre yaşanan bu güçlüklerin belirlenmesi ve giderilmesi, öğrenme sürecinde öğrenciye yardımcı olunması ve rehberlik edilmesi, çağdaş eğitimin gereklerinden olduğu kadar öğretmenin de görevlerindendir.

Öğrenme sürecinde bireyin karşı karşıya geldiği öğrenme güçlükleri; kavram yanılgıları, hatalar ve öğrenme engelleri başlıkları altında toplanabilir. Bu üç kavram çoğu zaman birbirine neden sonuç ilişkisiyle bağlıdır (Kanbolat, 2010).

Temel öğrenim engelleri Brousseau'ya (2002) göre şöyle sınıflanmıştır:

- Ontojenetik Engeller (Ontogenetic Obstacles)
- Öğretimsel/Pedagojik Engeller (Didactical Obstacles)
- Epistemolojik Engeller (Epistemological Obstacles)

Ontojenetik engeller; öğrencilerin olgunluğu ile alakalıdır. Bazı becerileri, bilgileri ve yetenekleri geliştirme ihtimali öğrencilerin zihinsel gelişimine bağlıdır. Bu engeller; çocuk gelişiminin özellikleri ile ilgilidir. Örneğin, orantısal mantık, olasılık fikrini anlamayı gerektirir (Batenero vd, 1994; Kanbolat, 2010'dan alıntı) Öğretimsel engeller; öğretim yöntemleri ve öğrenilen bilginin içeriği ile ilgilidir. Bu nedenle öğretimden kaynaklı engeller, doğru seçilmiş yöntemler ve içerik ile aşılabilir. Epistemolojik engeller ise; öğrenilecek kavramın doğasından gelir. Örneğin; matematiksel bir kavramın gelişiminde bazı aksaklıklar ya da radikal değişimler varsa bu kavramın öğretiminde de epistemolojik engeller ortaya çıkacaktır (Vankus, 2005; Kanbolat, 2010'dan alıntı).

Hata, uygulamadan kaynaklanan yanlış cevaplardır. İşlemsel hata, çözüm sürecinde verilen yanlış cevaplardır. Hem uzman hem de deneyimsiz kişiler tarafından dikkatsizlik sonucu ve nadiren yapılabilir. Kolay bir şekilde ortaya çıkarılır ve hemen düzeltilir. Hatalar, belli kavramsal yapıların oluşmasına sebep olur. Bunlar kavramsal hataların sebeplerini meydana getirir. Kavram yanılgısı ise sistematik kavramsal hatalara sebep olan bilişsel yapının temelindeki inançlar ve esaslardır (Olivier, 1989; Özkaya ve İşleyen, 2012'den alıntı). Kavram yanılgıları rasgele yapılan hatalardan farklı özellikler gösterir. Kişi yaptığı hatayı ufak bir uyarı ile fark edebilir ve düzeltebilir. Ancak belirli bir kavram yanılgısına sahip birey bu sebepten dolayı hata yaptığı zaman ve birisi tarafından uyarıldığı zaman önce kendini savunmaya geçer. Kişiyi tatmin edemediğiniz takdirde bildiğinden vazgeçmez (Cankoy, 2009; Kanbolat, 2010'dan alıntı).

Kavram yanılgılarının belirlenmesinde, öğrencilerden gelen verilerin çeşitli kavramsal teoriler ışığında incelenmesi gereklidir. Matematikte kavram oluşumu ve öğrencilerin sahip olduğu kavram türlerine ait teorilerden bazıları şunlardır:

1-APOS Teorisi

2-Süreç Nesne İkiliği ve Procept Kavramı

3-Kavram Tanımı ve Kavram İmgesi

1.1.1.1. Apos Teorisi

Dubinsky (1992), Piaget'nin Yapılandırmacılık kuramına dayanan Genetik Çözülme Teorisini, öğrencilerin anlamalarına yönelik geliştirerek teorik bir bakış açısı geliştirmiştir (Dubinsky, 1992; Barak, 2007'deki alıntı). Dubinsky ve arkadaşları (1992) matematiksel bilgiyi eylem (action), süreç (process) ve nesne (object) olarak ele almış ve bu üç tür matematiksel bilginin oluşturduğu yapıyı şema (schema) olarak adlandırmıştır. APOS Teorisi ismini eylem, süreç, nesne ve şema sözcüklerinin İngilizce karşılıklarının baş harflerinden alır.

Matematiksel kavram kişi bir nesneyi başka bir nesneye çevirmek için dönüşümlere başvurduğunda şekillenmeye başlar. Dönüşümün ilk basamağı eylemdir. Eylem talimatların her basamağının açıkça belirtildiği ve bunların uygulanmasının gerektiği basamaktır. (Dubinsky vd., 2005) Bir fonksiyonun kuralında bilinmeyen yerine bir sayı koyup sayının değerini bulabilen fakat bunun matematiksel olarak ne anlama geldiğini bilmeyen bir öğrencinin ve bir fonksiyonun bir noktada limitini alırken sonlu sayıda denemeyle onun bir noktaya yaklaştığı sonucuna ulaşan birinin de eylem basamağında olduğu söylenebilir. $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ işleminin sonucu olarak doğrudan katsayıları toplayarak $2\sqrt{2}$ yanıtını verebilen ancak bu sayıları kökten kurtarılmış (ondalık) olarak verince toplama işleminde sonucun yine $2\sqrt{2}$ veya onun ondalık açılımı olacağını anlamlandıramayan bir öğrencinin eylem basamağında kalmış olduğu düşünülebilir.

Bu teoriye göre, yapılan bir eylem (action) tekrarlandığında tanınan bir sürece (process) dönüşmektedir. (Cottril, 2003). Birey tekrar ettikçe ve düşündükçe eylem aşaması boyunca, eylem içselleştirilir ve sürece geçiş sağlanmış olur. Süreç eylemin içselleştirilmesi sonucunda oluşmuş bir zihinsel yapıdır. (Dubinsky vd., 2005) Fonksiyonun değerini bulmanın bir dönüştürme işlemi olduğunu anlayabilen

öğrencinin de fonksiyonun bir noktadaki limitini bulurken sonsuz sayıda verilen yaklaşık değerlerin sonuçlarının belli bir sayıya ulaştığını akıl yürütme sonucunda ortaya koyan öğrencinin de süreç aşamasında olduğu düşünülebilir. $\sqrt{2}$'nin açılımı olan 1,41421… sayısının kendisi ile toplamının 2,8284… sayısı olacağını düşünebilen ancak sayının kendisi ile çarpımının 2'ye eşit olmayıp 2'ye yakın bir değer olacağını düşünen bir öğrencinin eylem aşamasından süreç aşamasına geçtiği yorumu yapılabilir.

Süreç ise daha sonra şemaya (schema) dâhil olarak zihinsel bir nesne (object) olarak saklanmaktadır (Cottril, 2003). Eğer birey süreci bir bütün olarak kavrarsa, dönüşümlerin bu bütün parçalar üzerinde de uygulandığını fark eder ve bu tip dönüşümler inşa edebilirse (açıkça ya da zihninde), bu birey süreci bilişsel nesneye kapsüllemiştir, diyebiliriz. (Dubinsky vd., 2005) Fonksiyon kavramını nesnelleştiren bir öğrencinin fonksiyonlarda toplama, çıkarma bileşke alma gibi işlemleri yapabileceği, limit kavramını nesnelleştiren bir öğrencinin $\lim_{x\to a} f(x)$ ifadesini bir bütün olarak algılayıp sonucunu doğrudan kestirebileceği ve $\sqrt{2}$ sayısını nesnelleştiren bir öğrencinin kök alma süreci sonucunda ortaya çıkan 1,41421… sayısını da bir bütün olarak algılayıp bu sayının kendisi ile toplamının $2\sqrt{2}$ 'ye bu iki sayının çarpımının ise 2'ye tam olarak eşit olacağını söyleyebileceği düşünülebilir.

Şemanın oluşması için ise işlem, süreç ve nesnelerin bir arada bulunabilmesi gerekmektedir. (Birinci, 2010) Matematiksel bir konu bazen birden fazla eylem, süreç ve nesne aşama gerektirebilir. Bu durumlarda bunların uyum içinde kullanılacağı bir çatıya ihtiyaç vardır. İşte bu çatıya (iskelet) şema denir. Şema, bireye bir matematiksel problem durumunda hangi yapı gerekliyse onu uygun bir biçimde kullanılmasını sağlar. (Dubinsky vd., 2005)

1.1.1.2. Nesne-Süreç İkiliği ve Procept Kavramı

Apos Teorisinde olduğu gibi sürecin nesne olarak saklanmasını açıklayan bir diğer kavram da procept'tir. Bu kavram, process ve concept kelimelerinin birleşmesi ile oluşup hem bir süreci hem bir kavramı ifade etmektedir. (Gray ve Tall, 1991) Sfard (1989)'un "Herhangi bir şey aynı zamanda hem süreç hem de nesne nasıl olabilir?" sorusu zor bir zihinsel aktivite olarak görülmektedir (Gray & Tall, 1991). Tall ve Gray (1991)'in procept kavramıyla bahsettiği hem işlemin sonucunun, hem de işlemin aynı şekilde gösterilmesiyle procept kavramının gerçekleştiğidir. Örneğin 7+5 ifadesinde hem toplama işlemi hem de burada 12 yani iki sayının toplamı ifade edilmektedir. 12/5 ifadesi bir bölme işlemi olarak düşünüldüğünde süreç, fakat bir rasyonel sayı olarak düşünüldüğünde nesne olarak ele alınabilir. Trigonometrik oran olarak SinA bir nesne iken, karşı kenarın uzunluğu/hipotenüs olarak ise bir sürece dönüşür. $\sqrt{2}$ irrasyonel sayısı nesne olarak ele alınabilirken kök alma işlemi baz alındığında 1,41421... şeklinde devam eden ondalık gösterim süreç olarak düşünülebilir. π sayısının 3,1415... sayısına eşit olduğunu düşünen bir öğrenci o sayıyı bir nesne olarak görebiliyor demektir. Ancak çevrenin çapa bölümü olan 3,1415... şeklindeki ifadeyi π sayısına yaklaşık olarak eşit olarak düşünen bir öğrenci süreçten nesneye geçiş yapamamış demektir. Gray ve Tall (1994), π sayısını ondalık açılımı sonsuza kadar hesaplanacak bir süreç ve bir irrasyonel sayı olarak nesne şeklinde belirtmiştir.

1.1.1.3. Kavram Tanımı – Kavram İmgesi

Kavramsal öğrenmeleri konu alan bir diğer kuramsal çatı, Tall ve Vinner (1981) çalışmalarında kavram tanımı ve kavram imgesi ayrımıdır: Kavram tanımı bir matematiksel kavramı tanımlamak için öğretmen/ders notları/ders kitabı tarafından kullanılan kelime ve sembollerin sunulduğu formdur. Kavram imgesi ise bir matematiksel kavramla ilişkili olarak bireyin zihninde oluşan bilişsel yapıların tümüdür. Bu imgeler bireysel olup kişiden kişiye değişmekle birlikte zihinde oluşan kavrama dair çeşitli resimler, kavramın özelliklerine ilişkin algılayışlar, kavramı çağrıştıran çeşitli kelime ve/veya kelime gruplarını içermektedir (Bingolbali ve Monaghan, 2008; Özmantar ve Yeşildere, 2008'den alıntı).

Tall ve Vinner'a göre birey, kavramın formal tanımını çok iyi ifade etse bile, zihninde canlanan imaj, kavramın tanımıyla tutarlı olmayabilir. Bir başka ifade ile bir kavram birey tarafından çok iyi bir şekilde tanımlanmış olsa bile, bu durum bireyin zihninde kavramla ilgili doğru bir imajın var olduğunu garanti etmez. Peki, kavram imajı neden önemlidir? Birey düşünürken ya da problem çözerken kavramın formal tanımı yerine, zihninde yapılandırılmış olan kavram imajlarını kullanır. Bu nedenle bireyin doğru imajlara sahip olması oldukça önemlidir.(Sağlam, Kanadlı ve Uşak, 2012) Öğrenci irrasyonel sayının formal tanımını bilse bile eğer gözünde bir köklü ifade canlandırıyorsa, bu kavram imgesi bazı yanılgılara ve hatalara yol açabilir. İrrasyonel sayı kavramı için öğrencide hem ondalık sayı imgesinin hem de köklü ifade imgesinin var olması yanılgıların ve hataların giderilmesini sağlayacaktır.

1.1.2. İrrasyonel Sayı Kavramı

İrrasyonel sayıların ortaya çıkışı ve kabulü süreci oldukça uzun bir zaman dilimine yayılmıştır. Bunun sebebi irrasyonel sayılara kadar olan diğer sayılara insanların yüklediği ağır kimlikti denilebilir. Sayılar sadece birer nicelik olmasına rağmen insanlar onlardan daha fazlasını bekledi. Örneğin, Pythagorasçılar'a göre; sayılarla evren arasında çok kuvvetli bir bağ vardı. Onlar sayıların ilahi bir gizemi olduğunu düşünüyorlardı. Ta ki dik kenarları birer birim olan bir dik üçgenle karşılaşana kadar. Bu insanlar için basit bir dik üçgen değildi. Bütün yargılarını, inançlarını alt üst eden sayı $\sqrt{2}$; yani karesi 2 olan hiçbir rasyonel sayının bulunmadığını Pythagorasçılar ispatlayacaktı. Ama ispatlayamadılar, hatta sayılandırılamayan bu büyüklüğü 'alagon' olarak adlandırdılar. Yani dile getirilemeyen sayılar. Pythagorasçıların doğal sayılar kümesini alt üst eden bu sırrı okul dışına bile çıkarmadılar. Çünkü bu sayılar bütün felsefelerini çökertmiş olacaktı. (Çimen, 2008; Kanbolat, 2010'dan alıntı). Matematikleri doğruysa dinleri ve inançları yanlıştı, inançları doğruysa matematiklerinde yanlış olmalıydı. Halbuki herhangi iki doğal sayının bölümünün karesinin 2'ye eşit olmasının olanaksızlığını da ispatlayabiliyorlardı. Bu nedenle ilk tepkileri bu sonucu gözden uzak tutmak oldu. (King, 1998)

O dönemde sadece doğal sayılardan ve onların oranlarından ibaret olan sayı sistemi günümüz de negatif sayıları da, irrasyonel dediğimiz 2'nin karekökü gibi sayıları da içermektedir. Bunlardan başka deneyüstü dediğimiz transandantal sayılar ve bütün bunlardan daha gerçek dışı sanal (imaginary) dediğimiz sayılar vardır. (King, 1998)

İrrasyonel sayılar, a ve b tam sayı ve $b\neq0$ olmak şartıyla a/b şeklinde oranlı yazılamayan sayılardır. Rasyonel sayılardan yola çıkarak, "Rasyonel olmayan gerçek sayılara irrasyonel sayılar denir." diyebiliriz. Her bir gerçek sayının gerçel sayı ekseninde bir noktaya geldiğini düşündüğümüzde ondalık gösterimden yola çıkarak, "Ondalık kısmı devretmeyen gerçek sayılara irrasyonel sayılar denir" diyebiliriz. Rasyonel sayılardan yola çıkarak irrasyonel sayılara Dedekind yöntemiyle ulaşabiliriz. Bunun için de Dedekind kesiminin ne olduğunu açıklayalım.: $A,B\neq \emptyset$, $A\cup B=Q$ ve $A\cap B=\emptyset$ olmak üzere $\forall a\in A$ ve $\forall b\in B$ için $a<b$ şartını sağlayan (A,B) sıralı ikilisine bir *Dedekind kesimi* denir. Bir Dedekind kesiminde $\forall a\in A$ ve $\forall b\in B$ için $q\geq a$ ve $q\leq b$ şartını sağlayan $q\in Q$ olması durumu ancak ve ancak A'nın maksimal elemanı veya B'nin minimal elemanı olması ile mümkündür. Bu durumu sağlayan (A,B) kesimine bir *rasyonel kesim* diyoruz. A'nın maksimali veya B'nin minimali olan q sayısı da bize bir *rasyonel sayıyı* ifade ediyor.

Biz her Dedekind kesiminde bir rasyonel sayı elde edemeyebiliriz. $B=\{x\in Q \mid x>0,\ x^2>3\}$ kümesini ele alırsak ve A=Q-B olarak seçersek (A,B) Dedekind kesiminde B kümesinin bir minimal elemanı yoktur. Aynı şekilde A kümesinin de bir maksimal elemanı yoktur. Çünkü $\forall a\in A$'dan büyük en küçük sayı (A kümesinin EKÜS'ü) ve $\forall b\in B$'den küçük en büyük sayı (B kümesinin EBAS'ı) aynı sayıdır ancak bu sayı bir rasyonel sayı değildir. Bu sayı $q^2=3$ şartını sağlayan pozitif q sayısıdır. Bu sayının her epsilon komşuluğunda sonsuz rasyonel sayı vardır. Yukarıdaki gibi oluşan (A,B) Dedekind kesimlerine *irrasyonel kesim* denir. Bu kesimdeki A'nın EKÜS'ü B 'nin EBAS'ı olan q sayısına da *irrasyonel sayı* denir. Rasyonel sayıların bütün kesimlerinin oluşturduğu sayı kümesi *gerçel sayı* kümesidir.

Rasyonel sayılar kümesi ve irrasyonel sayılar kümesi ayrık ve sonsuz elemana sahip iki kümedir. Bu iki kümenin birleşiminden de reel sayı eksenini oluşturan her bir noktaya karşılık gelen sayıların kümesi elde edilmektedir. Bu küme de gerçek sayılar kümesidir. Peki bu gerçek sayı kümesinde hangi elemanlardan daha fazla vardır? Rasyonel sayılardan mı irrasyonel sayılardan mı? Bu soruya ikisinden de sonsuz tane yanıtı vermek normal karşılanabilir. Ancak birebir eşleme yöntemiyle bir kümenin diğer kümeden daha yoğun olduğu görülebilir. Birebir eşleme mantığını sonlu kümelerden örnek vererek açıklayalım: {a,b,c} ve {1,2,3} kümelerini düşünelim. a'yı 1'e, b'yi 2'ye ve c'yi 3'e eşleyerek iki kümenin birebir örten bir fonksiyonla eşlenebileceği görülmektedir. Biz de rasyonel sayıların her bir elemanını irrasyonel sayılarla eşlemeye çalıştığımızda irrasyonel sayılarda açıktı kalan elemanların olduğu bugün matematikte teoremlerle ispatlıdır (Güney, 1993).Ayrıca sayı doğrusunda her iki nokta arasında sonsuz nokta olduğu için her iki sayı arasında da sonsuz sayı mevcuttur. İki irrasyonel sayı arasında sonsuz irrasyonel sayı ve sonsuz rasyonel sayı bulunabilir. Aynı şekilde iki rasyonel sayı arasında da sonsuz irrasyonel sayı ve sonsuz rasyonel sayı bulunabilir.

Yukarıdaki açıklamalar doğrultusunda söz konusu yüksek lisans tezinde irrasyonel sayı kavramına ilişkin güçlükler öğretmen görüşleri de alınarak çeşitli kavramsal teoriler ışığında incelenemiştir.

1.2. Amaç ve Önem

İrrasyonel sayı, matematiğin en temel kavramlarından biridir. Fakat öğrenciler tarafından anlaşılması zor olabilen, öğrenme güçlüklerine, yanılgılara oldukça açık bir kavramdır. 8. sınıfa kadar sayıları rasyonel sayılardan ibaret sanan öğrenciler, 8.sınıfta yer alan kareköklü sayılarla ve "Sayılar ve İşlemler" öğrenme alanında yer alan, "Gerçek sayıları tanır, rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilişkilendirir." kazanımıyla yeni bir sayı kümesiyle tanışır. Bu sayı kümesi tekrar 9.sınıfta "İrrasyonel sayılar ve gerçek sayılar kümesini açıklar." kazanımı ile ele alınmaktadır. İrrasyonel sayıları ve diğer kümelerle olan ilişkisini doğru bir şekilde kavramak

oldukça önemli fakat güçtür. [Fishbein, Jehiam & Cohen (1995), Zazkis & Sirotic (2004, 2007, 2010), Arbour (2012), Kara ve Delice (2012)]

Öğrencilerin matematikteki öğrenme güçlüklerinin bir an önce tespit edilip giderilmesi gerekir (Yudariah & Roselainy, 2001a). Dikici ve İşleyen'e (2004) göre, herhangi bir konuda öğrenme güçlüğü çeken bir öğrencinin daha sonra gelecek konularda başarıya ulaşması zordur. Matematik, konuları güçlü bir sıralı yapıya sahip olduğundan dolayı herhangi bir kavram onun ön şartı durumundaki diğer kavramlar kazandırılmadan tam olarak verilemez (Altun, 1998). İrrasyonel sayı kavramının iyi öğrenilmesi, öğrenme güçlüklerinin tespit edilmesi diğer konular için ön şart durumunda olduğu için oldukça önemlidir (Tatar, Okur ve Tuna; 2008). Dolayısıyla bu araştırmada amacımız 8.sınıf ve 9.sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayı kavramına ilişkin yaşadığı güçlükleri ve bu güçlüklerin nedenlerini incelemektir.

Literatüre bakıldığında ilköğretim düzeyinde irrasyonel sayı kavramına ilişkin araştırmaların yok denecek kadar az olduğu görülmüştür. Araştırmamızda 8.sınıf ve 9.sınıf öğrencilerini ele alarak hem ortaokulda yaşanılan güçlükler incelenmiş hem de bu güçlüklerin 9.sınıfa yansımaları, benzerlik ve farklılıkları belirlenmiştir. Öğrencilerde var olan muhtemel kavram yanılgıları öğrencilerden toplanan yazılı verilerin dışında geçmiş araştırmalarda yer almayan öğretmen görüşlerinden yararlanarak da ortaya konulmuştur. Tek bir kavramsal çatıyla öğrencilerin güçlüklerini incelemek irrasyonel sayıların doğası gereği zor olabilir. Bu nedenle araştırma sonuçları tek bir kavramsal kuram değil farklı kuramlar ışığında incelenmiştir. İrrasyonel sayılara ilişkin öğrencilerden toplanan veriler Dubinsky ve arkadaşlarının (1992) APOS teorisi olarak ele aldığı matematiksel bilginin 3 aşaması: eylem(action), süreç (process), nesne (object) ve bunların oluşturduğu yapı (schema) bağlamında; Tall ve Vinner'ın (1981) kullandığı kavram imgesi ve kavram tanımı ayrımı bağlamında; Gray ve Tall (1991) tarafından ortaya konan process (süreç), conception (kavrama) ve bunların birleşiminden oluşan procept kavramları bağlamında incelenmiştir.

1.3. Problem Cümlesi

Bu çalışmada irrasyonel sayı kavramına ilişkin 8.sınıf ve 9.sınıf öğrencilerinin yaşadığı güçlükler araştırılmıştır. Araştırmanın geçerliğini ve güvenirliğini arttırmak amacıyla sadece bu güçlükleri yaşayan öğrencilere odaklanmak yerine bu süreçte önemli rol oynayan ve sürecin içinde yer alan öğretmenlerin de görüşleri alınmıştır. Araştırmamızın problem ve alt problemleri de buna göre belirlenmiştir.

1.3.1. Problem cümlesi:

İrrasyonel sayı kavramına ilişkin 8.sınıf ve 9.sınıf öğrencilerinin yaşadıkları güçlükler nelerdir?

1.4. Alt Problemler

1. 8.sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayı kavramına ilişkin yaşadıkları güçlükler nelerdir?
2. 9.sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayı kavramına ilişkin yaşadıkları güçlükler nelerdir?
3. İrrasyonel sayı kavramına ilişkin 8. sınıf öğrencilerinin yaşadığı güçlüklerin 9. sınıfa yansımaları, aralarındaki benzerlik ve farklılıkları nelerdir?
4. İrrasyonel sayı kavramının anlaşılmasında öğrencilerin yaşadığı güçlüklere ilişkin öğretmenlerin görüşleri nelerdir?

1.5. Sayıltılar

1. Çalışma grubundaki öğrencilerin kavram testini içtenlikle cevapladıkları,
2. Görüşme yapılan öğretmenlerin ve öğrencilerin içtenlikle ve doğru bir şekilde cevap verdikleri araştırmamızın sayıltıları olarak yer almaktadır.

1.6. Sınırlılıklar

Evren olarak, İzmir ilinde yer alan ortaokul ve lise öğrencilerinin tümü alınmıştır. Ancak örneklemden elde edilecek veriler bu okullardan toplanan bilgilerle sınırlı kalacaktır.

1.7. Tanımlar

1.7.1. Öğrenme :

Öğrenme; tekrarlar ya da yaşantı sonucu meydana gelen, kalıcı davranış değişikliğidir (MEB, 2007).

1.7.2. Öğrenme Güçlüğü:

Öğrenme güçlüğü; çocuğun okuma-yazma, matematik-aritmetik beceriler, konuşma, dinleme, akıl yürütme yeteneğini kazanma ve kullanabilmesinde yaşadığı zorluk olarak tanımlanır (MEB, 2007).

1.7.3. İrrasyonel Sayı:

a, $b \in Z$ ve $b \neq 0$ olmak üzere bir sayının ondalık açılımı a/b şeklinde yazılamıyorsa bu sayılara irrasyonel sayılar denir (Tarhan, 2013).

1.8. Kısaltmalar

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

APOS: Action, Process, Object, Shema (Eylem, Süreç, Nesne, Şema)

BÖLÜM II

İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR

İrrasyonel sayı kavramında yaşanılan güçlüklerle ilgili çeşitli çalışmalar mevcuttur. İrrasyonel sayıların okullarda nasıl öğretildiği ve öğrencilerin ne anladıkları üzerine yazılan araştırmalardan biri olan Fischbein, Jehiam ve Cohen'in (1995) çalışmasında tarihsel ve psikolojik ön bilgilere dayanarak irrasyonel sayıların öğrenilmesinin önünde iki engel olduğu savunulmuştur: Oransızlık ve sayılamazlık. Beklenenlerin aksine, katılımcılarda sezgisel zorluklar öğrenmeyi güçleştirmektedir. Temel sorunun ise katılımcıların herhangi bir sayının irrasyonel ya da rasyonel olduğunu anlayamamaları ve bu iki kümeden birine sayıyı yerleştirememeleri olarak ifade edilmektedir. Araştırmanın sonunda irrasyonel sayıların anlaşılması ve bir sayının kimliklendirilmesi ile ilgili araştırmaların yapılması gerektiği vurgusu yapılmaktadır (Zazkis & Sirotic, 2004'den alıntı).

Peled ve Hershkovıtz (1999) çalışmalarında öğretmen adaylarının irrasyonel sayı doğru parçaları inşa etmede ve diğer irrasyonel sayı problemleri ve durumlarıyla baş etmede yaşadığı zorlukları incelemişlerdir. Sonuçlar öğretmen adaylarının irrasyonel sayılarla ilgili kavramları bildiği ancak irrasyonel sayılarla ilişkili olan problem durumlarında bu tanımları esnek bir şekilde kullanamadığı ve yine öğretmen adaylarının konuyla alakalı temsiller arası bağlantıları kuramadıkları görülmüştür. Örneğin öğretmen adayları bir irrasyonel sayının aynı zamanda reel sayı olduğunu söyleyebilmelerine rağmen bu rasyonel-reel sayını sayı doğrusu üzerinde bir yeri olduğunu düşünemedikleri belirtilmiştir. Araştırmada öğretmen adaylarının yaptığı açıklamalardan yaşadığı zorlukların ana kaynağının limit olduğu ve Zenon

Paradoksuyla ilişkili olduğu bilgisine ulaşıldığından söz edilmektedir. Çalışmanın bulguları farklı bilgi parçalarını bir araya getiren görev ve problem durumlarının önemine vurgu yapmaktadır.

Zaskis ve Sirotic (2004) PME' de yayınlanmış bildirilerinde, öğretmen adaylarının irrasyonel sayıları anlamlandırmalarında temsil biçimlerinin etkisini incelemiş ve sonuçlarını yayınlamışlardır. Özellikle saydam ve opak olarak adlandırılan temsil biçimlerine odaklanılan çalışmada sonuç olarak öğretmen adaylarının bir sayının rasyonel olup olmadığını tespit etmede saydam temsil biçimine güvenmedikleri(tercih etmedikleri) görülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının hesap makinesi kullanmaya ve ondalıkların ortak kesir temsillerini kullanmaya yatkın olduğu görülmüştür. Öğretme pratiği olarak temsillerin üzerinde daha fazla durulması gerektiği ve temsillerin kullanımından doğacak sonuçların incelenmesinin faydalı olacağı söylenmektedir.

Sirotic ve Zazkis (2007, May), bir başka çalışmalarında ortaokul matematik öğretmen adaylarının irrasyonel sayılara ilişkin anlayışlarını ele almıştır. Çalışmayı 46 öğretmen adayı ile gerçekleştirmişler ve katılımcıların rasyonel ve irrasyonel sayı kümeleri arasındaki ilişkilere dair bilgilerinin çeşitli boyutlarını incelemişlerdir. Çalışmalarında 3 konu ele alınmaktadır: Sayıların zenginliği ve derinliği, reel sayı doğrusuna rasyonel ve irrasyonel sayıların yerleştirilmesi ve bu iki sayı kümesi arasındaki işlemler. Çalışmalarının sonuçları katılımcıların sezgileri ve formal ve algoritmik bilgileri arasında tutarsızlıklar olduğunu göstermektedir. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının çoğunun irrasyonel sayılara ilişin çok sınırlı bilgiye sahip oldukları ve irrasyonel sayıları öncelikle devirli olmayan ondalık sayıların sonsuzluğundan yola çıkarak tanımlamaya çalıştıklarını belirtmişlerdir.

Sirotic ve Zazkis (2007, July), ortaokul matematik öğretmen adaylarının irrasyonel sayıları anlamaları üzerine yapılan bir çalışmanın bir parçası olarak aktardıkları araştırmalarında, irrasyonel sayıların sayı doğrusunda gösterimine

odaklanmışlardır. Bir soru formu ve ardından yapılan klinik mülakat ile katılımcılardan sayı doğrusunda 5'in karekökünün tam olarak hangi noktaya karşılık geldiğinin göstermeleri istenmiştir. Araştırmacılara göre sonuçlar, irrasyonel sayılar ile bu sayıların ondalık gösterimleri ve bu gösterimler konusunda aşırı güven arasındaki kafa karışıklığını ortaya çıkarmıştır. Ayrıca çalışmada pedagojik önerilere de yer verilmiştir.

Shinno'nun (2007) çalışmasının amacı irrasyonel sayıların temel bir özelliği olabilecek eşölçülmezlik/nisbetsizlik (incommensurability) durumuna odaklanarak kavramsal değişim durumu için bazı eğitici uygulamalar yapmaktır. Bu amaca ulaşmak için epistemolojik olarak dikkat edilmesi gerekenler şu şekilde ele alınmıştır: müfredat içeriği, geçmişi ve öğretim tecrübesidir.

Voskoglou ve Kosyvas (2011), Yunanistan'nın Atina şehrindeki düşük seviyeli bir lisesinde ve Patros şehrindeki Lisans Teknolojik Eğitim Enstitüsünde gerçekleştirdikleri çalışmalarında öğrencilere, öncelikle sayı kümelerinin temel yapısının anlaşılmasında karşılaşılan zorluklara ilişkin kısa teorik bir bilgilendirme yapmış, ardından irrasyonel sayılarla ilgili sınıf çalışması yapmışlardır. Çalışmaları, 15 soru kullanılarak 184 öğrenciyle gerçekleşmiştir. Çalışmanın sonuçları araştırmacıların temel hipotezlerini doğrulamaktadır. Buna göre, öğrencilerin irrasyonel sayıları kavramalarına yönelik sezgisel zorluklarının kendi semiyotik temsilleri ile ilgisi vardır. İrrasyonel sayıların anlaşılmasına ilişkin diğer sonuçlar yaş, matematiksel bilginin derinliği ve geometrik temsillerle ilgili olarak bulunmuştur.

Güven, Çekmez ve Karataş (2011) çalışmalarında, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının irrasyonel sayılara ilişkin anlayışlarını incelemeyi amaç edinmişlerdir. Öğretmen adaylarının anlayışlarının üç boyutu; rasyonel ve irrasyonel sayıları tanımlama, rasyonel ve irrasyonel sayıları sayı doğrusunda yerleştirme ve bunlara ilişkin işlemler olarak tanımlamışlardır. Literatür taraması ile hazırlanan 10 açık uçlu test maddesinden yararlanmışlar ve 80 dördüncü sınıf ilköğretim matematik

öğretmen adayı ile gerçekleştirmişlerdir. Çalışma sonuçlarına göre öğretmen adaylarının, irrasyonel sayıları tanımlama, rasyonel ve irrasyonel sayı kümeleri arasındaki işlemler ve sayı doğrusunda gösterimleri ile ilgili kavram yanılgılarına sahip olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Katılımcıların açıklamalarının temsillere ve sezgilerine dayandığını belirtmişlerdir.

Kara ve Delice (2012) irrasyonel sayılar için öğretmenlerin kullandıkları temsilleri ve öğrencilerin zihinlerinde yapılandırdıkları temsiller arasındaki ilişki ve bunların öğrenci performansına yansımalarını araştırmıştır. Tall ve Vinner'ın (1981) kavram tanımı ve kavram imgesi terimleri ve görselleştirme kavramları ışığında verileri incelemişlerdir. Öğrencilerin irrasyonel sayıların sözcük anlamını bildiklerini ama herhangi bir sayının irrasyonel ya da rasyonel olduğunu anlamada yani sembol bağlamında sorun yaşadıklarını ortaya koymuşlardır.

Arbour (2012), fen fakültesi öğrencileriyle yapmış olduğu çalışmada reel, irrasyonel ve rasyonel sayıların anlaşılırlığını araştırmıştır. Kuramsal çerçeve olarak Peirce'in (1885) göstergebilim kuramı ve Vygotsky'nin (1987) kavram gelişimi kuramında yer alan düşünce biçimlerini kullanmıştır. Peirce'in belirteç (indic), görüntüsel gösterge (icon) ve simge (symbol) kavramları ışığında öğrencilerin irrasyonel sayılarla ilgili kullandıkları ifadeleri yorumlamıştır. Ayrıca irrasyonel sayılara ilişkin öğrenci düşünce yapılarını Vygotsky'nin karmaşık, sözde kavramsal ve kavramsal düşünme biçimleri sınıflamasını ele alarak yorumlamıştır.

Voskoglou (2013), lise matematik derslerinde APOS/ACE (eylem-süreç-nesne-şema)/ (**A**ctivities on the computer-bilgisayar ile uygulamalar, **C**lassroom discussion-sınıf tartışmaları and **E**xercises done outside the class- sınıf dışındaki alıştırmalar) değerlendirmesine göre reel sayılar için öğretim planı oluşturmuştur. Oluşturduğu öğretim yöntemi reel sayıların çoklu temsillerine ve kendi aralarında dönüşümlerine/farklı gösterimlerine dayalıdır. Araştırmacı, 2 yıl boyunca kendi

eğitim kurumunda bulunan iki sınıftaki uygulamaları incelemiştir. Geliştirdiği öğretim yöntemlerinin uygulamadaki yararını da rapor etmiştir.

Adıgüzel (2013), çalışmasında 8.sınıf öğrencileri ve matematik öğretmen adaylarının irrasyonel sayılar konusundaki bilgilerini ve kavram yanılgılarını belirlemeyi, öğretmen adaylarındaki irrasyonel sayı bilgisi ile 8. sınıf öğrencilerdeki irrasyonel sayı bilgilerini görmeyi, bu bilgiler doğrultusunda konunun daha iyi kavranması için uygun çözüm yolu üretebilmeyi amaçlamıştır. Bu amaçla Konya ilindeki farklı bölge okullarından aldığı 130 öğrenciye konu ile ilgili açık uçlu çoktan seçmeli test uygulamış ve 180 öğretmen adayıyla yarı yapılanmış görüşmeler yapmıştır. Öğrencilere 10 tane çoktan seçmeli sorudan oluşan bir test uygulamış, matematik öğretmen adayları ile 12 soruluk yarı yapılandırılmış görüşmeler yapmıştır. Araştırmanın sonuçlarına bakıldığında öğrencilerin ve matematik öğretmen adaylarının birçoğunun irrasyonel sayılarla ilgili bilgi eksikliklerinin olduğu görülmektedir. Az sayıda öğrenci ve öğretmenin sezgisel olarak doğru cevaplar verdikleri ifade edilmiştir. Öğrencilerin yarısının verilen sayıların irrasyonel olup olmadığını doğru belirlediği ancak irrasyonel olan sayının rasyonel olmadığını bu öğrencilerden yaklaşık yarısının ifade edebildiği bildirilmiştir. Öğretmen adaylarının irrasyonel ve rasyonel sayıların tanımını yaparken hatalar yaptıkları hatta aralarında irrasyonel sayıları kompleks sayılar olarak düşünenlerin ve devirli sayıları irrasyonel sayı olarak bilenlerin de olduğu ifade edilmiştir.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Yöntem bölümünde araştırmanın modeli, evren ve örneklemi, veri toplama araçları ve veri çözümleme teknikleri belirtilecektir.

3.1. Araştırma Modeli

Bu çalışma nitel türde betimsel bir araştırmadır. Var olan durumları, var olduğu şekliyle tespit etmeye yöneliktir. Bu nedenle araştırmada tarama modeli kullanılması öngörülmektedir. Tarama modeli geçmişte ya da halen var olan bir durumu var olduğu şekliyle betimlemeyi amaçlayan araştırma yaklaşımlarıdır. (Karasar, 1984: 91) Araştırmaya konu olan olay, birey ya da nesne, kendi koşulları içinde ve olduğu gibi tanımlamaya çalışılır. Araştırma problemimizden anlaşıldığı gibi irrasyonel sayı kavramı ile ilgili güçlükler var olduğu şekliyle tespit edilmeye çalışılmıştır. Çalışmamızdaki katılımcılar kendi koşulları içinde, olduğu gibi yansıtılmaya çalışılmıştır. Tarama modelleri çeşitli açılardan sınıflandırılabilir. Bu çalışmada örnek olay tarama modeli esas alınılarak araştırma yürütülmüştür.

Denzin ve Lincoln (1998) nitel araştırmayı, "araştırmacıların araştırılacak konu ya da konuları doğal ortamda inceledikleri ve araştırılan insanların getirmiş oldukları anlamlar açısından olguyu anlamlaştırma ve yorumlama çabası" olarak tanımlamaktadır. (Denzin & Lincoln, 1998; Ekiz 2003: s. 27'deki alıntı). Pek çok nitel araştırma türü vardır. Sönmez ve Alacapınar (2011)'a göre karmaşık, özel ve ilginç bir olgunun, durumun kendi koşulları içerisinde incelenmesi söz konusu olduğu için bu araştırma nitel araştırma yöntemlerinden örnek olay (case study) niteliği taşımaktadır. Sönmez ve Alacapınar (2011)'a göre örnek olaya bütüncül

bakılmalı ve üçgenleme (triangulation) tekniği kullanılmalıdır. Üçgenleme (Çeşitleme) farklı veri kaynakları, farklı veri toplama ve analiz yöntemleri kullanarak araştırma sonuçlarının inandırıcılığını arttırmaya yönelik çalışmaların bütünüdür. (Yıldırım ve Şimşek, 2011: 94)

3.2. Araştırma Grubu

Patton'a (1987) göre nitel araştırmalarda amaçlı örnekleme, zengin bilgiye sahip olduğu düşünülen durumların derinlemesine çalışılmasına olanak vermektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2011: 107). Nitel araştırmalarda elde edilen bulguların evrene genellenmesi söz konusu olmayabilir. Bu durumda örneklemin evreni temsil etme zorunluluğu da yoktur. (Sönmez ve Alacapınar, 2011:97) Olasılık temelli örneklemede evreni temsil edecek geçerlikte ve büyüklükte örneklem seçilmesi nedeniyle genellemeler yapma konusunda önemli yararlar sağlanırken, amaçlı örnekleme zengin bilgiye sahip olduğu düşünülen durumların derinlemesine çalışılmasına imkân verir (Yıldırım ve Şimşek, 2011: 107).

Araştırmamızın evreni, İzmir ili 8. sınıf ve 9. sınıfta okuyan öğrenciler oluştururken çalışmanın yapılacağı ortaokullar ve lise amaçlı örnekleme yöntemlerinden kolay ulaşılabilir durum örneklemesi ile belirlenmiştir. (Yıldırım ve Şimşek, 2011: 113) Buca Kozağaç Ortaokulundan ve Dokuz Eylül Üniversitesi 75. Yıl Ortaokulundan 58 öğrenciye ve İzmir Kız Lisesi'nden 50 öğrenciye "İrrasyonel Sayı Kavram Testi" uygulanmıştır. Toplanan verilerin analizi sonrası bu öğrenciler arasından yarı yapılandırılmış görüşme yapılacak öğrenciler amaçlı örnekleme çeşitlerinden maksimum çeşitlilik örneklemesi ile seçilmiştir. Verileri daha iyi yorumlamak ve yanlış anlamaların önüne geçmek için 8.sınıf ve 9.sınıf öğrencilerinden 5'er tanesi ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. İrrasyonel sayılara ilişkin güçlükleri öğretmenlerin açısından değerlendirmek adına 8.sınıf ve 9. sınıfta derse giren 5 tane de öğretmenle yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmede, görüşmeci çalıştığı problemle ilgili belirli özel alanlar keşfederse, daha ayrıntılı sorularla o alanları daha derinliğine irdelemeyi deneyebilir (Yıldırım ve Şimşek, 2011).

3.3. Veri Toplama Araçları

3.3.1. İrrasyonel sayı kavram testi

Zazkis ve Sirotic'in (2007); Fischbein, Jehiam ve Cohen'in (1995); Kara ve Delice'nin (2012) çalışmalarında yer alan sorulardan yararlanarak oluşturduğumuz ayrıca daha derinlemesine ve çeşitli bilgi edinmek amacıyla yeni sorularla geliştirdiğimiz *EK-1'deki* İrrasyonel Sayı Kavram Testi dokuz görevden oluşmaktadır. Testteki görevler açık uçlu sorulardan oluşmaktadır. Özellikle kavram yanılgılarının belirlenmesinde sonuca dayalı testler yerine olayların nedenini ve sürecini açıklamaya yönelik açık uçlu sorular sormak daha yararlıdır.(Barak, 2007) İyi yapılandırılmış açık uçlu sorular öğrencilere verdikleri cevabın nedenlerini de kendi sözcükleri ile ifade imkânı vermekte ve üst düzey düşünme becerilerini yansıtmaktadır.(Barak, 2007)

Dokuz görevden oluşan bu kavram testinde öğrencilerin sayı kümelerini tanımlamada, sayı kümelerinin birbirleriyle olan ilişkilerini kavramada, verilen bir sayıyı sınıflamada, π sayısının değerini belirlemede, irrasyonel sayıların ondalık ve köklü gösterimlerinde, irrasyonel sayıların yoğunluklarını kavramada ve irrasyonel sayılarda toplama-çarpma işlemlerinde yaşadıkları güçlükleri ortaya çıkarmak amacıyla sorular hazırlanmıştır. Uzman görüşü alınarak soruların irrasyonel sayılarla ilgili güçlükleri belirlemede kapsam geçerliliğinin uygun olduğu belirlenmiştir. Pilot çalışma yapılmış ve ölçek son haline getirilmiştir.

3.3.2. Yarı Yapılandırılmış Görüşmeler

Görüşme, iki ya da daha fazla birey arasında, bu bireyler arasındaki etkileşimin ortaya çıktığı, önceden belirlenmiş bir amaç doğrultusunda gerçekleştirilen soru sorma ve yanıtlamaya dayalı bir iletişim sürecidir. (Stewart & Cash, 1985; Yıldırım ve Şimşek, 2008: s.119'daki alıntı)

Araştırmamızda öğrencilerle yapılan yarı-yapılandırılmış görüşmeler, özel bir konuda derinlemesine soru sorma, cevap eksik veya açık değil ise tekrar soru sorarak durumu daha açıklayıcı hale getirip cevapları tamamlama fırsatı sunmaktadır (Çepni, 2005). Öğrencilere uygulanan kavram testinden alınacak yazılı verileri daha doğru bir şekilde yorumlamak amacıyla bu test ve öğrencilerin yanıtları doğrultusunda bazı sorular öğrencilere tekrar yöneltilmiştir. Böylece öğrencilerin sorulara verdikleri yanıtların altında yatan gerçek nedenler ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Her öğrencinin verdiği yanıta göre ona sorulacak sorular değişeceğinden öğrencilere yönelik bir görüşme formu oluşturulmamış onun yerine görüşmede öğrencinin yapmış olduğu İrrasyonel Sayı Kavram Testi kullanılmıştır. Ancak görüşmenin amacını belirtir *EK-2*'deki form öğrencilere açıklanmıştır. Öğretmenlere ise kavram testindeki sorular doğrultusunda hazırlanmış olan *EK-3'deki* görüşme soruları yöneltilmiştir. Bu görüşme sorularıyla irrasyonel sayıların öğretiminde yer alan ve bu aşamada öğrencileri gözleme fırsatı yakalayan öğretmenlerin irrasyonel sayılara ilişkin yaşanılan güçlükler hakkındaki görüşleri öğrenilmiştir.

3.4. Veri Çözümleme Teknikleri

İrrasyonel Sayı Kavram Testinden elde edilen yazılı verilere içerik analizi yapılmıştır. Her bölüm için içeriğin doğasına uygun farklı kuramsal çatılar ışığında bu analiz gerçekleştirilmiştir.

- Öğrencilerin sayı kümelerini tanımlamada yaşadığı güçlükler analiz edilirken Tall ve Vinner'ın (1981) *kavram imgesi ve kavram tanımı* çatısı ve verilerin betimlenmesinde frekans ve yüzdeler kullanılmıştır.
- Sayı kümelerinin birbirleriyle olan ilişkilerini kavramada yaşanılan güçlükler analiz edilirken içerik analizi yapılmış olup frekans ve yüzdeler kullanılmıştır.
- Verilen bir sayıyı sınıflamada yaşanılan güçlükler analiz edilirken frekans ve yüzdeler kullanılmıştır.

- Π sayısına ilişkin algılar Gray ve Tall (1991) tarafından ortaya atılmış olan *Süreç-Nesne ikiliği ve procept kavramı* kuramsal çatısı ışığında analiz edilmiştir.
- İrrasyonel Sayıların ondalık ve kareköklü gösterimleriyle ilgili yaşanan güçlükler için içerik analizi yapılmış olup frekans ve yüzdeler kullanılmıştır.
- İrrasyonel Sayıların yoğunluklarıyla ilgili algılara ilişkin içerik analizi yapılmış olup frekans ve yüzdeler kullanılmıştır. Ayrıca Vamvakoussi ve Vosniadou (2004) tarafından rasyonel sayılarla ilgili ortaya atılmış kategoriler irrasyonel sayılara uyarlanmıştır.
- İrrasyonel Sayıların toplanması ve çarpılması ile ilgili güçlükler analiz edilirken Dubinsky ve diğerlerinin (1992) ortaya atmış oldukları APOS teorisi kullanılmıştır.

Öğretmenlerle yapılan görüşmelerde veriler uzman incelemesi öncesi katılımcıların teyidine sunulmuştur. Araştırmada elde edilen verilerin ve bunlara ilişkin araştırmacının ulaştığı sonuçların ve yorumların veri kaynakları (katılımcılar) ile teyit edilmesinde yarar vardır. (Yıldırım ve Şimşek, 2011: 268) Katılımcı teyidi sonrası elde edilen transkriptler iki matematik eğitimcisi tarafından analiz edilmiştir. Güvenirlik yüzdesi %84 olarak bulunmuştur. Birden fazla araştırmacının birlikte çalıştığı durumlarda, aynı veri seti kodlanır ve ortaya çıkan kodların benzerlikleri ve farklılıkları sayısal olarak karşılaştırılarak en az %70 düzeyinde bir güvenirlik yüzdesine ulaşmak gerekmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2011: 233).

Yapılan bu çalışmada yazılı ve sözlü farklı veri kaynakları toplanmış olup veri analizinde de farklı kuramsal çatılardan yararlanılmıştır. Çeşitleme farklı veri kaynakları, farklı veri toplama ve analiz yöntemleri kullanılarak araştırma sonuçlarının inandırıcılığını arttırmayı ve aynı zamanda araştırmanın geçerlik ve güvenirliğini sağlamayı hedeflemektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2011: 94).

BÖLÜM IV

4. BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde araştırmada ele alınan probleme ait alt problemlere bağlı olarak bulunan bulgulara yer verilmektedir. Bulgular ve yorumlar dört ana başlıkta yer alacaktır. Birinci başlıkta 8. Sınıf öğrencilerinin, ikinci başlıkta ise 9. Sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayı kavramına ilişkin güçlükleri yer alacaktır. Üçüncü başlıkta iki sınıf düzeyindeki bulgular karşılaştırılacak dördüncü başlıkta ise bu konuya ait öğretmen görüşlerine yer verilecektir.

4.1. Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayı Kavramına İlişkin Güçlükleri

Araştırmanın birinci alt problemini "8.sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayı kavramına ilişkin yaşadığı güçlükler nelerdir?" sorusu oluşturmaktadır.

İrrasyonel sayı kavramına ilişkin güçlükler; "Sayı kümelerini tanımlamada yaşanılan güçlükler, sayı kümelerinin birbirleriyle olan ilişkilerini anlamada yaşanılan güçlükler, verilen bir sayıyı sınıflamada yaşanılan güçlükler, π sayısına ilişkin algılar, irrasyonel sayıların ondalık ve köklü gösterimleriyle ilgili algılar, sayı kümelerinin yoğunluğuyla ilgili algılar ve irrasyonel sayıların toplanmasına ve çarpılmasına ilişkin güçlükler" başlıkları altında incelenmiştir.

4.1.1. Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Sayı Kümelerini Tanımlamalarıyla İlgili Güçlükleri

İrrasyonel Sayı Kavram Testinin 1. sorusunda a, b ve c bölümlerinde öğrencilerin rasyonel sayı, irrasyonel sayı ve gerçek sayı ile ilgili kavram imgeleri araştırılmıştır.

"Rasyonel sayı denildiğinde aklınıza neler gelmektedir?" sorusunun cevabına ilişkin öğrenci cevapları Tablo 1'de gösterilmiştir.

Tablo 1

"Rasyonel Sayı Denildiğinde Aklınıza Neler Gelmektedir?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtları (8.Sınıf)

Kavram	f	%
Pay- Payda- a/b- Kesir	43	74,14
Doğal Sayı-Tam Sayı	19	32,76
Sayılar	19	32,76
Karekök	13	22,41
Devirli Sayı	11	18,97
Ondalık Sayı	10	17,24
Örnek Bir Sayı (2/3 gibi)	9	15,52
Q sembolü	9	15,52
İşlemler	9	15,52
Gerçek Sayılar - R	8	13,79
İrrasyonel Olmayan	8	13,79
Sayı Doğrusu	5	8,62

Tablo incelendiğinde rasyonel sayı denildiğinde öğrencilerin en çok aklına kesirli gösterim geldiği görülmektedir. Öğrencilerin %74'ü kesirle ilgili kavramları yazmışlardır. Daha önce öğrenmiş oldukları doğal sayı ve tam sayı kavramlarını da öğrencilerin %32'si yazmışlardır. Rasyonel sayı denildiğinde irrasyonel sayıyı düşünen öğrenciler ise %13'lük dilimi oluşturmuştur. Buna göre rasyonel sayı denildiğinde öğrencilerin akıllarına daha çok kesirli sayıların geldiği ve "kesirli sayı" kavram imgesinin ağır bastığı görülmektedir.

"Rasyonel sayı nedir? Tanımlayınız." sorusuna gelen cevaplar Tablo 2 de gösterilmiştir.

Tablo 2

Rasyonel Sayının Tanımı ile İlgili Verilen Yanıtlar (8.Sınıf)

Tanım	f	%
a/b şeklinde ifade edilebilen sayılar - Kesirli şekilde gösterilebilen sayılar	34	58,62
Kökten dışarı çıkabilen, kökten kurtulabilen sayılar	8	13,79
Ondalık kısmı sınırlı veya devirli olan sayılar	10	17,24
İrrasyonel olmayan sayılar	5	8,62
Yanlış Tanımlar	12	20,69

Öğrencilerin rasyonel sayı tanımına ilişkin vermiş oldukları yanıtlara bakarsak %59'unun kesirlere dayalı tanım yaptığı görülmektedir. Öğrencilerin %17 si ise ondalık sayılardan yola çıkarak tanım yapmışlardır. İrrasyonel sayılardan veya köklü sayılardan yola çıkarak tanım yapanların olduğu da görülmektedir. Öğrencilerden denklik bağıntısından yola çıkarak rasyonel sayıyı tanımlamalarını beklenmemektedir. Kesirli ifade edilebilen sayılar, kökten çıkabilen sayılar, ondalık kısmı sonlu veya devirli olan sayılar ve irrasyonel olmayan sayılar haricinde doğru olmayan tanımlamalar yapan öğrenciler de örneklemin %21'ini oluşturmaktadır. Öğrencilerin kökten dışarı çıkabilen veya kökten kurtulabilen sayılar tanımı her ne kadar doğru bir tanım olmasa da verdikleri örnekler de göz önüne alındığında rasyonel sayıyı işaret ettikleri görülmektedir. Görüşme yapılan öğrenciler rasyonel sayının tanımıyla ilgili geçerli bir açıklama getirirken sadece **Selda Ö.** isimli öğrenci "Rasyonel sayının tanımını tam olarak bilmiyorum. Açıklayamam. Ancak irrasyonel sayının tanımını biliyorum. Onu tanımlayayım, onun haricinde kalanlar zaten rasyoneldir." yanıtını vermiştir. İrrasyonel sayının tanımını ise, "Kesirli yazılamayan ve kökten kurtulamayan sayılar" şeklinde yapmıştır.

Öğrencilerin verdikleri rasyonel sayı örneklerine bakarsak farklı temsil biçimlerini kullandıklarını görmekteyiz. Bazı öğrenciler kesirli ya da ondalık örnekler verirken, bazıları tam sayılardan bazıları ise köklü ifadelerden yararlanmışlardır. Verdikleri örneklere ilişkin bilgiler Tablo 3 de verilmiştir.

Tablo 3

Öğrencilerin Vermiş Oldukları Rasyonel Sayı Örnekleri (8.Sınıf)

Tanım	f	%
a/b şeklinde örnek verenler	37	63,79
Köklü ifadeyle örnek verenler	22	37,93
Tam sayı örnekleri verenler	22	37,93
Ondalık sayı örnekleri verenler	8	13,79
Yanlış örnek verenler/ Örnek vermeyenler	5	8,62

Tablo 3'e bakıldığında öğrencilerin %64'ünün kesirli örnekler verdiği görülmektedir. Rasyonel sayı örneği istediğimizde öğrencilerin kesirli sayılardan örnek vermesi 7.sınıfta işlemiş oldukları rasyonel sayılar konusunda sık sık kesirli ifadelerle karşılaştırıldıkları için doğal görülebilir. Ders kitaplarında da 7.sınıfta rasyonel sayılar konusu altında ondalık sayılara daha az yer verildiği düşünüldüğünde katılımcıların sadece %14'ünün rasyonel sayı örneği olarak ondalık sayı vermesi de doğal görülebilir. Öğrencilerin %38'inin tam kare sayılardan yola çıkarak köklü sayı örnekleri verdiği görülmektedir. Bu yüksek oranın 8.sınıfta öğrencilerin köklü sayıları işlemelerinden kaynaklandığı düşünülebilir.

Öğrencilerin bir kısmı sadece tek tip örnekler verirken bazıları ise farklı tipte örnekler de vermişlerdir. Sadece a/b şeklinde örnek veren 16 öğrenci (%27,52) , sadece ondalık sayı örneği veren 1 kişi, sadece tam sayılardan örnek veren 7 kişi ve sadece köklü sayılardan örnek veren 3 kişi bulunmaktadır. Hem tam sayı, hem a/b şeklinde bir sayı, hem ondalık sayı hem de köklü sayı örneği veren hiçbir öğrenciye rastlanmazken bu tiplerden farklı 3 tanesini kullanan öğrenci sayısı 10 olarak bulunmuştur.

Bu bulgulara göre bazı öğrencilerin rasyonel sayı kavramıyla ilgili kesirli sayı imgesinin ağır bastığı görülmektedir. Görüşme yapılan bazı öğrencilerin dört tipte de örnekler bildiği halde tam sayı örnekleri verdiği görülmüştür. Örneğin **Özge Ö.**

isimli öğrenci sadece a/b şeklinde örnekler verdiği halde görüşme sırasında ondalık gösterimle de köklü ifadeyle de rasyonel sayı örnekleri vermiştir.

Rasyonel olmayan gerçek sayıların irrasyonel sayı olduğu düşünüldüğünde öğrencilerin rasyonel sayılarla ilgili bilgi eksiklerinin ya da kavram yanılgılarının irrasyonel sayılarla ilgili imgelerini de etkileyebileceği yorumu yapılabilir. "İrrasyonel sayı denildiğinde aklınıza neler gelmektedir?" sorusuna öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlar Tablo 4'de yer almaktadır.

Tablo 4

İrrasyonel Sayı Denildiğinde Öğrencilerin Aklına Gelen Kavramlar (8.Sınıf)

Kavram	f	%
Köklü sayılar	31	53,45
Rasyonel olmayan sayı	17	29,31
Ondalık kısmı sonsuz/Ondalık sayı	15	25,86
Kesirli olmayan	15	25,86
π	15	25,86
Sayılar/Sayı kümeleri	12	20,69
Gerçek Sayı	10	17,24
Örnek bir sayı ($\sqrt{2}$ gibi)	9	15,52
İşlemler	9	15,52
Devirli Sayı	7	12,07
Tam Sayı	7	12,07
I sembolü	5	8,62
İşlemler	4	6,90
Pisagor	3	5,17
Diğer	10	17,24

Tablo 4'e bakıldığında öğrencilerin %53'ünün irrasyonel sayı denildiğinde aklına köklü sayılar geldiği görülmektedir. %29'unun ise rasyonel sayılardan yola

çıktığı, 15'er öğrencinin de (%25,86) kesirli olmayan sayı, ondalık sayı ve π sayısını belirttiği görülmektedir. Öğrencilerin %17'si ise matematik, okul, ders gibi farklı kavramlar da belirtmiştir. Öğrencilerin sadece aklına gelen kavramlardan oluşan bu verilere bakarak irrasyonel sayı kavramıyla ilgili köklü sayı imgesinin ondalık gösterime göre daha ağır bastığı düşünülebilir.

"İrrasyonel sayı nedir? Tanımlayınız." sorusuna öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlar Tablo 5'de görülmektedir. Birden fazla tanım yapan öğrenciler olabildiği için toplam frekans 58'i geçmiştir.

Tablo 5

İrrasyonel Sayının Tanımı ile İlgili Verilen Yanıtlar (8.Sınıf)

Tanım		**f**	**%**
a/b şeklinde yazılamayan sayılardır		21	36,12
Rasyonel olmayan sayılardır		10	17,24
Ondalık kısmı sonsuz ve düzensiz olan sayılardır		7	12,04
Eksik Tanımlama	Karekökten kurtulamayan sayılardır	10	17,24
Yanlış Tanımlar	Gerçek olmayan sayılar	4	6,88
Yanlış Tanımlar	Ondalık kısmı sonsuz olan sayılar	2	3,44
Yanıtsız / Diğer yanlış tanımlar		13	22,36

Tablo 5'e bakıldığında irrasyonel sayıları öğrencilerin %36'sının a/b şeklinde yazılamayan sayılar ya da kesirli şekilde gösterilemeyen sayılar olarak tanımladığı görülmektedir. 10 öğrenci rasyonel olmayan sayılar, bir başka 10 öğrenci de karekökten kurtulamayan sayılar şeklinde tanımlama yapmıştır. Aslında bu ifade irrasyonel sayıların doğru bir tanımı olmasa da öğrencilerin verdikleri örneklere bakıldığında irrasyonel sayıları işaret ettikleri anlaşılmaktadır. Öğrencilerin %33'ünün kareköklü ifade dışında yanlış tanımlar yaptığı veya tanım yapmadığı göz önüne alındığında irrasyonel sayılara ilişkin güçlüklerin temelinde tanım bilgisinin

eksikliğinin ya da yanlışlığının olduğu düşünülebilir. Yanlış tanımlar içinde, "1'e ve kendisine bölünen sayılar", "Sayı doğrusunda yeri olmayan sayılar" gibi tanımlar mevcuttur. Ayrıca irrasyonel sayı ile ilgili 'rasyonel olmayan sayı' söyleminin öğrencilerde 'gerçek olmayan sayı' şeklinde algılandığı da yanlış tanımlardan görülmüştür. Ondalık sayı imgesinin ağır bastığı öğrenci sayısı az olmakla birlikte ondalık sayılarla ilgili yanlış tanımların da yapıldığı görülmektedir. Bunlardan bazıları " Ondalık kısmı sonsuza giden sayılara irrasyonel sayı denir.", "Ondalık kısmı devirli olan sayılara irrasyonel sayı denir." şeklindedir. Görüldüğü gibi ondalık gösterimle ifade edilen bir sayının irrasyonelliği konusunda da güçlükler mevcuttur. Bu güçlükler sınıflandırmayla ilgili bölümde tekrar ele alınacaktır.

Öğrencilerin vermiş oldukları irrasyonel sayı örneklerine ve kullandıkları temsil biçimlerine bakılarak irrasyonel sayılara ilişkin kavram imgeleri hakkında bilgi edinilebilir. Tablo 6'da öğrencilerin vermiş olduğu örneklerin temsil biçimlerine ve doğruluklarına göre dağılımı yapılmıştır.

Tablo 6

Öğrencilerin Vermiş Oldukları İrrasyonel Sayı Örnekleri (8.Sınıf)

Tanım		**f**	**%**
Köklü sayı	İrrasyonel	27	46,55
	Rasyonel+İrrasyonel	3	5,17
Ondalık sayı	İrrasyonel	2	3,45
	Rasyonel+İrrasyonel	1	1,72
Köklü + Ondalık (İrrasyonel)		12	20,69
Yanlış örnek verenler / Örnek vermeyenler		13	22,41
Toplam		**58**	**100**

Tablo 6'da yer alan öğrenci örneklerinin dağılımına bakıldığında öğrencilerin %52'sinin irrasyonel sayı örneklerinde sadece köklü gösterimi tercih ettiği, ancak 3 öğrencinin köklü sayı yazarken rasyonel sayı örnekleri de verdiği görülmektedir. Sadece ondalık sayı örneği veren 3 öğrenci varken her iki gösterimi de kullanıp irrasyonel sayı örneği verebilen öğrencilerin oranının %21 olduğu görülmektedir.

Tamamen tam sayı, rasyonel sayı gibi örnekler veren veya örnek vermeyenlerin oranı %22 olarak görülürken bu oranın yanlış tanım yapanlara ya da tanım yapmayanlara göre (%33) daha az olduğu göze çarpmaktadır. Öğrencinin tanımı yanlış ifade ettiği veya ifade edemediği halde doğru örnekleri verebilmesi o kavram tanımını bilmediği ama geçerli bir kavram imgesine sahip olduğu yorumuna götürebilir.

Bazı öğrencilerin ise tek tip örnekler verdiği halde farklı tipteki irrasyonel sayıları bilebileceği de göz ardı edilemez. Örneğin **Özge Ö.** isimli öğrenci sadece köklü sayı temsilini kullandığı halde görüşme sırasında ondalık gösterimle de örnekler vermiştir. Bu nedenle sadece öğrencilerin verdikleri yazılı örneklere bakılarak kavram imgeleriyle ilgili yorum yapmak doğru olmayabilir. Bazı öğrencilerin verdikleri örneklerden yanılgı içinde oldukları anlaşılmıştır. Örneğin $\sqrt{50}/\sqrt{2}$ örneği veren **Simge D.**'nin sayıları sınıflandırmada da benzer hata yaptığı görülmüştür.

Öğrencilerin 24 tanesi (%41,38) irrasyonel sayı olarak π sayısını da örnekleri arasında vermişlerdir. Ancak bu bulguya bakarak geriye kalan öğrencilerin π'nin irrasyonel sayı olmadığı yanılgısında olduğunu söylenemez. Tablo 14'deki, π sayısına irrasyoneldir diyen öğrencilerin oranı (%81) bu durumu destekler niteliktedir.

İrrasyonel sayı kavramına ilişkin bir yanılgının gerçek sayı kavram imgesinin de yanlış oluşmasında etkili olabileceği düşünülebilir. Öte yandan bazı öğrencilerin "Gerçek olmayan sayılara irrasyonel sayı denir." şeklindeki yanlış tanımları da göze alındığında irrasyonel sayı kavramına ilişkin yanılgıların bulunmasında gerçek sayı ile ilgili öğrencilerin sahip olduğu imgelerin de etkili olabileceği düşünülebilir. Öğrencilere sorulan "Gerçek sayı nedir? Tanımlayınız." sorusuna ilişkin verdikleri yanıtlar Tablo 7'deki gibidir.

Tablo 7

Gerçek Sayı Tanımı ile İlgili Verilen Yanıtlar (8.Sınıf)

Tanım		**f**	**%**
Tüm sayılardır - Bütün sayılardır		24	41,38
İrrasyonel ve Rasyonel sayıların birleşimidir		8	13,79
Sayı doğrusunu dolduran sayılardır		4	6,90
Yanlış Tanımlar	Gerçek sayılar tam sayılardır	6	10,34
Yanlış Tanımlar	Kendisinden başkasına bölünemeyen sayılardır	3	5,17
Yanlış Tanımlar	İrrasyonel olmayan sayılardır	2	3,45
Yanlış Tanımlar	Sonsuza giden sayılardır	2	3,45
Diğer yanlış tanımlar		2	3,45
Tanım vermeyenler		7	12,07
Toplam		**58**	**100**

Öğrencilerin vermiş oldukları gerçek sayı tanımlarına bakıldığında %41 oranla 'bütün sayılar' söylemi öne çıkmaktadır. Öğrencilerin %14'ü irrasyonel ve rasyonel sayıların birleşimi veya iki kümenin birleşimi şeklinde tanımlama yapmıştır. 4 öğrencinin de sayı doğrusundan yola çıkarak tanım yaptığı görülmektedir. Öğrencilerden biri "$\sqrt{-4}$ gibi gerçek olmayan sayılar da vardır." şeklindeki açıklaması da 8.sınıf düzeyinde bir öğrenci için ilgi çekicidir. Öğrencilerin %38'i gerçek sayılarla ilgili geçerli ve doğru bir tanım yapamamışlardır. Gerçek sayıların tam sayı olması gerektiği, asal sayı olması gerektiği gibi yanılgıların olduğu göze çarpmaktadır.

Öğrencilerden gerçek sayı örnekleri istendiğinde ise verdikleri örnekler göz önüne alınırsa Tablo 8'deki dağılım yapılabilir.

Tablo 8

Öğrencilerin Vermiş Oldukları Gerçek Sayı Örnekleri (8.Sınıf)

Tanım	f	%
İrrasyonel+Rasyonel birlikte örnekler verenler	22	37,93
Sadece tam sayılardan örnek verenler	17	29,31
Sadece rasyonel sayılardan örnek verenler (Sadece tam sayı ve asal sayı örnekleri hariç)	5	8,62
Sadece asal sayı örneği verenler	3	5,17
Örnek vermeyenler	11	18,96

Tablo 8 göz önüne alındığında öğrencilerin büyük çoğunluğunun gerçek sayıyı 'bütün sayılar' veya 'irrasyonel ve rasyonel sayıların birleşimi' olarak tanımlamasına rağmen sadece %38'lik kısmının iki sayı kümesinden de örnekler verdiği görülmektedir. "Gerçek sayılar tam sayılardır." şeklinde tanım yapan 6 öğrenci olmasına rağmen gerçek sayılara sadece tam sayılardan örnek verenler (sadece asal sayı örnekleri verenler hariç) 17 öğrencidir. Bu nedenle yalnızca öğrencilerin örneklerine bakarak gerçek sayı kavramı ile imgeleri net bir şekilde ortaya konulamamaktadır.

4.1.2. Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Sayı Kümelerinin Birbirleriyle Olan İlişkilerine Yönelik Güçlükleri

İrrasyonel sayı kavramına ilişkin yaşanılan güçlükleri belirlemede öğrencilerin irrasyonel sayılar ve diğer sayı kümelerinin birbirleriyle ilişkilerini ne derece bildiklerinin belirlenmesinin yararlı olacağı düşünülebilir. "Hem *irrasyonel* hem de *rasyonel* olan sayı var mıdır?" sorusuyla öğrencilerin iki küme arasındaki ilişkiyi ne derece anladıkları ortaya konulmak istenmiştir. Bu soruya ait cevapların dağılımı Tablo 9'da verilmiştir.

Tablo 9

"Hem İrrasyonel Hem de Rasyonel Olan Sayı Var mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf)

<table>
<tr><th colspan="2">Yanıtlar</th><th colspan="2">f , %</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Yoktur</td><td>Tanımlardan yola çıkarak, açıklayarak yoktur</td><td>14 (%24,14)</td><td rowspan="3">48 (%82,74)</td></tr>
<tr><td>Sadece yoktur</td><td>32 (%55,17)</td></tr>
<tr><td>Yanlış bir açıklamayla yoktur</td><td>2 (% 3,43)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vardır</td><td colspan="2">9 (%15,52)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Yanıt yok</td><td colspan="2">1 (%1,72)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Toplam</td><td colspan="2">58 (%100)</td></tr>
</table>

Bulgulara bakıldığında öğrencilerin %83'ünün irrasyonel ve rasyonel sayı kümelerinin kesişimlerinin boş küme olduğu yani her iki sayı kümesine de dahil bir eleman olamayacağı algısına sahip olduğu görülmektedir. "Yoktur" diyen öğrencilerden 2 tanesi yanlış açıklama yapmışlardır. Bu açıklamalar şu şekildedir:

- Bir sayının sayı doğrusunda yeri ya vardır ya yoktur. Bu nedenle sayı ya irrasyoneldir a da rasyoneldir. İkisi birden olamaz.
- Bir sayının ondalık kısmı ya sonludur ya da sonsuza gidiyordur. Bu nedenle ikisi birden olamaz.

Sadece 9 öğrenci "vardır" yanıtını vermişlerdir. "Bir örnek gösteremiyorum ama bir istisna vardır muhtemelen" yanıtı ve buna benzer açıklamalar yapılmıştır. "Vardır" yanıtı veren öğrencilerdin biri olan **Suat B.** sıfır sayısını örnek göstermiştir. Görüşme sırasında düşüncesinin nedeni sorulmuştur:

- **S.B. :** Sıfır sayısını 0/5 yazarsak rasyonel olur ama 5/0 yazarsak irrasyonel olur.

- **A:** 5/0 irrasyonel midir?
- **S.B:** Rasyonel sayının tanımında paydanın 0 olmaması gerektiği yazılıydı. 5/0 rasyonel olamayacağına göre irrasyoneldir.
- **A:** 5/0 sıfıra mı eşittir?
- **S.B. :** Evet başka neye eşit olacak ki?

Görüldüğü gibi öğrenci rasyonel sayının tanımındaki b ifadesinin 0 olmaması gerektiğinden yola çıkarak paydası 0 olan sayıların irrasyonel olduğu ve o sayıların 0'a eşit olacağı yanılgısıyla da 0'ın hem rasyonel hem de irrasyonel olduğu yanılgısına düşmüştür.

Öğrencilerin gerçek sayılar ile irrasyonel sayılar arasındaki ilişkiyi bilmesi de önemlidir. Öte yandan rasyonel sayı-gerçek sayı ilişkisi de önem arz etmektedir. Tablo 10'da "*Rasyonel sayıların* tamamı *gerçek sayı* mıdır?" sorusuna verilen öğrenci yanıtlarının dağılımı görülmektedir.

Tablo 10

"Rasyonel Sayıların Tamamı Gerçek Sayı mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf)

<table>
<tr><th colspan="2">Yanıtlar</th><th colspan="2">f , %</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Evet</td><td>Alt küme kavramından yola çıkarak açıklamalı evet diyenler</td><td>26 (%44,82)</td><td rowspan="3">48 (%82,74)</td></tr>
<tr><td>Sadece evet gerçek sayıdır diyenler</td><td>20 (%34,48)</td></tr>
<tr><td>Yanlış bir açıklamayla evet diyenler</td><td>2 (% 3,43)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hayır, bazıları gerçektir</td><td colspan="2">10 (%17,24)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Toplam</td><td colspan="2">58 (%100)</td></tr>
</table>

Tablo 10'a bakıldığında öğrencilerin %83'ünün rasyonel sayıların gerçek sayılar kümesine dahil olduğunu düşündüğü söylenebilir. 10 öğrenci ise "Rasyonel sayıların tamamı gerçek sayı değildir, aralarında gerçek olmayanlar da olabilir" yanıtına benzer yanıtlar vermişlerdir.

Tablo 11'de ise "*Her irrasyonel sayı gerçek sayı* mıdır?" sorusuna verilen yanıtların dağılımı görülmektedir. Öğrencilerin irrasyonel sayıların gerçek sayı olması hususunda rasyonel sayılara göre daha kararsız oldukları verilerden anlaşılmaktadır.

Tablo 11

"Her İrrasyonel Sayı Gerçek Sayı mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf)

<table>
<tr><th colspan="2">Yanıtlar</th><th colspan="2">f , %</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Evet</td><td>Alt küme kavramından yola çıkarak açıklamalı evet diyenler</td><td>19 (%32,76)</td><td rowspan="3">35 (%60,34)</td></tr>
<tr><td>Sadece evet gerçek sayıdır diyenler</td><td>15 (%25,86)</td></tr>
<tr><td>Sayı doğrusundan yola çıkarak evet diyenler</td><td>1 (% 1,72)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hayır</td><td colspan="2">23 (%39,65)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Toplam</td><td colspan="2">58 (%100)</td></tr>
</table>

Tablo incelendiğinde %83 olan rasyonel sayı-gerçek sayı ilişkisinde doğru cevap verenlerin oranının irrasyonel sayı-gerçek sayı ilişkisinde %60'a düştüğü görülmektedir. Bu soruda "Hayır" diyenlerin incelenmesi gerekmektedir. Çünkü verdikleri yanıtlara göre yaşanan güçlükler daha net ortaya konulabilir.

Öğrencilerin verdikleri yazılı yanıtlardan bazıları şunlardır:

- Gerçek sayılar, rasyonel sayı demektir. İrrasyonel sayı da rasyonel olmayan sayı demek olduğuna göre irrasyonel sayıların hiçbiri gerçek değildir.

- Gerçek sayıların bazıları irrasyoneldir. Hepsi değildir. (Soruyu tersten anlayanlar)
- Ondalık kısmında sonu belli olmayan sayılar gerçek sayı olamazlar.
- Bazı irrasyonel sayılar sayı doğrusunda gösterilmezler, bu nedenle gerçek sayı değillerdir.
- Gerçek sayılar kesirli yazılmalıdır. Ancak irrasyonel sayılar kesirli yazılamazlar.
- Gerçek sayılarda negatif sayı olmaz, ama irrasyonel sayıların negatifleri de vardır.

Yanıtların her biri bir kavram yanılgısına işaret etmektedir. Gerçek sayıların rasyonel sayılarla ve pozitif sayılarla aynı olduğu yanılgılarına sahip öğrenciler bulunmaktadır. Ondalık kısımla da ilgili yanılgılar söz konusudur. Ondalık kısmın sonsuz olması sayının gerçek bir sayı olmadığı algısına götürmüş olabilir. "Gerçek" kelimesinin Türkçe anlamı da bu algıya neden olmuş olabilir. Ayrıca ondalık kısmı sonsuz olan sayıların sayı doğrusunda tam bir karşılığının olmadığı bu nedenle gerçek sayı olmadığı düşüncesinde olan öğrenciler de mevcuttur.

Öğrencilerden doğal sayı, tam sayı, rasyonel sayı, irrasyonel sayı ve gerçek sayılarla ilgili Venn şemasını doldurmaları istenen soruda öğrencilerin büyük kısmı tamamen doğru bir yerleştirme yaparken irrasyonel sayıları doğru yerleştirdiği halde diğerlerinde sorun yaşayan öğrenciler de vardır. Özellikle tam sayı-doğal sayı, gerçek sayı-doğal sayı ve rasyonel sayı-tam sayı yerleştirmelerinde hataların olduğu görülmüştür. Tablo 12, Venn şemasına sayı kümelerini yerleştirirken öğrencilerin yaptıkları hatalara göre oluşturulmuştur.

Tablo 12

Venn Şemasına Sayı Kümelerini Yerleştirmede Yapılan Hata Sayısına Göre Öğrenci Dağılımı (8.Sınıf)

<table>
<tr><th colspan="2">Doğru – Yanlış Durumu</th><th colspan="2">f</th><th colspan="2">%</th></tr>
<tr><td colspan="2">Tamamen Doğru</td><td colspan="2">37</td><td colspan="2">63,79</td></tr>
<tr><td rowspan="3">İrrasyonel Sayı Doğru, Diğerlerinde Hatalılar</td><td>3 Küme Doğru</td><td>4</td><td rowspan="3">13</td><td>6,90</td><td rowspan="3">22,41</td></tr>
<tr><td>2 Küme Doğru</td><td>2</td><td>3,45</td></tr>
<tr><td>1 Küme Doğru</td><td>7</td><td>12,07</td></tr>
<tr><td colspan="2">İrrasyonel Sayı Kümesi Yanlış</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">13,80</td></tr>
<tr><td colspan="2">Toplam</td><td colspan="2">58</td><td colspan="2">100</td></tr>
</table>

Tabloya bakıldığında öğrencilerin %64'ünün sayı kümelerini venn şemasına doğru yerleştirdiği görülmektedir. Öğrencilerin %12'si sadece irrasyonel sayı kümesini doğru yerleştirirken diğerlerini tamamen yanlış yerleştirmiştir. 2 öğrenci irrasyonel sayılar dışında bir kümeyi daha doğru yerleştirebilmiştir. 4 öğrenci ise sadece 2 kümeyi birbiriyle karıştırmıştır. İrrasyonel sayı kümesini yanlış yerleştiren öğrencilerin oranı ise %14'tür.

Görüşme yapılan öğrencilerden **Özge Ö.** Rasyonel sayı ve tam sayı arasındaki farkı anlayamadığını görüşme sırasında fark etmiş ve Venn şemasını yanlış tamamlamıştır. **Suat B.** isimli öğrenci de rasyonel sayıların tam sayıların alt kümesi olduğunu belirtmiştir. "Tam sayı olup da rasyonel olmayan bir sayı örneği verir misin?" sorusuna ise "$-\sqrt{3}$ tam sayıdır çünkü negatif sayılar tam sayıdır. Ama rasyonel sayı değildir çünkü kökten çıkmaz. İrrasyonel sayıdır." yanıtını vermiştir.

4.1.3. Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Verilen Bir Sayıyı Sınıflamayla İlgili Güçlükleri

Sayılarla ilgili en önemli husus belki de öğrencinin sayıyı tanıyabilmesidir. Sayının hangi kümeye veya kümelere ait olduğunun bilinip bilinmediğini araştırmak öğrencinin yanılgılarını da güçlüklerini de kolay teşhis etmeye yardımcı olacaktır.

Tablo 13

Verilen Sayıların Sınıflandırılmalarını Gösteren Frekans ve Yüzde Tablosu

(Doğru Cevaplar İtalik Olarak Belirtilmiştir) (8.Sınıf)

	Tam Sayı, f (%)	Rasyonel Sayı, f (%)	İrrasyonel Sayı, f (%)	Gerçek Sayı, f (%)
5	*52 (%89,66)*	*41 (% 70,69)*	4 (%6,90)	*52 (%89,66)*
-2	*41 (%70,69)*	*43 (%74,14)*	9 (%15,52)	*47 (%81,03)*
0	*45 (%77,59)*	*28 (%48,28)*	8 (%13,79)	*45 (%77,59)*
$-\frac{5}{3}$	14 (%24,14)	*52 (%89,66)*	4 (%6,90)	*45 (%77,59)*
π	6 (%10,34)	4 (%6,90)	*47 (%81,03)*	*39 (%67,24)*
3,14	17(%29,31)	*38 (%65,52)*	16 (%27,59)	*43 (%74,14)*
7,333…	15 (%25,86)	*35 (%60,34)*	20 (%34,48)	*47 (%81,03)*
$\sqrt{3}$	9 (%15,52)	5 (%8,62)	*43 (%74,14)*	*44 (%75,86)*
$-\sqrt{4}$	*36 (%62,07)*	*32 (%55,17)*	15 (%25,86)	*44 (%75,86)*
2,3545454…	12 (%20,69)	*28 (%48,28)*	24 (%41,38)	*43 (%74,14)*
0,10203040…	12 (%20,69)	19 (%32,76)	*38 (%65,52)*	*44 (%75,86)*
$0,15\overline{7}$	13 (%22,41)	*44 (%75,86)*	13 (%22,41)	*47 (%81,03)*
2,7581125…	6 (%10,34)	19 (%32,76)	*36 (%62,07)*	*43 (%74,14)*
$\frac{23}{17}$=**1,35294…**	11 (%18,97)	*28 (%48,28)*	28 (%48,28)	*39 (%67,24)*
$1,\overline{42593}$	13 (%22,41)	*40 (%68,97)*	14 (%24,14)	*45 (%77,59)*
$1+2\sqrt{9}$	*32 (%55,17)*	*36 (%62,07)*	15 (%25,86)	*45 (%77,59)*
$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$	13 (%22,41)	28 (%48,28)	23 (%39,66)	43 (%74,14)
$\frac{\pi}{3}$	9 (%15,52)	15 (%25,86)	*39 (%67,24)*	*43 (%74,14)*
$\frac{11}{3}$	14 (%24,14)	*44 (%75,86)*	11 (%18,97)	*42 (%72,41)*
4,4793512853	14 (%24,14)	*26 (%44,83)*	26 (%44,83)	*44 (%75,86)*

Tablo 13'deki sayılar ve öğrencilerin sınıflandırmaları incelendiğinde;

- Öğrencilerin %90'ı "5" sayısını tam ve gerçek sayı olarak sınıflarken bu oran rasyonel sayı da %71'e düşmüştür. 5'in kesirli olarak yazılmaması bu düşüşün nedeni olabilir.
- "-2" sayısı öğrencilerin %71'i tarafından tam sayı olarak sınıflandırılmıştır. Bu sayıda 5'e göre düşüş vardır. Bu azalış, negatif sayıların tam sayı olamayacağı düşüncesinde olan öğrencilerin var olduğu şeklinde yorumlanabilir.
- "0" sayısı ile ilgili en dikkat çekici husus, rasyonel sayı olarak sınıflayan öğrencilerin %48'lik bir orana sahip olmasıdır. Katılımcılardan yarıdan fazlasının 0'ı rasyonel sayı olarak ele almamasının yanı sıra irrasyonel diyen öğrencilerin oranının ise %14 olduğu görülmektedir. Bu öğrencilerden biri olan **Suat B.** "Sıfırı 0/5 veya 5/0 olarak yazabiliriz." düşüncesinden ve "Rasyonel sayıların paydası 0 olamaz." düşüncesinden hareketle 0'ın irrasyonel bir sayı olduğunu da iddia etmiştir. Hatta ona göre sıfır hem rasyonel hem de irrasyonel bir sayıdır.
- Katılımcıların %90'ı " $-\frac{5}{3}$ " sayısını rasyonel sayı olarak sınıflandırıldığı görülmektedir. a/b şeklinde sayının ifade edilmiş olması öğrencilerin kolay tercih yapmasını sağlamış olabilir.
- Öğrencilerin %81'i π sayısını irrasyonel olarak nitelerken, gerçek sayı olduğunu belirtenlerin oranının %67'ye düştüğü göze çarpmaktadır.
- "3,14" sayısına rasyonel sayı diyen katılımcıların oranının %66 olduğu görülürken % 28 oranla 'irrasyonel sayıdır' diyen öğrencilerin de fazla olduğu görülmektedir. Öğrencilerin π sayısını 3,14 olarak düşünmeleri bu oranı arttırmış olabilir. Nitekim **Suat B.** görüşme sırasında 3,14 sayısının π sayısına eşit olduğunu bu nedenle de irrasyonel olduğunu dile getirmiştir.
- 7,333… sayısının rasyonel sayı olduğunu belirten öğrenciler daha fazla olmasına rağmen öğrencilerin %34'ü ise bu sayıya irrasyonel demişlerdir. Öğrencilerin tanımlarından da yola çıkılarak ondalık kısmının sonsuza gidiyor olmasının sayının irrasyonel olduğu algısını yaratabileceği düşünülebilir.

- $\sqrt{3}$ sayısını öğrencilerin % 74'ünün irrasyonel sayı olarak sınıflandırdığı görülmektedir. Bu oran π sayısının irrasyonelliğine göre düşük olmasına rağmen diğer irrasyonel sayılara göre yüksek bir orandır. Köklü gösterim ve irrasyonelliği birlikte algılayan öğrenciler bu oranın yüksekliğini sağlamış olabilir.
- $-\sqrt{4}$ sayısını öğrencilerin yarıdan fazlasının tam sayı ve rasyonel sayı olarak sınıflandırdığı görülmektedir. Öğrencilerin %26'sı ise bu sayıyı irrasyonel olarak nitelemiştir. Bu orana köklü ifade neden olmuş olabilir.
- 2,3545454… devirli sayısını rasyonel sayı olarak sınıflandırılan öğrenciler tüm grubun % 48'ini oluştururken, irrasyonel sayı olarak sınıflandıran öğrenciler ise grubun %41'ini oluşturmaktadır. 7,333… devirli sayısına göre rasyonel sayı olduğunu belirtenlerin oranında azalış söz konusudur. 7,333… sayısına rasyonel fakat 2,3545454… sayısına irrasyonel diyen öğrencilerden biri olan **Selda Ö.,** "2,3545454… sayısında 3 rakamı olmasa sayı rasyonel olurdu ancak virgülden sonra 3 ile başlaması ve sonradan 354354… şeklinde gitmemesi sayıyı irrasyonel yapmıştır." şeklinde yorum yapmıştır. 0,10203040…sayısını irrasyonel sayı olarak belirtenlerin oranının %66 olduğu, rasyonel sayı olarak belirtenlerin oranının ise %33 olduğu görülmektedir. Sayının belli bir kurala göre gitmesi bazı öğrenciler tarafından sayının rasyonelliğini gösterir işaret olarak algılanmış olabilir. Bunun bir örneği de **Merve B.** isimli görüşme yapılan öğrencidir. Merve, "Ondalık kısım sonsuza gidiyor ve kuralı da belli onar onar artmış. O halde rasyonel sayıdır." şeklinde açıklama yapmıştır.
- $0,15\overline{7}$ sayısında rasyonel sayı diyenlerinin oranının %76 seviyesinde olduğu görülmektedir. Bu 7,333… sayısındaki orana göre daha fazladır. **Selda Ö.** "İrrasyoneldir. Çünkü 15 rasyonelliği bozmaktadır." şeklinde açıklama yapmıştır.
- 2,7581125…irrasyonel sayısını öğrencilerin %62'si irrasyonel olarak sınıflandırmıştır. Rasyonel sayı olarak sınıflandıranların oranı ise %33'tür. Öğrencilerin 1/3 lük kısmının bu sayıyı rasyonel olarak algılanmasının altında "Ondalık sayıların tamamı rasyonel sayıdır" yanılgısı yatıyor olabilir.

- $\frac{23}{17}$=1,35294… şeklinde ifade edilen rasyonel sayıda öğrencilerin zorlandığı görülmektedir. Rasyonel sayıdır diyen öğrencilerin de irrasyonel sayıdır diyen öğrencilerin de oranının %48 olduğu göze çarpmaktadır. Görüşme yapılan öğrencilerden **Merve B.** ile **Özge Ö.** Kararsızlık yaşamıştır. Merve, sayının hem kesirli yazıldığını hem de ondalık kısmının düzensiz olduğunu söyleyip karar vermekte zorluk çektiğini belirtmiştir. Özge ise bu sayının gerçek sayı olmayacağını çünkü böyle bir eşitliğin mümkün olamayacağını diye getirmiştir.
- $1+2\sqrt{9}$ sayısının tam sayı ve rasyonel sayı olduğunun öğrencilerin yarıdan fazlası farkına varmıştır. Ancak %26'sı ise sayıyı irrasyonel olarak sınıflamıştır.
- $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$ sayısının payı da paydası da irrasyoneldir ancak işlem yapıldığında sonucun rasyonel olduğu görülür. Bu nedenle öğrencilerin zorlandığı görülmektedir. Grubun %48'i sayıyı rasyonel olarak sınıflarken, %40'ı irrasyonel olarak sınıflamıştır. **Simge D.** isimli öğrenci de bu sayının irrasyonel olduğunu çünkü payının da paydasının da irrasyonel olduğunu düşünen öğrencilerdendir. Ayrıca irrasyonel sayı örneği istenilen soruda da kendisi $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$ örneğini vermiştir. **Suat B.** ise sayının kesirli yazılması üzerine durmuş ve "Kesirli olduğu için rasyoneldir." yanıtı vermiştir. Ancak görüşme yapılan öğrencilerden payı ve paydayı sadeleştirip doğru cevabı verenler de olmuştur.
- $\frac{\pi}{3}$ sayısını katılımcıların %67'si irrasyonel olarak sınıflamıştır. π sayısında bu oran %81 iken bir düşüş gerçekleşmiştir. Bazı öğrenciler ifadenin kesirli olmasından dolayı rasyonel sayı gibi düşünmüş olabilir. Rasyonel diyenlerin oranının π sayısında % 7 iken bu sayıda %26'ya çıktığı görülmektedir. Nitekim **Suat B.** π için irrasyonel derken $\frac{\pi}{3}$ için rasyonel demiştir. Nedeni sorulduğunda, "Çünkü bu sayı kesirli yazılmıştır. Payda da 0 olmadığına göre sayı rasyoneldir." şeklinde açıklama yapmıştır.
- 4,4793512853 sayısı ondalık kısmı sonlu olan bir rasyonel sayıdır. 3,14 sayısında rasyonel diyenlerin oranı %65 iken bu sayıda oran %45'e

düşmüştür. Aynı zamanda bu sayıya irrasyonel diyenlerin oranının da %45 olduğu görülmektedir. Öğrencilerin ondalık kısımda tekrar eden bir sayı olmadığını görmeleri sonlu olup olmadığına bakmadan irrasyonel sayıdır yorumu yapmalarına neden olmuş olabilir.

Ondalık biçimde gösterilen ve ondalık kısmı sonsuza giden irrasyonel ve rasyonel sayılarda sınıflama yaparken öğrencilerin zorlandıkları görülmektedir. 0,123123123… sayısı ve 0,12345678910… şeklinde verilen iki sayının rasyonelliğinin ve irrasyonelliğinin sorulduğu soruya verilen cevapların dağılımı Tablo 14'de verilmiştir. + işareti doğru bir açıklamayla doğru cevabın verildiğini gösterirken – işareti yapılan açıklamanın doğru olmadığını göstermektedir.

Tablo 14

0,123123123… ve 0,123456… Sayılarının Sınıflandırılmasına İlişkin Soruda Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf)

Yanıtlar		**f , %**	
0,123123123…	*Rasyoneldir +*	*29 (%50,00)*	*37 (%63,79)*
	Rasyoneldir -	*8 (%13,79)*	
	İrrasyoneldir	19 (%32,76)	19 (%32,76)
	Yanıt Yok	2 (%3,45)	2 (%3,45)
0,12345678910…	*İrrasyoneldir +*	*23 (%39,66)*	*42 (%72,41)*
	İrrasyoneldir -	*19 (%32,76)*	
	Rasyoneldir	11 (%18,97)	11 (%18,97)
	Yanıt Yok	5 (%8,62)	5 (%8,62)
Toplam		58 (%100)	

Tablo 14'e bakıldığında 0,123123123… devirli sayısına rasyoneldir diyen öğrencilerin oranının %64 olduğu görülmektedir. Ancak rasyonel sayı olduğunu doğru bir açıklama yaparak belirten öğrencilerin oranı %50'dir. 0,12345678910…

sayısına ise öğrencilerin %72'si irrasyonel demişlerdir. Ancak doğru açıklama yapanların oranı %40'ta kalmıştır. Yapılan açıklamalarda dikkat çekici yanılgılardan bazıları şunlardır:

- 0,123123123… sayısı irrasyonel bir sayıdır. Çünkü sonsuza gitmektedir.
- 0,123456789… sayısı ondalık bir sayıdır. Bu nedenle rasyoneldir.
- 0,123456789… sayısı belli bir kurala göre ilerlemektedir. Kuralını bildiğimiz için bu sayı rasyonel bir sayıdır.

Görüldüğü gibi bazı kavram yanılgıları öğrencilerin sayıları yanlış sınıflandırmasına neden olmaktadır. Öğrencilerin bu iki soruyu birlikte verdikleri yanıtların dağılımı Tablo 15'de görülmektedir. İlk sıradaki yanıt 0,123123123… sayısına verilen ikinci sıradaki yanıt ise 0,123456789… sayısına verilen yanıttır. Doğru cevap italik yazılmıştır.

Tablo 15

"0,123123123… ve 0,123456789… Sayıları İrrasyonel midir?" Sorusuna Verilen Öğrenci Yanıtlarının Birlikte Değerlendirilmesi (8.Sınıf)

Yanıtlar	**f , %**
Evet- Evet	13 (%22,41)
Hayır-Hayır	7 (%12,07)
Evet-Hayır	4 (%6,90)
Hayır-Evet	*29 (%50,00)*
Yanıt yok	5 (%8,62)
Toplam	58 (%100)

Tablo incelendiğinde öğrencilerin yarısının sayıları doğru olarak sınıfladığı görülmektedir. İkinci yüksek oranın %22 ile iki sayıyı da irrasyoneldir diye belirtenlerden oluştuğu görülmektedir. İki sayının da ondalık kısmının sonsuza gitmesinin bu orana neden olduğu düşünülebilir. Görüşme yapılan öğrencilerden **Merve B.** iki sayının da rasyonel olduğunu çünkü belli bir kurala göre ilerlediğini savunmuştur.

4.1.4. Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin π Sayısının Değerine İlişkin Algıları

Π sayısı irrasyonel olduğundan ondalık kısmı sonsuza giden ancak hiçbir zaman devretmeyen bir sayıdır. 3,14159… şeklinde sonsuza kadar devam eden bir ondalık açılıma eşittir. Öğrencilerin daha çok 3 veya 3,14 olarak kullandığı π sayısının değeriyle ilgili yanıtları Tablo 16'daki gibidir.

Tablo 16

Π Sayısının Değerine İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf)

Yanıtlar	f , %
π =3	13 (%22,41)
π ≈ 3	*44 (%75,86)*
π =3,14	5 (%8,62)
π ≈3,14	*53 (%91,34)*
π =3,14159…	*15 (%25,86)*
π ≈3,14159…	43 (%74,14)

Tablo incelendiğinde öğrencilerin %91'inin π sayısının 3,14'e yaklaşık olarak eşit olduğunu düşünmelerine rağmen 3'e yaklaşık eşit diyenlerin oranının %76'da kaldığı görülmektedir. Öğrencilerin sorularda daha çok π sayısını 3 olarak alması ve 3,14'ü kullanmaması bu düşüşe neden olmuş olabilir. Ayrıca π sayısının 3,14159… şeklinde devam eden ondalık açınımına eşit olduğunu söyleyen öğrencilerin oranının %26'da kaldığı görülmektedir. Π sayısının 3,14159… şeklinde sonsuza devam eden sayıya eşit olduğunu belirten öğrencilerin π sayısını nesneleştirdiği (object) söylenebilir. Ancak yaklaşık olarak eşit olduğunu belirten öğrencilerin π sayısını ondalık açılımıyla birlikte bütün olarak görmediği ve bir süreç (process) olarak algıladığı düşünülebilir. Çünkü çevrenin çapa bölümü olan π sayısı bölme işlemi baz alındığında bir süreçtir, ancak kendi başına π sayısı bir irrasyonel sayı olarak nesnedir.

4.1.5. Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayıların Ondalık ve Köklü Gösterimine İlişkin Algıları

Bazı öğrencilerde irrasyonel sayı kavramına ilişkin ondalık sayı kavram imgesi ağır basmakta iken bazılarında ise köklü sayı kavram imgesi ağır basmaktadır. İrrasyonel sayıların tamamının bir ondalık açılıma sahip olmadığı yanılgısına sahip öğrenciler mevcuttur. Tablo 17'de "İrrasyonel sayıların tamamı ondalık biçimde yazılabilir mi?" sorusuyla ilgili öğrenci yanıtları görülmektedir.

Tablo 17

"İrrasyonel Sayıların Tamamı Ondalık Biçimde Yazılabilir mi?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı

Yanıtlar	**f , %**
Evet yazılabilir	*18 (%31,03)*
Hayır yazılamaz	38 (%65,52)
Yanıt yok	2 (%3,45)
Toplam	**58 (%100)**

Tablo incelendiğinde öğrencilerin %66'sının her irrasyonel sayının ondalık bir açılımı olmadığı düşüncesinde olduğu görülmektedir. Bu konuda 8.sınıf öğrencilerindeki yanılgının nedenlerinden birinin kök alma işlemi üzerinde derslerde yeterince durulmaması olduğu düşünülebilir. Ders kitapları incelendiğinde köklü sayıların yaklaşık değerlerinin hesaplanmasında ondalık açılıma gidildiği görülmektedir. Ancak derslerde en yakın tam kare sayıdan yola çıkarak hangi tam sayıya yakın olduğunun bulunması ile sınırlı kalınması bu yanılgıya neden olmuş olabilir. "Hayır, yazılamaz" diyen öğrencilerin verdikleri örneklere bakıldığında köklü sayı kavram imgesinin ağır bastığı görülmektedir:

- $\sqrt{3}$ sayısı ondalık olarak yazılamaz, yazılabilseydi sayı rasyonel olurdu.
- İrrasyonel sayıların tamamının ondalık açılımı yoktur. Örneğin π sayısının ondalık açılımı vardır ancak $\sqrt{5}$ sayısının ondalık açılımı yoktur.

Ondalık gösterimle ilgili yanılgıya sahip öğrenciler çok fazla sayıda olmasına rağmen, köklü gösterim ve irrasyonellikle ilgili yanılgıya sahip öğrenciler daha az sayıdadır. "Köklü sayıların tamamı irrasyonel sayı mıdır?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların dağılımı Tablo 18'de gösterilmektedir.

Tablo 18

"Köklü Sayıların Tamamı İrrasyonel Sayı Mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf)

Yanıtlar	**f , %**
Evet irrasyoneldir	7 (%12,07)
Hayır irrasyonel değildir (örnek vererek)	*43 (%74,14)*
Hayır irrasyonel değildir (örnek vermeden)	8 (%13,79)
Toplam	**58 (%100)**

Tablo incelendiğinde öğrencilerin %74'ünün köklü sayılar arasında irrasyonel olmayan sayıların da olduğunu bildiğini söyleyebiliriz. Bu öğrencilerin tamamı tam kare ifadelerin köklerinin olduğu örnekler vermişlerdir. "Tüm köklü sayılar irrasyoneldir." şeklinde düşünen öğrencilerin de olduğu (%12,07) görülmektedir.

4.1.6. Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayıların ve Rasyonel Sayıların Yoğunluğuna İlişkin Algıları

Sayı kümelerinin yoğunluğuna ortaokul düzeyinde girilmemektedir. Ancak öğrenciler akıl yürütmeyle yorum yapabilmektedir. Ayrıca ondalık sayı kavram imgesi ağır basan öğrencilerin rasyonel ve irrasyonel sayıların yoğunluğuyla ilgili daha doğru tahminler yürütebileceği düşünülebilir. "Hangisinden daha fazla vardır rasyonel sayı mı, irrasyonel sayı mı?" şeklindeki soruya öğrencilerin verdiği yanıtlar Tablo 19'daki gibidir.

Tablo 19

"Hangisinden Daha Fazla Vardır, Rasyonel Sayı mı İrrasyonel Sayı mı?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı

Yanıtlar	f	%
Rasyonel Sayı	**26**	**44,82**
İrrasyonel Sayı	***19***	***32,76***
Eşitlerdir	**9**	**15,52**
Yanıt Yok	**4**	**6,90**
Toplam	**58**	**100**

Tablo incelendiğinde öğrencilerin %45'inin rasyonel sayıların daha fazla olacağı kanısında olduğu görülmektedir. Öğrencilerin 8.sınıfa kadar sürekli rasyonel sayılarla çalışmaları onları bu düşünceye götürmüş olabilir. Bazı yazılı öğrenci yanıtları şunlardır:

- Rasyonel sayılar daha fazla, çünkü köklüler negatif olmaz. Ama rasyonel sayılar da negatifler de vardır.
- Rasyonel sayılar, çünkü onların hepsi sayı doğrusunda gösterilir. Ancak irrasyonel sayıların hepsi sayı doğrusunda gösterilmezler.
- İkisi de sonsuzdur ama köklü sayılardan daha az vardır. Rasyonel sayılarda ise payı da paydayı da sürekli değiştirebiliriz. Negatifleri de vardır. Bu nedenle rasyoneller daha çoktur

- Rasyonel sayılar tabi ki daha çoktur. Çünkü tam sayılar da, doğal sayılar da, kesirli sayılar da rasyonel sayılara girer. İrrasyonel sayı kümesine ise sadece irrasyonel sayılar girer.

Verilen yanıtların ilkine bakıldığında öğrencilerin köklü sayıların içinin negatif olamayacağından yola çıkarak yanılgıya düştükleri görülmektedir. İkinci örnekte ise sayı doğrusunda irrasyonel sayıların gösterilemeyeceğine ait bir yanılgı vardır. Üçüncü ve dördüncü örnekteki cevapları veren öğrenciler için öğrenciye sayısal denklik hissi yaratacak örneklerle açıklama yapılabilir. Nitekim bu öğrencilerin yanlış bilgisi yoktur fakat yaklaşımları dar kapsamlıdır.

Öğrencilerin %33'ü irrasyonel sayılar daha çok yanıtını vermişlerdir. Bu şekilde düşünen bazı öğrencilerin yanıtları şunlardır:

- İrrasyoneller daha çoktur çünkü rasyonel sayılar irrasyonel sayıların alt kümesidir.
- İrrasyoneller daha çoktur. Çünkü ondalık kısmını istediğimiz gibi değiştirebiliriz.
- Tam kare sayılar normal sayılar içinde azdır. Bu nedenle tüm kareköklü sayıları düşününce irrasyonel sayılar daha fazla diyebiliriz.

Verilen örneklerden ilki bilgi yanlışından kaynaklanmaktadır. İkinci örnek ise daha çok ondalık kavram imgesi ağır basan öğrencilerin verebileceği bir yanıtı göstermektedir. Ondalık kısımdaki çeşitliliği düşünen öğrenciler bu düşünceye sahip olmuşlardır. Üçüncü örnek ise köklü sayı kavram imgesi ağır basan öğrencilerin daha çok verdiği yanıtlardandır. Tam kare sayıların azlığından yola çıkarak öğrenciler de irrasyonel sayıların fazlalığı düşüncesi oluşmuştur. Öğrencilerin % 16'sı iki sayı kümesinin de eleman sayısının eşit olduğunu düşünmüşlerdir. Öğrencilerin açıklamalarına bakarsak, ağır basan düşünce rasyonel sayıların da irrasyonel sayıların da sonsuz olduğu bu nedenle eşit oldukları düşüncesidir.

Görüşme yapılan öğrencilerden **Merve B.** "Rasyonel sayılar daha fazladır çünkü irrasyoneller kesirli yazılamazlar. Rasyonel sayılar ise her türlü yazılır." yanıtını verirken **Selda Ö.** "Rasyonel sayıların içinde ondalık sayılar vardır, kesirli sayılar vardır hatta köklü sayılardan da bazıları vardır. Bu nedenle rasyonel sayılar

daha fazladır." yanıtını vermiştir. İki öğrenci de sayıların temsillerinden yola çıkarak bu yanılgıya düşmüşlerdir. **Simge D.** ise "İlk önce ikisi de sonsuz olduğu için eşit diye düşündüm ancak rasyonel sayıların içinde ondalık kısmı sonlu olanlar var, ondalık kısmı devirli olanlar da var ancak irrasyonel sayılar sadece ondalık kısmı düzensiz olan sayılardan oluşuyor. Bu nedenle bence rasyonel sayılar daha fazladır. " şeklinde açıklama yapmıştır. Simge, ondalık temsile odaklanmasına rağmen doğru yanıta ulaşamamıştır. **Özge Ö**. isimli öğrenci "İrrasyonel sayılar daha fazladır çünkü ondalık kısmı düzensiz olduğu için istediğimiz basamağını istediğimiz şekilde değiştirerek yeni sayı oluşturabiliriz. Ama rasyonel sayılarda devrettiği için hep aynı şekilde gider." açıklamasıyla hem ondalık sayılara odaklanmış hem de iyi bir yaklaşımla irrasyonel sayıların daha fazla olduğu sonucuna ulaşmıştır.

İki irrasyonel sayı arasında bir rasyonel sayının ya da irrasyonel sayının bulunup bulunamayacağı sorunu öğrencilerin sayı kümelerinin yoğunluğu konusundaki algılarını da ortaya koyabilir. "İki irrasyonel sayı arasında her zaman bir rasyonel sayı var mıdır?" ve "İki irrasyonel sayı arasında her zaman bir irrasyonel sayı var mıdır?" sorularına verilen cevaplar Tablo 20 ve Tablo 21' deki gibidir. + işareti örneklerle ve açıklamalarla doğru yanıt veren öğrencileri göstermektedir.

Tablo 20

"İki İrrasyonel Sayı Arasında Her Zaman Bir Rasyonel Sayı Var mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf)

Yanıtlar	**f**	**%**
Evet +	*0*	*0*
Evet – (açıklama yapmadan)	*23*	*39,65*
Hayır	34	58,62
Yanıt Yok	1	1,72
Toplam	**58**	**100**

Tablo 21

"İki İrrasyonel Sayı Arasında Her Zaman Bir İrrasyonel Sayı Var mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (8.Sınıf)

Yanıtlar	f	%
Evet +	*2*	*3,45*
Evet – (açıklama yapmadan)	*30*	*51,72*
Hayır	24	41,38
Yanıt Yok	2	3,45
Toplam	**58**	**100**

Tablo 20 incelendiğinde öğrencilerin %59'unun iki irrasyonel sayı arasında her zaman rasyonel sayı bulunamayacağı düşüncesinde oldukları görülmektedir. Öğrencilerin açıklamalarında ise "her zaman" kelimesine vurgu yapılmış ve "İki irrasyonel arasında rasyonel bulunabiliyor ancak bu her zaman mümkün olmayabilir, mutlaka arasında rasyonel olmayan sayılar da vardır." düşüncesi ön plana çıkmıştır. Görüşme yapılan öğrencilerden de bu düşüncede olanlar vardır. Bu öğrencilerden biri olan **Simge D**. "$\sqrt{3}$-$\sqrt{5}$ arasında rasyonel sayı vardır ancak $\sqrt{5}$-$\sqrt{7}$ arasında rasyonel sayı yoktur. Yani her zaman bulunur diyemeyiz." şeklinde açıklama yapmıştır. "Evet rasyonel sayı bulunabilir" diyen öğrenci oranının ise %40 olduğu görülmektedir. Ancak bu öğrencilerden hiçbiri mantıklı açıklama yapamamışlardır. Tablo 21 incelendiğinde "İki irrasyonel sayı arasında her zaman irrasyonel sayı vardır" diyen öğrenci oranının %55 olduğu görülmektedir. Ancak sadece 2 öğrenci doğru bir açıklama yapabilmiştir. Bunlardan biri olan **Özge Ö.** "Köklü sayı olarak alsak $\sqrt{2}$-$\sqrt{3}$ gibi aralarında olan $\sqrt{2{,}5}$ sayısı irrasyoneldir. Ondalık olarak alsak zaten rahatlıkla aralarında sayı bulabiliriz. Bu nedenle iki irrasyonel arasında irrasyonel sayı bulunabilir." yanıtını vermiştir.

Verilen iki sayı arasında irrasyonel bir sayının bulunup bulunamayacağına ilişkin öğrenci düşünceleri, Vamvakoussi ve Vosniadou (2004) tarafından rasyonel sayılar için ortaya atılmış olan Tablo 22'de yer alan kavramsal çerçeveden yararlanılarak sınıflandırılabilir.

Tablo 22

Vamvakoussi ve Vosniadou (2004) Tarafından Kullanılan Kategoriler

Cevap Kategorileri	**0,005-0,006**	**3/8-5/8**	**0,001-0,01**	**5/8-8,5**	**2/5-4/7**
İlkel Ayrıklık	Başka sayı yoktur	Sadece 1 sayı vardır	Sonlu sayıda vardır(≥0)	-	-
Gelişmiş Ayrıklık	Sonlu sayıda vardır(≥0)	Sonlu sayıda vardır(≥1)	Sonlu sayıda vardır(≥0)	-	-
Ayrıklık-yoğunluk	Sonsuz sayıda cevabı bazı sorularda görülür fakat hepsinde değil.				
İlkel Yoğunluk	Sonsuz sayıda sayı vardır	Sonsuz sayıda sayı vardır	Sonsuz sayıda sayı vardır	Sonsuz sayıda sayı vardır (Birini diğeri cinsinden ifade etme gereği duyar)	Sonsuz sayıda sayı vardır (Payda eşitleyerek karar verir)
Sofistike Yoğunluk	Sonsuz sayıda sayı vardır	Sonsuz sayıda sayı vardır.	Sonsuz sayıda sayı vardır	Sonsuz sayıda sayı vardır (Birini diğeri cinsinden ifade etme gereği duymaz)	Sonsuz sayıda sayı vardır (Payda eşitlemeye gerek duymaz)

(Aktaran: Aktaş, Apaydın ve Aktaş, 2014)

Bu kavramsal çerçeveden yararlanılarak irrasyonel sayılar için yeni bir sınıflama yapılmıştır:

Tablo 23

İrrasyonel Sayıların Yoğunluğuna İlişkin Kategoriler

Cevap Kategorileri	**2-5**	**10,45-10,46**	**$\sqrt{3}$-$\sqrt{5}$**	**1/5-1/4**
İlkel Ayrıklık	Hayır irrasyonel sayı yok	Hayır irrasyonel sayı yok	Hayır irrasyonel sayı yok	Hayır irrasyonel sayı yok
Belirsiz Düzey	Evet irrasyonel sayı var, ancak sayısı belirsiz	Evet irrasyonel sayı var, ancak sayısı belirsiz	Evet irrasyonel sayı var, ancak sayısı belirsiz	Evet irrasyonel sayı var, ancak sayısı belirsiz
Gelişmiş Ayrıklık 1.Düzey	Sonlu sayıda irrasyonel sayı var Örnek yok	Sonlu sayıda irrasyonel sayı var Örnek yok	Sonlu sayıda irrasyonel sayı var Örnek yok	Sonlu sayıda irrasyonel sayı var Örnek yok
Gelişmiş Ayrıklık 2.Düzey	Sonlu sayıda irrasyonel sayı var Örnek var	Sonlu sayıda irrasyonel sayı var Örnek var	Sonlu sayıda irrasyonel sayı var Örnek var	Sonlu sayıda irrasyonel sayı var Örnek var
Yoğunluk 1.Düzey	Sonsuz sayıda irrasyonel sayı vardır Örnek yok	Sonsuz sayıda irrasyonel sayı vardır Örnek yok	Sonsuz sayıda irrasyonel sayı vardır Örnek yok	Sonsuz sayıda irrasyonel sayı vardır Örnek yok
Yoğunluk 2.Düzey	Sonsuz sayıda irrasyonel sayı var Örnek var	Sonsuz sayıda irrasyonel sayı var Örnek var	Sonsuz sayıda irrasyonel sayı var Örnek var	Sonsuz sayıda irrasyonel sayı var Örnek var

Bu oluşturduğumuz irrasyonel sayıların yoğunluğuna ilişkin kategorilere göre katılımcıların dağılımı Tablo 24'deki gibidir:

Tablo 24

Öğrencilerin İrrasyonel Sayıların Yoğunluğuna İlişkin Kategorilere Göre Dağılımı (8.Sınıf)

Cevap Kategorileri	2-5 f (%)	10,45-10,46 f (%)	$\sqrt{3}$-$\sqrt{5}$ f (%)	1/5-1/4 f (%)
İlkel Ayrıklık	9 (%15,52)	24 (%41,38)	27 (%46,55)	31 (%53,44)
Belirsiz Düzey	1 (%1,72)	7 (%12,07)	4 (%6,90)	3 (%5,17)
Gelişmiş Ayrıklık 1.Düzey	19 (%32,76)	7 (%12,07)	10 (%17,24)	5 (%8,62)
Gelişmiş Ayrıklık 2.Düzey	10 (%17,24)	4 (%6,90)	1 (%1,72)	3 (%5,17)
Yoğunluk 1.Düzey	4 (%6,90)	10 (%17,24)	1 (%1,72)	3 (%5,17)
Yoğunluk 2.Düzey	15 (%25,86)	6 (%10,34)	15 (%25,86)	13 (%22,41)
TOPLAM	58 (%100)	58 (%100)	58 (%100)	58 (%100)

Tablo 24 incelendiğinde öğrencilerin %83'ünün 2 ile 5 arasında irrasyonel sayının olduğunu düşündüğü görülmektedir. Ancak öğrencilerin yalnızca %33'ü yoğunluk düzeylerine ulaşmıştır.2 ile 5 arasında örnek bir irrasyonel sayı verebilen öğrenciler (2.Düzey öğrenciler) grubun %43'ünü oluşturmaktadır. Π sayısı ve $\sqrt{5}$ gibi sayılar bu örneklerden bazılarıdır. 10,45 ile 10,46 ondalık sayılarının aralığında ise durumun daha farklı olduğu görülmektedir. Öğrencilerin %41'i ilkel ayrıklık

düzeyinde kalmış, yani bu iki sayı arasında irrasyonel sayı yoktur demiştir. Bu yüksek oranın nedeni olarak irrasyonel sayılarda ondalık sayı kavram imgesine sahip öğrencilerin azlığı düşünülebilir. Yoğunluk seviyesinde olan öğrencilerin oranının %28, örnek bulabilen 2.Düzey öğrencilerin oranının da %17 olduğu görülmektedir. $\sqrt{3}$ ve$\sqrt{5}$ arasında ise öğrencilerin %47'si ilkel ayrıklık düzeyindedir. Yoğunluk seviyesinde olan öğrencilerin %27, 2.düzey öğrencilerin ise %28 olduğu görülmektedir. Bu oranın yüksekliği öğrencilerin ondalık sayılara göre köklü iki sayı arasında başka bir irrasyonel sayı bulmada daha başarılı olduğunu göstermektedir. "1/5 ve 1/4 şeklindeki iki kesirli sayının arasında irrasyonel sayı yoktur." diyen öğrencilerin tüm grubun %53'ü olduğu görülmektedir. Bu diğer sayı ikililerindeki ilkel ayrıklık yüzdelerine göre daha yüksek bir orandır. Yoğunluk düzeyine ulaşan öğrencilerin oranı da 2. düzey olan öğrencilerin oranı da %28'dir. Örnek veren bu öğrencilerin bir kısmı iki sayının da karelerini alarak aralarında bir kareköklü sayı söylerken bir kısmı da iki sayıyı da ondalık olarak yazmış ve ondalık bir irrasyonel sayı söylemiştir.

Doğru örnek veren öğrencilerin kullandıkları temsil biçimleri incelenirse aşağıdaki gibi bir dağılım bulunmaktadır:

- 2-5 aralığında irrasyonel sayı örneği verebilen (2.seviye) 25 öğrenciden 14'ü (%56) köklü sayı, 4'ü (%16) ondalık gösterimli bir sayı ve 7'si (%28) π sayısını örnek göstermiştir.
- 10,45-10,46 aralığında doğru örnek verebilen 10 öğrencinin tamamı ondalık olarak örnek vermiştir. Köklü olarak örnek veren öğrenci olmamıştır
- $\sqrt{3}$-$\sqrt{5}$ arasında 2.seviye öğrenci sayısı 16'dır. Bu öğrencilerin vermiş oldukları örneklere bakıldığında 15 tanesinin köklü, 1 tanesinin ise ondalık gösterimle ifade edilmiş sayı olduğu göze çarpmaktadır. Ondalık gösterimle örnek veren öğrenci önce köklü sayıların yaklaşık değerlerini almış daha sonra bunların arasında örnek bir sayı göstermiştir.
- $\frac{1}{5}$ve$\frac{1}{4}$ sayıları arasında doğru örnek veren 16 öğrenciden 13 tanesi her iki sayının da karesini alarak aralarında köklü bir irrasyonel sayı bulmuş, 3

öğrenci ise ondalık temsili kullanmıştır. Bunlardan 1 tanesi iki sayıyı da 0,20 ve 0,25 olarak ondalık gösterimle ifade etmiş daha sonra aralarında bir irrasyonel sayı örneği vermişlerdir. Diğer ikisi ise $\frac{1}{4,134528...}$ şeklinde sayı örneği vermiştir.

4.1.7. Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin İki İrrasyonel Sayının Toplanması ve Çarpılması ile İlgili Güçlükleri

İki rasyonel sayının toplandığında ya da çarpıldığında sonucun daima rasyonel çıkması, iki tam sayının toplandığında veya çarpıldığında sonucun bir tam sayı çıkması gibi nedenlerle öğrencilerde irrasyonel iki sayının toplanması veya çarpılmasının sonucunda da irrasyonel sayı çıkmak zorunda olması gerektiği gibi bir algı oluşabilmektedir. Tablo 25'de "İki irrasyonel sayının toplamı rasyonel sayı olabilir mi?" sorusuna, Tablo 26'da ise "İki irrasyonel sayının çarpımı rasyonel sayı olabilir mi?" sorusuna öğrencilerin verdikleri yanıtlar görülmektedir.

Tablo 25

"İki İrrasyonel Sayının Toplamı Rasyonel Sayı Olabilir mi?" Sorusuna Öğrencilerin Verdiği Yanıtların Dağılımı (8.Sınıf)

Yanıtlar	f	%
Evet + *(Örneklerle destekleyenler)*	*4*	*6,90*
Evet – *(Örnek veremeyenler)*	*19*	*32,76*
Hayır olamaz	35	60,34
TOPLAM	58	100

Tablo incelendiğinde öğrencilerin %93'ünün iki irrasyonel sayının toplamının rasyonel sayı olabileceğini gösterir bir örnek veremedikleri görülmektedir. Öğrencilerin %60'ının ise "İki irrasyonel sayının toplamı yine irrasyoneldir." düşüncesinde olduğu görülmektedir. Bazı öğrencilerin verdikleri yanlış cevaplar aşağıdaki gibidir:

- İki irrasyonel sayı toplanmaz ki, daha doğrusu kökün içi aynıysa toplanır. Ama onda da sadece katsayı değişeceği için sonuç yine irrasyonel olur.
- $\sqrt{2}$ ile $\sqrt{2}$'yi toplarsak $\sqrt{4}$ eder o da 2 olarak çıkar. Yani rasyonel sayı olabilir. **(Selda Ö.)**
- Ondalık kısmı devretmeden giden iki sayısı toplarsak yine ondalık kısmı devretmeyen bir sayı çıkar. O yüzden iki irrasyonel sayının toplamı yine irrasyonel sayı olur.

İlk cevaba bakıldığında öğrencinin negatif katsayıları düşünmediği görülmektedir. Bu da yanlış bir yoruma öğrenciyi sevk etmiştir. İkinci cevapta ise öğrenci köklü sayılarda toplama işlemini bilmediği için yanlış bir yargıya varmıştır. Üçüncü örnekte ise sezgisel olarak öğrencilerde sonsuza giden iki ondalık açılımın toplanamayacağı veya toplansa bile yine devretmeden sonsuza gideceği gibi bir düşüncenin varlığı görülmektedir. Görüşme yapılan öğrencilerden **Özge Ö.** " $\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ olur o da $\sqrt{12}$'ye eşittir. Ama $\sqrt{12}$ irrasyoneldir. $\sqrt{3}$'de olmadı ama başka sayılar da olabilir. Kökün içi aynı olmazsa toplayamayız zaten ama kökün içi aynıysa katsayıları toplayabiliriz. Bunu kökün içine sokup oluşan yeni köklü sayı rasyonel mi diye bakmak gerekir. Yani bence toplamları rasyonel olan irrasyonel sayılar vardır." şeklinde açıklama yapmıştır. Özge doğru cevabı bulmasına karşın izlediği yol doğru değildir. Köklü sayılarla ilgili farklı örnekler de sorularak yaptığı yanlışın farkına varması sağlanmıştır.

Tablo 26

"İki İrrasyonel Sayının Çarpımı Rasyonel Sayı Olabilir mi?" Sorusuna Öğrencilerin Verdiği Yanıtların Dağılımı (8.Sınıf)

Yanıtlar	f	%
Evet + *(Örneklerle destekleyenler)*	*31*	*53,44*
Evet – *(Örnek veremeyenler)*	*9*	*15,52*
Hayır olamaz	17	29,31
Yanıt Yok	1	1,72
TOPLAM	58	100

Toplamadakinin aksine çarpmada doğru cevap veren öğrencilerin daha fazla olduğu Tablo 26'dan yola çıkılarak söylenebilir. Öğrencilerin %69'unun iki irrasyonel sayının çarpımının rasyonel sayı olabileceği düşüncesinde olduğu görülmektedir.%29'u ise çeşitli nedenlerle aksini düşünmektedir. Bunlardan bir kısmı iki tane kareköklü sayı örneği vermiş çarpımlarının da irrasyonel sayı olduğunu söyleyerek yanlış bir genellemeye gitmiştir. Bir kısım öğrencide de ondalık açılımlardan yola çıkılarak, sonsuz basamaklı ve devretmeyen iki irrasyonel sayının çarpımında sonucun yine devretmeyen bir ondalık sayının çıkacağı düşüncesi mevcuttur.

Aynı iki irrasyonel sayının köklü biçimde toplanması ve çarpılması ile bu sayıların ondalık biçimde verilerek toplanması veya çarpılmasında öğrenciler farklı yaklaşımlarda bulunabilmektedir. Örneğin $\sqrt{2}$ sayısının $\sqrt{2}$ ile toplamı ya da çarpılması ile $\sqrt{2}$'nin ondalık açılımının 1,41421… sayısının kendisi ile yani 1,41421… sayısının toplanmasıyla veya çarpılmasıyla ilgili öğrencinin farklı görüşleri olabilmektedir. Öğrencilerin 1,41421… sayısını $\sqrt{2}$ olarak nesneye

dönüştürememesi bu güçlüğe neden olmaktadır. Tablo 27'de yer alan "O" harfi sayının ondalık gösterimini "K" harfi ise köklü ifadesini göstermektedir.

Tablo 27

Ondalık ve Köklü Gösterimli İki Sayının Toplanması veya Çarpılmasıyla İlgili Öğrencilerin Verdiği Yanıtların Dağılımı (8.Sınıf)

Yanıtlar		f	%
OxO	*=2*	*10*	*17,24*
	≈2	47	81,03
O+O	*=2,8284...*	*24*	*41,38*
	≈2,8284…	33	56,89
K+K	*=2,8284...*	*16*	*27,58*
	≈2,8284…	41	70,68
K+K	$=2\sqrt{2}$	*49*	*84,48*
	$\approx 2\sqrt{2}$	8	13,79

Tablo incelendiğinde ondalık olarak verilen $\sqrt{2}$ sayısının kendisiyle çarpımının 2'ye eşit olamayacağını yaklaşık olarak eşit olacağını düşünen öğrenci oranının %81 olduğu görülmektedir. Öğrencilerin verdikleri cevaplarda "$\sqrt{2}$'nin açılımı da olsa bu şekilde sonu belirsiz bir sayıyı kendisiyle çarparsak 2 gibi bir tam sayı çıkmaz." görüşü yaygındır. Bu da verilen irrasyonel sayıyı *süreç*ten çıkarıp *nesne* haline dönüştüremediklerini göstermektedir. $\sqrt{2}$'nin açılımı olan 1,41421… şeklinde devam eden sayının kendisiyle toplanması sonucunda 2,8284… gibi bir sayının tam olarak elde edilip edilemeyeceği sorusuna öğrencilerin %57'si "Yaklaşık olarak bulunabilir, tam olarak bulunamaz." yanıtı vermişlerdir. Sayının devretmemesi ve devamının bilinmemesi bu düşünceye sevk etmiş olabilir. "$\sqrt{2}$ sayısını köklü halde toplarsak 2,8284… sayısı tam olarak elde edilir mi?" sorusunda öğrencilerin %71'i "Elde edilemez." demiştir. Bunun nedeni $\sqrt{2}$ gibi aslında hem bir

irrasyonel sayı olarak *nesne* olan ve kök alma işlemi olarak düşündüğümüzde ise *süreç* olan yani ikisinin birleşimi (*procept*) olan bir kavramın nesne süreç ilişkisi bağlamında ilişkisinin anlaşılamaması olarak düşünülebilir. Son soru da $\sqrt{2}+\sqrt{2}$'nin $2\sqrt{2}$'ye tam olarak eşit olup olmayacağıydı. Diğer soruların aksine bu soruda öğrencilerin %84'ü 'tam olarak eşit bulunur' yanıtı vermiştir. Bu soruda farklı bir yaklaşımın gelmesi APOS teorisine göre inceleme yapmaya yönlendirmektedir.

İlk 3 soruda yaklaşık eşittir diyen ancak son soruda eşittir diyen öğrencilerin *eylem* basamağında hareket ettiği düşünülebilir. Çünkü sadece işleme odaklanıp ne süreci ne de bütünü görememektedirler. Bu şekilde 19 öğrenci (%32,76) mevcuttur. Ancak kesin bir yargıya ulaşmak görüşme yapmakla mümkün olmaktadır. İlk soruda yaklaşık olarak eşit diyen ancak ikinci ve son soruda eşittir diyen bir öğrencinin sayıyı süreç olarak algıladığı düşünülebilir. Bu da APOS teorisine göre incelendiğinde öğrencinin *süreç* basamağında olabileceğinin göstergeleridir. Bu şekilde 9 öğrenci (%15,52) mevcuttur. Tüm sorulara eşittir diyebilen öğrencilerin ise ondalık veya köklü bütün gösterimleriyle sayıyı bütün olarak gördükleri düşünülebilir. Bu da APOS teorisine göre onların sayıyı *nesneleştirebildiğini* gösterir. Bu şekilde yalnızca 5 öğrenci (%8,62) mevcuttur. Görüşme yapılan öğrencilerden **Merve B.**'nin, **Özge Ö**.'nün, **Selda Ö**.'nün eylem basamağında, **Simge D.** ve **Suat B.**'nin ise süreç basamağında olduğu görülmüştür.

4.2. Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayı Kavramına İlişkin Güçlükleri

Araştırmanın ikinci alt problemini "9.sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayı kavramına ilişkin yaşadığı güçlükler nelerdir?" sorusu oluşturmaktadır. İrrasyonel sayı kavramına ilişkin güçlükler de birinci alt problemdeki başlıklar altında incelenecektir.

4.2.1. Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Sayı Kümelerini Tanımlamalarıyla İlgili Güçlükleri

Bu bölümde 9.sınıf öğrencilerinin rasyonel sayı, irrasyonel sayı ve gerçek sayı ile ilgili kavram imgeleri araştırılmıştır. "Rasyonel sayı denildiğinde aklınıza neler gelmektedir?" sorusunun cevabına ilişkin öğrenci cevapları Tablo 28'de gösterilmiştir.

Tablo 28

"Rasyonel Sayı Denildiğinde Aklınıza Neler Gelmektedir?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtları (9.Sınıf)

Kavram	f	%
Pay- Payda- a/b- Kesir	32	64
Doğal Sayı-Tam Sayı	16	32
Sayılar	5	10
Karekök	15	30
Devirli Sayı	2	4
Ondalık Sayı	6	12
Örnek Bir Sayı (2/3 gibi)	8	16
Q sembolü	7	14
İşlemler	3	6
Gerçek Sayılar - R	12	24
İrrasyonel Olmayan	4	8
Sayı Doğrusu	2	4

Tablo incelendiğinde rasyonel sayı denildiğinde öğrencilerin en çok aklına kesirli gösterim geldiği görülmektedir. Öğrencilerin %64 ü kesirle ilgili kavramları yazmışlardır. Daha önce öğrenmiş oldukları doğal sayı ve tam sayı kavramlarını da öğrencilerin %32 si yazmışlardır. Rasyonel sayı denildiğinde karekök kavramının aklına geldiğini söyleyen öğrenciler %30 ile gerçek sayı kavramının aklına geldiğini söyleyen öğrenciler %24 ile azımsanmayacak sayıdadır. Öğrencilerde rasyonel sayı

ile ilgili kesirli sayı kavram imgesinin ağır bastığı görülmektedir. Ondalık sayı kavram imgesi daha geri planda kalmıştır.

"Rasyonel sayı nedir? Tanımlayınız." sorusuna 9.sınıf öğrencilerinden gelen cevaplar Tablo 29'da gösterilmiştir.

Tablo 29

Rasyonel Sayının Tanımı ile İlgili Verilen Yanıtlar (9.Sınıf)

Tanım	f	%
a/b şeklinde ifade edilebilen sayılar - Kesirli şekilde gösterilebilen sayılar	31	62
Kökten dışarı çıkabilen, kökten kurtulabilen sayılar	10	20
Ondalık kısmı sınırlı veya devirli olan sayılar	1	2
İrrasyonel olmayan sayılar	3	6
Yanlış Tanımlar / Tanım yok	12	24

Öğrencilerin vermiş oldukları tanımlara bakıldığında 9. Sınıf ders kitaplarında da yer aldığı gibi "a/b şeklinde ifade edilebilen sayılara rasyonel sayı denir." tanımı veya yakın tanımlar yapan öğrencilerin oranının %62 olduğu görülmektedir. Rasyonel sayı tanımını karşılamasa da ona işaret eden "kökten kurtulabilen sayılar" şeklindeki tanım öğrencilerin %20'si tarafından dile getirilmiştir. Rasyonel sayı tanımlarına bakıldığında öğrencilerde ondalık sayıdan ziyade kesirli sayı kavram imgesinin daha ağır bastığı söylenebilir. "Sayı doğrusunda gösterilebilen sayılardır.", "Köklü olmayan sayılardır", "Doğal sayılardır" ve "Negatif olmayan sayılardır" gibi yanlış tanımlar yapan öğrenciler de mevcuttur.

"Rasyonel sayı nedir? Tanımlayınız." sorusuna gelen cevaplar Tablo 30'da gösterilmiştir.

Tablo 30

Öğrencilerin Vermiş Oldukları Rasyonel Sayı Örnekleri (9.Sınıf)

Tanım	f	%
a/b şeklinde örnek verenler	41	82
Köklü ifadeyle örnek verenler	15	30
Tam sayı örnekleri verenler	28	56
Ondalık sayı örnekleri verenler	7	14
Yanlış örnek verenler/ Örnek vermeyenler	4	8

Tablo 30'da gösterilen öğrencilerin vermiş oldukları rasyonel sayı örneklerinin tipleri incelendiğinde öğrencilerin %82'sinin a/b şeklinde örnekler verdiği %56'sının ise tam sayı örnekleri verdiği görülmektedir. Ondalık sayı örnekleri veren öğrenci sayısının ise 7 olduğu ve azınlıkta kaldığı görülmektedir. Verilen örneklerden yola çıkarak rasyonel sayılarla ilgili öğrencilerin kavram imgelerinde kesirli ifadelerin ağır bastığı söylenebilir.

Bazı öğrenciler tek tip rasyonel sayı örnekleri verirken bazıları ise farklı temsillerde sayılar kullanmıştır. Öğrencilerin 15 tanesi (%30) sadece a/b şeklindeki örnekler verirken, sadece tam sayı örnekleri veren 3 kişi, sadece köklü sayı örneği veren 1 kişi bulunmaktadır. Hem tam sayı, hem a/b şeklinde kesirli bir sayı, hem ondalık sayı ve hem de köklü ifade örneklerini bir arada veren 2 kişi bulunmaktadır.

"İrrasyonel sayı denildiğinde aklınıza neler gelmektedir?" sorusuna öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlar Tablo 31'de yer almaktadır.

Tablo 31

İrrasyonel Sayı Denildiğinde Öğrencilerin Aklına Gelen Kavramlar (9.Sınıf)

Kavram	f	%
Köklü sayılar	32	64
Rasyonel olmayan sayı	11	22
Ondalık kısmı sonsuz/Ondalık sayı	17	34
Kesirli olmayan	5	10
π	15	30
e	7	14
Sayılar/Sayı kümeleri	6	12
Gerçek Sayı	8	16
Örnek bir sayı ($\sqrt{2}$ gibi)	13	26
İşlemler	4	8
Devirli Sayı	3	6
Tam Sayı	4	8
I sembolü	6	12
İşlemler	4	8
Bölünememe	5	10
Diğer	9	18

Tablo 31 incelendiğinde öğrencilerin %64'ünün irrasyonel sayı denildiğinde akıllarına köklü sayıların geldiği, %34'ünün ondalık sayıların geldiği ve %30'unun ise π sayısının geldiği görülmektedir. Rasyonel sayıların aksine kesirli sayılar veya kesirli olmayan sayılar gibi ifadeler kullanan öğrencilerin ise %10 ile azınlıkta kaldığı görülmektedir. Öğrenciler Euler sabiti (e) ile henüz karşılaşmadıkları halde 7 öğrenci (%14)'nin e sayısını da ifade ettikleri göze çarpmaktadır. Ayrıca 5 kişi (%10) karekökten kurtarmak üzere asal çarpanlara ayırmaktan yola çıkarak "bölünememe" ifadesini dile getirmiştir. İrrasyonel sayının tanımıyla ilgili öğrenci yanıtları ise Tablo 32'de verilmiştir.

Tablo 32

İrrasyonel Sayının Tanımı ile İlgili Verilen Yanıtlar (9. Sınıf)

Tanım		f	%
a/b şeklinde yazılamayan sayılardır		12	24
Rasyonel olmayan sayılardır		19	38
Ondalık kısmı düzensiz ve sonsuz olan sayılardır		7	14
Eksik Tanımlama	Karekökten tamamen kurtulamayan sayılardır	12	24
Yanlış Tanımlar	Gerçek olmayan sayılar	3	6
Yanlış Tanımlar	Ondalık kısmı sonsuz olan sayılar	2	4
Yanıtsız / Diğer yanlış tanımlar		5	10

Tablo incelendiğinde öğrencilerin %38'inin "rasyonel olmayan sayılar" tanımını kullandıkları görülmektedir. 9.sınıfta öğretim programına uygun olarak gerçek sayılardan önce kümeler konusunun işlendiği, tümleyen küme gibi kavramların öğrenildiği düşünüldüğünde bu tanımın daha çok yapılması doğal karşılanabilir. Öğrencilerin %24'eri kareköklü sayılardan ve a/b ifadesinden yola çıkarak tanım yapmışlardır. Ders kitabında geçmesine rağmen ondalık sayıdan yola çıkarak tanım yapan öğrenciler ise %14'te kalmıştır. Tamamen yanlış bilgiye sahip öğrencilerin verdikleri cevaplardan bazıları şunlardır:

- İrrasyonel sayılar gerçek olmayan sayılar demektir.
- Bir sayının ondalık kısmı sonsuz ise irrasyonel sayıdır.
- İrrasyonel sayılar küsüratlı sayılardır.
- Bölünemeyen sayılar veya sadece kendisine bölünen sayılar irrasyoneldir.
- Sayı doğrusunda yeri olmayan sayılara irrasyonel sayılar denir.

"İrrasyonel sayılar bölünemeyen sayılardır." tanımı yapan öğrencilerden biri olan **Ece Nur Ş.** ile yapılan görüşmede bölünemeyen sayı diyerek ne demek istediği

sorulmuştur. Ece Nur, "Bölünemeyen sayı… Yani çarpanlarına ayırıyoruz ya eğer sonunda sayı bölünemiyorsa yani çarpanlarına ayrılamıyorsa irrasyoneldir. Çünkü onlar kökten çıkamaz." yanıtını vermiştir. Bu cevaptan Ece Nur'un köklü sayılara odaklandığı ama kökten kurtulma ifadesini doğru bir şekilde anlatamadığı görülmektedir. Bir başka görüşme yapılan öğrenci **Zeynep E.** "İrrasyonel sayılar belirli kurala göre ilerlemeyen sayılardır" tanımını yapmıştır. Ne demek istendiği sorulduğunda da, "Ondalık kısmında bir kural yoksa sayı irrasyoneldir, ama kurallı ilerliyorsa sayı rasyoneldir" yanıtını vermiştir. "İrrasyonel sayılar deyince aklına ne geliyor?" sorusuna verdiği cevaplarda da **Zeynep E**.'nin hiç köklü sayılardan bahsetmediği görülmüştür. Bu nedenle bu öğrencideki irrasyonel sayı kavramında ondalık sayı kavram imgesinin ağır bastığı söylenebilir. İrrasyonel sayı deyince öğrencinin zihninde ondalık ifade edilmiş bir sayının geldiği vermiş olduğu cevaplardan anlaşılabilir. Bu öğrencide ondalık kavram imgesinin ağır basması daha sonraki bölümlerde de görüleceği gibi ona avantajlı veya dezavantajlı durumlar sağlamıştır. Ancak yanlış öğrenmelere ve öğrenme güçlüklerine de yol açtığı söylenebilir. Görüşme yapılan öğrencilerden **Deniz Ö., Büşra D.** ve **Onur B**.'de ise köklü sayı kavram imgesinin ağır bastığı söylenebilir. Bu öğrenciler tanımlarında da verdikleri örneklerde de köklü ifadeleri kullanmışlardır.

Öğrencilerin irrasyonel sayılarla ilgili kullandıkları temsillere bakarak kavram imgeleri ile ilgili yorum yapabiliriz. Tablo 33'de vermiş oldukları irrasyonel sayı örneklerinde kullanmış oldukları temsiller gösterilmektedir.

Tablo 33

Öğrencilerin Vermiş Oldukları İrrasyonel Sayı Örnekleri (9.Sınıf)

Tanım		**f**	**%**
Köklü sayı	İrrasyonel	35	70
	Rasyonel+İrrasyonel	1	2
Ondalık sayı	İrrasyonel	4	8
	Rasyonel+İrrasyonel	1	2
Köklü + Ondalık (İrrasyonel)		8	16
Yanlış örnek verenler / Örnek vermeyenler		1	2
Toplam		**50**	**100**

Öğrencilerin %88'inin köklü sayı temsilini, %26'sının ise ondalık sayı temsilini kullandıkları görülmektedir. İki temsili kullanarak da örnek veren öğrenciler vardır. Ama köklü sayı temsilinin daha çok kullanılması ve tanım yaparken de ondalık sayıdan ziyade köklü ifadelere yoğunlaşılması öğrencilerdeki köklü sayı kavram imgesinin ağırlıkta olduğunu düşündürebilir.

Öğrencilerin %68'i π sayısını örnekleri arasında vermiştir. Bunun yanı sıra öğrencilerin %14'ü e sayısını da örneklerinde göstermiştir. Euler sabiti 9.Sınıfta görülmemesine rağmen öğrencilerin irrasyonel sayı olduğunu dahi bilmesi ilginç gelebilir. Ancak ders öğretmeniyle yapılan görüşmede bu durumun nasıl olduğu sorulduğunda öğretmenin irrasyonel sayılara örnek verirken e sayısını da söylediği ortaya çıkmıştır. Öğretmen, Euler sabitini yaklaşık değeri 2,71 olan ama ondalık kısmı sonsuza giden bir irrasyonel sayı olarak ifade ettiğini belirtmiştir.

Öğrencilerin gerçek sayıyla ilgili tanımlamaları Tablo 34'de yer almaktadır.

Tablo 34

Gerçek Sayı Tanımı ile İlgili Verilen Yanıtlar (9.Sınıf)

Tanım		**f**	**%**
Tüm sayılardır - Bütün sayılardır		11	22
İrrasyonel ve Rasyonel sayıların birleşimidir		35	70
Sayı doğrusunu dolduran sayılardır		1	2
Yanlış Tanımlar	Gerçek sayılar tam sayılardır	1	2
Yanlış Tanımlar	İrrasyonel olmayan sayılardır	1	2
Yanlış Tanımlar	Kesirli yazılamayan sayılardır	1	2
Toplam		**50**	**100**

Öğrencilerin ders kitaplarında irrasyonel sayı ve rasyonel sayı kümesinin birleşimi olarak geçen gerçek sayının tanımı Tablo 34'de de görüldüğü üzere öğrencilerin büyük çoğunluğu tarafından kitaptaki gibi yapılmıştır. Öğrencilerin %22'si ise "bütün sayılar" şeklinde tanımlama yapmıştır. 9.sınıfta öğrencilerin karmaşık sayıları görmemesi nedeniyle bütün sayılar şeklindeki tanımlamasını haklı görebiliriz. 1 öğrencinin ise sayı doğrusunu dolduran sayılardır şeklindeki tanımını da doğru görebiliriz. Gerçek sayıları tam sayılarla, rasyonel sayılarla ve irrasyonel sayılarla karıştıran da birer öğrenci bulunmaktadır. Öğrencilerin vermiş oldukları örneklere Tablo 35'de bakıldığında %62'sinin irrasyonel sayılardan %84'ünün ise rasyonel sayılardan oluştuğu görülmektedir. Sadece rasyonel sayı veya tam sayı örneği veren öğrenciler grubun %22'sini oluştururken örnek vermeyen öğrenciler de göze çarpmaktadır.

Tablo 35

Öğrencilerin Vermiş Oldukları Gerçek Sayı Örnekleri (9.Sınıf)

Tanım	f	%
İrrasyonel+Rasyonel birlikte örnekler verenler	31	62
Sadece tam sayılardan örnek verenler	9	18
Sadece rasyonel sayılardan örnek verenler (Sadece tam sayı örnekleri verenler hariç)	2	4
Örnek vermeyenler	8	16

4.2.2. Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Sayı Kümelerinin Birbirleriyle Olan İlişkilerine Yönelik Güçlükleri

Öğrencilerin irrasyonel ve rasyonel sayı kümeleri arasındaki ilişkiyi ne derece anladıklarını ortaya koyma amacıyla sorulan "Hem *irrasyonel* hem de *rasyonel* olan sayı var mıdır?" sorusuna verilen cevapların dağılımı Tablo 36'da verilmiştir.

Tablo 36

"Hem İrrasyonel Hem de Rasyonel Olan Sayı Var mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)

<table>
<tr><th colspan="2">Yanıtlar</th><th colspan="2">f , %</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Yoktur</td><td>Tanımlardan yola çıkarak, açıklayarak yoktur</td><td>32 (%64)</td><td rowspan="3">42 (%84)</td></tr>
<tr><td>Sadece yoktur</td><td>7 (%14)</td></tr>
<tr><td>Yanlış bir açıklamayla yoktur</td><td>3 (%6)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vardır</td><td colspan="2">3 (%6)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Kararsızım, varsa da ben bilmiyorum</td><td colspan="2">5 (%10)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Toplam</td><td colspan="2">50 (%100)</td></tr>
</table>

Tablo incelendiğinde öğrencilerin %84'ünün yoktur dediği görülmektedir. Fakat 3 öğrenci ise yanlış açıklamalarla yoktur demiştir. Bu açıklamalar şu şekildedir:

- Yoktur. Çünkü rasyoneller sayı doğrusunda gösterilir, irrasyoneller gösterilmez.
- Yoktur. Çünkü rasyonel sayıların ondalık basamağı sonludur, irrasyonellerin ise sonsuzdur.
- Hayır, yoktur. Çünkü rasyonel sayılar gerçek sayılardır, irrasyonel sayılar ise gerçek sayı değildir.

Evet vardır diyen 3 öğrencinin açıklamaları da şu şekildedir:

- Evet vardır, mesela π sayısı hem irrasyoneldir hem de rasyonel şekilde yazılabiliyor.
- Evet bence tam kare olan köklü ifadeler hem rasyonel hem de irrasyoneldir. $\sqrt{16}$ gibi.
- Evet kesir şeklinde yazılan irrasyonel sayılar vardır mesela $\sqrt{\frac{3}{5}}$. Bu sayı kök dışına çıkmaz, aynı zamanda da rasyoneldir.

Görüldüğü üzere öğrenciler sayıların temsiline bağlı olarak sınıflandırmada güçlükler yaşamaktadır. Bazı öğrenciler ise bu soruda kararsız kalmışlardır. "Mutlaka bir istisna vardır ama ben bilmiyorum." düşüncesi yaygındır. Tablo 37'de ise "Rasyonel sayıların tamamı gerçek sayı mıdır?" sorusuna ilişkin öğrenci yanıtlarının dağılımı görülmektedir.

Tablo 37

"Rasyonel Sayıların Tamamı Gerçek Sayı mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)

Yanıtlar		**f , %**	
Evet	*Alt küme kavramından yola çıkarak açıklamalı evet diyenler*	*43 (%86)*	*48 (%96)*
	Sadece evet gerçek sayıdır diyenler	*4 (%8)*	
	Yanlış bir açıklamayla evet diyenler	*1 (% 2)*	
Hayır, bazıları gerçektir		2 (% 4)	
Toplam		50 (%100)	

Tablodan görüldüğü gibi öğrencilerin tamamına yakını evet cevabını vermişlerdir. Ancak 1 öğrenci "Öyledir, rasyonel sayılar gerçek sayıları da içine alır" cevabını vermiştir. 2 öğrenci ise "Rasyonel sayılar içinde gerçek olmayanlar da olabilir ama örnek gösteremiyorum." yanıtına yakın yanıtlar vermişlerdir.

Tablo 38'de ise "*Her irrasyonel sayı gerçek sayı* mıdır?" sorusuna verilen yanıtların dağılımı görülmektedir.

Tablo 38

"Her İrrasyonel Sayı Gerçek Sayı mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)

<table>
<tr><th colspan="2">Yanıtlar</th><th colspan="2">f , %</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Evet</td><td>Alt küme kavramından yola çıkarak açıklamalı evet diyenler</td><td>43 (%86)</td><td rowspan="3">46 (%92)</td></tr>
<tr><td>Sadece evet gerçek sayıdır diyenler</td><td>2 (%4)</td></tr>
<tr><td>Kararsız</td><td>Olabilir</td><td>1 (% 2)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hayır</td><td colspan="2">4 (%8)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Toplam</td><td colspan="2">50 (%100)</td></tr>
</table>

Tablo incelendiğinde öğrencilerin çoğunun irrasyonel sayı-gerçek sayı ilişkisini kavradığı görülmektedir. Ancak, "Hayır, değildir. İrrasyonel sayılar gerçek sayı kümesine girmez." şeklinde yanıtlar mevcuttur. Buna da "İrrasyonel sayılar gerçek olmayan sayılardır." şeklinde var olan yanlış kavramanın neden olduğu düşünülebilir. Görüşme yapılan öğrencilerden **Büşra D.** gerçek sayıların tanımını hatırlayamadığını ama π sayısının irrasyonel sayı olduğu halde gerçek sayı olmadığını düşündüğünü söylemiştir.

Tablo 39'da ise Venn şemasıyla ilgili soruya öğrencilerin vermiş oldukları yanıtların hata sayısına göre dağılımı gösterilmektedir. Tablo incelendiğinde öğrencilerin sadece birinin yanlış yaptığı görülmektedir. Bundan önceki sorularda yer alan gerçek sayı-irrasyonel sayı, gerçek sayı-rasyonel sayı ve rasyonel sayı-irrasyonel sayı ilişkilerinde güçlük çeken öğrencilerin sayısının daha fazla olduğu dikkat çekmektedir. Venn şemasının ders kitaplarında da yer alması öğrenciyi mantığını incelemeden ezberlemeye yöneltmiş olabilir.

Tablo 39

Venn Şemasına Sayı Kümelerini Yerleştirmede Yapılan Hata Sayısına Göre Öğrenci Dağılımı (9.Sınıf)

Doğru – Yanlış Durumu		**f**		**%**	
Tamamen Doğru		49		98	
İrrasyonel Sayı Doğru, Diğerlerinde Hatalılar	3 Küme Doğru	0	1	0	2
	2 Küme Doğru	1		2	
	1 Küme Doğru	0		0	
İrrasyonel Sayı Kümesi Yanlış		0		0	
Toplam		**50**		**100**	

4.2.3. Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Verilen Bir Sayıyı Sınıflamayla İlgili Güçlükleri

Ölçekte yer alan verilen sayının sınıflandırılmasıyla ilgili 4. göreve ilişkin öğrenci yanıtlarının yüzdeleri Tablo 40'da gösterilmektedir.

Tablo 40

Verilen Sayıların Sınıflandırılmalarını Gösteren Frekans ve Yüzde Tablosu (Doğru Cevaplar İtalik Olarak Belirtilmiştir) (9.Sınıf)

	Tam Sayı, f (%)	Rasyonel Sayı, f (%)	İrrasyonel Sayı, f (%)	Gerçek Sayı, f (%)
5	*50 (%100)*	*49 (% 98)*	0 (%0)	*50 (%100)*
-2	*49 (%98)*	*49 (%98)*	0 (%0)	*47 (%94)*
0	*39 (%78)*	*39 (%78)*	1 (%2)	*47 (%94)*
$-\frac{5}{3}$	7 (%14)	*47 (%94)*	2 (%4)	*48 (%96)*
π	0 (%0)	0 (%0)	*49 (%98)*	*43 (%86)*
3,14	4 (%8)	*45 (%90)*	4 (%8)	*48 (%96)*

7,333…	3 (%6)	*35 (%70)*	15 (%30)	*47 (%94)*
$\sqrt{3}$	0 (%0)	1 (%2)	*48 (%96)*	*46 (%92)*
$-\sqrt{4}$	*36 (%72)*	*33 (%66)*	6 (%12)	*45 (%90)*
2,3545454…	1 (%2)	*22 (%44)*	27 (%54)	*45 (%90)*
0,10203040…	1 (%2)	8 (%16)	*38 (%76)*	*45 (%90)*
$0,15\overline{7}$	4 (%8)	*38 (%76)*	8 (%16)	*48 (%96)*
2,7581125…	1 (%2)	8 (%16)	*39 (%78)*	*45 (%90)*
$\frac{23}{17}$ **=1,35294…**	2 (%4)	*23 (%46)*	26 (%52)	*46 (%92)*
$1,\overline{42593}$	0 (%0)	*37 (%74)*	12 (%24)	*47 (%94)*
$1+2\sqrt{9}$	*32 (%64)*	*39 (%78)*	8 (%16)	*48 (%96)*
$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$	17 (%34)	39 (%78)	8 (%16)	49 (%98)
$\frac{\pi}{3}$	0 (%0)	0 (%0)	*49 (%98)*	*44 (%88)*
$\frac{11}{3}$	4 (%8)	*44 (%88)*	4 (%8)	*48 (%96)*
4,4793512853	4 (%8)	*24 (%48)*	24 (%48)	*46 (%92)*

Öğrencilerin verdikleri yanıtların yüzdelerine göre dikkat çekici bazı noktalar şunlardır:

- 5 ve -2 sayısını sınıflandıran öğrencilerde doğruluk yüzdesinin %100'e yakın olduğu görülmektedir. "0" sayısında ise tam sayı ve rasyonel sayı diyenlerin oranında azalış olduğu görülmektedir. Yapılan görüşmelerde bu şekilde yanlış cevap veren bazı öğrencilerin sözlü olarak doğru cevaplar verdikleri görülmüştür. Ama "0" sayısının negatif ya da pozitif bir sayı olmaması tam sayı olmaması yorumuna da götürmüş olabilir.
- -5/3 sayısına tam sayı diyenlerin oranı %14 olarak bulunmuştur. Bu öğrencilerden biri olan ve görüşme yapılan öğrencilerden **Zeynep E.** "Bu sayıya tam sayı dedim çünkü önünde eksi işareti var." demiştir. "Önünde eksi olan her sayı tam sayı mıdır, mesela bütün köklü sayıların başına eksi koyarsak tam sayı mı olur?" sorusuna karşılık biraz düşündükten sonra "Köklü sayılarda olmaz ama bunda olur mu kararsızım." yanıtını vermiştir.

- Π sayısının sınıflandırılmasında ise genel olarak sorun görülmemektedir. 1 öğrenci hariç herkes irrasyonelliği konusunda hemfikirken, 7 öğrencinin sayının gerçekliği konusunda yanılgıda olduğu görülmektedir. Bu öğrencilerden biri görüşme yapılan öğrencilerden **Büşra D.**'dir. Büşra, yaptığı tanımda iki kümenin birleşimine gerçek sayı demesine ve π sayısına irrasyonel demesine rağmen gerçek sayı dememiştir. Gerçek sayının tanımı tekrar sorulduğunda emin olmamakla birlikte verdiği yanıtla çelişkinin farkına varmış π sayısına gerçek sayı demiştir.
- 3,14 sayısında da %90 ve üzerinde doğruluk oranı mevcuttur. π sayısından yola çıkarak sayının irrasyonelliğini düşünenler de olmuştur.
- 7,333… sayısını öğrencilerin %30'unun irrasyonel sayı olarak değerlendirmesi ile ilgili öğrencilerin yapmış oldukları tanımlardan yola çıkarak bazı yorumlar yapabiliriz. Ondalık kısmı sonsuza giden sayılar irrasyoneldir görüşü ve devirli sayılar irrasyoneldir görüşü bu %30'luk oranın nedeni olarak düşünülebilir. Görüşme yapılan öğrencilerden **Ece Nur Ş.** bu sayıya irrasyonel sayı demiştir. Neden öyle düşündüğü sorulduğunda verdiği cevaptan bir sayının ondalık kısmı sonsuz ise irrasyonel olduğu bu nedenle 7,3333… sayısının da irrasyonel olduğu düşüncesine sahip olduğu görülmüştür.

- $-\sqrt{4}$ sayısında da öğrencilerden irrasyonelliği düşünenlerin olduğu görülmektedir. Ama öğrencilerden %25'den fazlasının sayının tam sayı olduğunun veya rasyonel sayı olduğunun farkına varamadıkları göze çarpmaktadır. Bunun nedeni de sayının köklü şekilde verilmiş olması olabilir. Öğrencilerde irrasyonel sayı denildiğinde akıllarına köklü sayı gelmesi ve köklü sayı kavram imgesinin ağır basması bu yanılgıya sebep olmuş olabilir.
- 2,3545454… devirli sayısına rasyonel sayıdır diyen öğrencilerin oranı %50'nin altında kalmıştır. **Ece Nur Ş.** isimli görüşme yapılan öğrenci sayının ondalık kısmının belli bir kurala göre sonsuza gittiği için irrasyonel olduğunu belirtmiştir.

- 2,7581125… sayısı için de öğrencilerin %78'i irrasyonel yanıtı vermesine karşın sayıya rasyoneldir diyen öğrencilerin de olduğu görülmektedir. Bunlardan biri olan **Ece Nur Ş.** ile yapılan görüşmede geçen bir diyalog aşağıdaki gibidir:
  - **E.Ş. :** Bu sayı sonsuza kadar gidiyor ama bir kuralı yok o halde bu sayı irrasyonel değil rasyoneldir.
  - **A:** Sayının ondalık kısmı aynı şekilde devam etseydi?
  - **E.Ş. :** Öyle olsaydı irrasyonel sayı olurdu.
  - **A:** π sayısı için irrasyonel demiştin. Katılıyor musun hala?
  - **E.Ş. :** Evet π sayısı irrasyonel biliyorum.
  - **A:** O sayının açılımını biliyor musun, sonsuza kadar gidiyor mu?
  - **E.Ş. :** Evet 3,14 diye başlıyor ve devam ediyor.
  - **A:** Nasıl devam ediyor peki? Hiç inceledin mi ya da baktın mı devamına aynı sayı tekrar ediyor mu?
  - **E.Ş. :** Evet bir kısmını görmüştüm, ama bir kuralı yok diye biliyorum. Hiç devretmiyor.
  - **A:** Ona irrasyonel dedin ama 2,7581125… sayısına rasyonel diyorsun.
  - **E.Ş.:** Evet ya, doğru. Π sayısı kesin irrasyonel onu biliyorum. Demek ki bu sayı da irrasyonel.
- $\frac{23}{17}$=1,35294… sayısında öğrencilerin irrasyonellik ve rasyonellik konusunda kararsız kaldıkları görülmektedir. Sorunun soruluş tarzına bakarak haklı bir kararsızlık olduğu söylenebilir. Çünkü görüşme yapılan öğrencilerden bir kısmı "bu sayı kesirli şekilde yazılmış, hiç ondalık kısmına bakmadan rasyonel diyebiliriz" derken bir kısmı da "Ondalık kısmana bakarsak devirsiz ilerliyor gibi geliyor bu nedenle irrasyoneldir. Ama kesirli şekilde de yazılmış. Hem irrasyonel hem rasyonel olan bir sayı olabilir." demiştir. Böyle bir eşitlik olmaz diyen öğrenciler de mevcuttur. Görüşme sırasında 23'ü 17'ye böldüğümüzde uzun bir ondalık sayı oluştuğu ama bir yerde sonlandığı bilgisi verilmiştir. Bu bilgi sonrası öğrenciler, "O halde rasyonel sayıdır." yanıtını vermişlerdir.

- $1+2\sqrt{9}$ sayısının tam sayı ve rasyonel sayı olduğunun farkına varamayan öğrenciler mevcuttur. Görüşme sırasında **Büşra D.** ve **Ece Nur Ş.** isimli öğrenciler işlem yapıp önceden irrasyonel dedikleri sayıya rasyonel demişlerdir.
- 4,4793512853 sayısının rasyonelliği ve irrasyonelliği konusunda ise öğrencilerin %48'er olarak ikiye bölündükleri görülebilir. **Zeynep E.** isimli öğrenci irrasyonel sayı olduğunu belirtmiştir. Bu öğrenci 0,10203040… sayısına ise rasyonel demiştir. Bunun nedeni sorulduğunda öğrencinin verdiği yanıt ve daha sonra sorulan sorular şu şekildedir:
  - **Z.E.:** Bir sayının ondalık kısmı düzensiz gidiyorsa sayı irrasyoneldir, ama belli bir kurala göre gidiyorsa rasyoneldir.0,102030… sayısı onar onar arttığı için kuralı bellidir rasyoneldir ancak 4,4783512853 sayısında ise ondalık kısmın kuralı belli değildir irrasyoneldir.
  - **A:** 0,157777… sayısı nasıl bir sayıdır?
  - **Z.E.:** Kuralı bellidir 7777 şeklinde devam ediyor yani rasyoneldir.
  - **A:** 23/17 sayısı yani 23'ü 17'ye bölersek ondalık kısmı uzun ve devirli bir sayı buluruz. 1,35294… şeklinde başlıyor. Bu sayı nedir?
  - **Z.E.:** Bu sayı da irrasyoneldir. Ondalık kısmında bir düzen yok.
  - **A:** Kesirli bir sayının irrasyonelliğine veya rasyonelliğine nasıl karar veririz ondalık açılımı verilmediyse?
  - **Z.E.:** Payı paydaya böleriz. Eğer ondalık kısmında belli bir düzen varsa rasyoneldir, yoksa irrasyoneldir. Bölmeden anlayamayız.
  - **A:** Peki ya 5/2? Böldüğümüz zaman 2,5 çıkıyor. Bunun ondalık kısmına bakarak irrasyonel mi rasyonel mi nasıl anlarsın?
  - **Z.E.:** Hmm… Emin olamadım. Rasyonel de olabilir irrasyonel de.

Öğrenciyle geçen diyaloğa bakıldığında öğrencinin çeşitli yanılgılara sahip olduğu görülmektedir. Bir sayının ondalık kısmının sonlu olmasının rasyonel sayı olması için yeterli olmadığı, 0,102030… gibi ondalık biçimde gösterilmiş sayının kuralının belli olmasının rasyonel olması için yeterli olduğu, kesirli bir sayının rasyonelliğine karar vermek için sayıyı ondalık biçime dönüştürmemiz gerektiği gibi yanılgılara sahip olduğu görülmektedir.

Ondalık gösterimin üzerinde durulduğu ölçekteki 5.göreve verilen yanıtlar Tablo 41'de gösterilmiştir.

Tablo 41

0,123123123… ve 0,123456… Sayılarının Sınıflandırılmasına İlişkin Soruda Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)

Yanıtlar		**f , %**	
0,123123123…	*Rasyoneldir +*	*28 (%56)*	*32 (%64)*
	Rasyoneldir -	*4 (%8)*	
	İrrasyoneldir	18 (%36)	18 (%36)
	Yanıt Yok	0 (%0)	0 (%0)
0,12345678910…	*İrrasyoneldir +*	*25 (%50)*	*44 (%88)*
	İrrasyoneldir -	*19 (%38)*	
	Rasyoneldir	5 (%10)	5 (%10)
	Yanıt Yok	1 (%2)	1 (%2)
Toplam		50 (%100)	

0,123123123… devirli sayısı için öğrencilerin %64'ü rasyoneldir yanıtını verirken %36'sı irrasyonel olduğunu belirtmiştir. Bu durumun devirli sayıların veya sonsuz basamaklı ondalık sayıların irrasyonel sayı olacağı düşüncesinden kaynaklandığı düşünülebilir. 0,123456… sayısında ise %88 oranda "irrasyoneldir" yanıtı gelirken az sayıda kişinin de sayının rasyonel olduğu düşüncesinde olduğu görülmektedir. Yanılgıların nedenlerini anlamak için iki cevaba birlikte verilen yanıtlar daha önemlidir. Bu duruma ait bulgular Tablo 42'de verilmiştir. İlk sıradaki yanıt 0,123123123… sayısına ikinci sıradaki yanıt ise 0,123456789… sayısına verilen yanıttır.

Tablo 42

"0,123123123… ve 0,123456789… Sayıları İrrasyonel midir?" Sorusuna Verilen Öğrenci Yanıtlarının Birlikte Değerlendirilmesi (9.Sınıf)

Yanıtlar	**f , %**
Evet- Evet	14 (%28)
Hayır-Hayır	2 (%4)
Evet-Hayır	3 (%6)
Hayır-Evet	*30 (%60)*
Yanıt yok	1 (%2)
Toplam	50 (%100)

Tablo incelendiğinde öğrencilerin %60'ının doğru yanıt verdikleri görülmektedir. İki sayıya da irrasyonel sayı diyen öğrencilerin de %28 ile fazlalığı göze çarpmaktadır. Bu öğrencilerden biri olan ve görüşme yapılan **Deniz Ö**. , iki sayının da ondalık kısmının sonsuz olduğunu bu nedenle de ikisinin de irrasyonel olduğunu belirtmiştir.

4.2.4. Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin π Sayısının Değerine İlişkin Algıları

Π sayısının anlamına ilişkin çeşitli güçlükler olmakla birlikte sayının değeriyle ilgili olarak da öğrencilerin güçlükleri mevcuttur. Tablo 43'de sayının değeriyle ilgili verilen yanıtların dağılımı görülmektedir.

Tablo 43

Π Sayısının Değerine İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)

Yanıtlar	f , %
$\pi = 3$	0 (%0)
$\pi \approx 3$	*50 (%100)*
$\pi = 3{,}14$	2 (%4)
$\pi \approx 3{,}14$	*48 (%96)*
$\pi = 3{,}14159\ldots$	*34 (%68)*
$\pi \approx 3{,}14159\ldots$	16 (%32)

Tablo incelendiğinde öğrencilerin tamamının π'nin 3'e eşit olmadığı yaklaşık olarak eşit olduğu düşüncesinde oldukları görülmektedir. Ancak bu öğrencilerden 2 tanesi π'nin tam olarak 3,14'e eşit olduğunu belirtmiştir. Π'nin 3,14159… şeklinde sonsuza dek devam eden ondalık açılımına eşit olup olmaması sorusuna öğrencilerin %68'i eşittir derken %32'si yaklaşık olarak eşittir demiştir. Bu öğrencilerden **Ece Nur Ş.** , "π herhangi bir sayıya eşit olamaz çünkü bir çemberin çevresini çapına bölersek tam bir değer bulmak için sonsuza kadar gitmemiz gerekir bu nedenle 3,14159… sayısına da eşit değildir, yaklaşık olarak eşittir" şeklindeki düşüncesini belirtmiştir. Bu düşünceden hareketle **Ece Nur'**un π sayısının ne anlama geldiğini bildiği ancak sayıyı nesneleştiremediği söylenebilir. π sayısını süreç olarak görmekte çemberin çevresinin çapına bölünme süreci olarak nitelemektedir. **Onur B.** isimli görüşme yapılan diğer bir öğrenci ise π sayısının 3,14159… sayısına tam olarak eşit olduğunu belirtmiştir. Neden öyle düşündüğü sorulduğunda ise "π sayısı zaten ondalık kısmı sonsuza giden bir sayıdır. Bu nedenle tam olarak eşittir ama 3,14'e yaklaşık olarak eşittir diyebiliriz." yanıtını vermiştir. Bu yanıtından yola çıkarak Onur'un π sayısını süreçten ziyade bir bütün olarak nesneleştirdiği söylenebilir. Gerçekten de, çemberin çevresinin çapına bölümü olarak düşünüldüğünde bir süreç olan π, kendi başına bir irrasyonel sayı olarak nesnedir. Kısacası procept olarak nitelenebilecek kavramlardandır.

4.2.5. Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayıların Ondalık ve Köklü Gösterimine İlişkin Algıları

İrrasyonel sayıların temsillerine yönelik güçlüklerin yaşandığını daha önceki bölümlerden de yola çıkılarak söylenebilir. Tablo 44'de ise irrasyonel sayıların ondalık gösterimine ilişkin soruya öğrencilerin verdiği yanıtların dağılımı görülmektedir.

Tablo 44

"İrrasyonel Sayıların Tamamı Ondalık Biçimde Yazılabilir mi?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)

Yanıtlar	**f , %**
Evet yazılabilir	*22 (%44)*
Hayır yazılamaz	28 (%56)
Yanıt yok	0 (%0)
Toplam	**50 (%100)**

Tabloya bakıldığında öğrencilerin %56'sının irrasyonel sayıların tamamının ondalık biçimde yazılamayacağını öne sürdüğü görülmektedir. %44'ü ise ondalık biçimde yazılabileceğini belirtmiştir. **Deniz Ö.** isimli görüşme yapılan öğrenci şu yanıtı vermiştir:

- **D.Ö. :** Tamamını yazamayabiliriz. Çünkü sonunu bilmiyoruz. Ama bazılarını yazabiliriz de. Ondalık açılımına bakmamız lazım. Eğer ondalık açılım sonsuza kadar gidiyorsa ve kuralını bilmiyorsak onu yazamayız sonuçta sonsuza kadar. Ama bitiyorsa bir yerde yazabiliriz. $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ gibi sayılara bakmak lazım mesela.
- **A :** Bir irrasyonel sayının ondalık kısmı bitebilir mi bir yerde?

- **D.Ö. :** Normalde irrasyonel sayılar sonsuza gider diye öğrendik ama bazı köklü sayıların gitmeyebilir. $\sqrt{3}$'ü irrasyonel diye biliyoruz ama belki ondalık açılımı bir yerde bitiyordur.
- **A :** Yani $\sqrt{3}$ rasyonel bir sayı da olabilir mi?
- **D.Ö. :** (Gülerek) Saçmalamış olabilirim. Olamaz değil mi?

Deniz'in "İrrasyonel sayıların tamamını normal şartlarda ondalık olarak yazamıyoruz fakat bazılarını yazabilir miyiz acaba?" şüphesinde olduğu söylenebilir. Sayının ondalık kısmının sonsuza gitmesinden dolayı yazılamayacağını düşünmesi olağan karşılanabilir. **Onur B.** isimli öğrenci ise bütün irrasyonel sayıların ondalık biçimde yazılabileceğini ama o ondalık ifadenin sayıyı tam karşılamayacağını belirtmiştir. **Büşra D.** isimli öğrenci ölçekteki 9. görevden yola çıkarak; "Siz nasıl $\sqrt{2}$'yi ondalık olarak ifade etmişseniz, diğer köklü sayıları da ifade edebiliriz. Π sayısının da zaten ondalık açılımı vardır. Yani bütün irrasyonel sayıları ondalık olarak ifade edebiliriz" yanıtını vermiştir.Yanıtlardan yola çıkarak öğrencilerin bu konuda ikiye bölündükleri ve kendilerine göre haklı sebepler ortaya koydukları söylenebilir.

Temsille ilgili bir başka güçlük de köklü gösterimle ilgilidir. Ancak Tablo 45'de görüldüğü üzere öğrencilerin %90'ı soruya doğru cevap vermişlerdir.

Tablo 45

"Köklü Sayıların Tamamı İrrasyonel Sayı Mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)

Yanıtlar	**f , %**
Evet irrasyoneldir	5 (%10)
Hayır irrasyonel değildir (örnek vererek)	*45 (%90)*
Hayır irrasyonel değildir (örnek vermeden)	0 (%0)
Toplam	**50 (%100)**

Tablodan görüldüğü gibi 5 öğrenci evet cevabını vermişlerdir. Bunlardan biri olan **Ece Nur Ş.** ile yapılan görüşmede soru tekrar yöneltildiğinde "Hayır, mesela tam kare sayıların kökleri rasyoneldir" yanıtını vermiştir.

4.2.6. Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayıların ve Rasyonel Sayıların Yoğunluğuna İlişkin Algıları

Sayı kümelerinin yoğunluğuna ilişkin öğrencilerde net bir bilgi olmasa da sezgisel olarak bir sayı kümesinde daha çok eleman olduğunu düşünebilirler. Bu algılarının ne yönde olduğunu anlayabilmek için sorulan "Hangisinden daha fazla vardır, rasyonel sayı mı irrasyonel sayı mı?" sorusuna verilen yanıtlar Tablo 46'daki gibidir.

Tablo 46

"Hangisinden Daha Fazla Vardır, Rasyonel Sayı mı İrrasyonel Sayı mı?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)

Yanıtlar	f	%
Rasyonel Sayı	22	44
İrrasyonel Sayı	*8*	*16*
Eşitlerdir	13	26
Sayılamazlar, Bulunamaz	4	8
Yanıt Yok	3	6
Toplam	**50**	**100**

Rasyonel sayının daha fazla olduğunu düşünen öğrencilerin %44 oranla ilk sırada yer aldığı görülmektedir. Bu öğrencilerden **Büşra D.** "Bence rasyonel sayılar daha fazladır. Çünkü irrasyonel sayılar birer istisnadır, bulunması daha zordur" yanıtını vermiştir. Genelde algıların bu yönde olması irrasyonel sayılarla fazla

işlemin veya sorunun yapılmamasına bağlanabilir. Ondalık sayı kavram imgesi daha ağır basan **Zeynep E**. ise "İrrasyonel sayılar daha fazladır, ondalık kısmında bir kural olmadığı için sayıları fazladır" yanıtı vermiştir. Yazılı yanıtlardan birinde ise kareköklü sayı kavram imgesinin ağır bastığı verdiği tanımlardan ve önceki örneklerinden anlaşılan bir öğrenci, "Tam kare sayılar daha azdır, bu nedenle irrasyonel sayıları bulmak daha kolaydır. Onların daha fazla olduğunu düşünüyorum." yanıtını vermiştir. Görüldüğü gibi iki sayı kümesinin de eleman sayısının çokluğunu savunan öğrenciler mevcuttur. Öğrencilerin %26'sı ise iki sayı kümesinin de sonsuz elemana sahip olduğunu ve bu yüzden de eleman sayılarının eşit olduklarını savunmuşlardır. 8 öğrenci ise bu sayıların tek tek bulunamayacağını bu yüzden hangisinin daha fazla olduğu konusunda yorum yapılamayacağını belirtmişlerdir. Bunlardan biri olan **Onur B.** İle yapılan görüşmede "İki sayı kümesinden hangisi daha büyük buna karar veremeyiz çünkü mesela $\sqrt{800000}$ de vardır 800000 de vardır. Biri irrasyonel biri rasyoneldir. Bütün sayıları bilemeyeceğimiz için hangisi fazla karar veremeyiz, eşit de olabilirler." Yanıtı vermiştir. **Deniz Ö.** ise yapılan görüşmede kararsızlık yaşamıştır. Araştırmacı ile aralarında geçen diyaloğun bir kısmı aşağıda verilmiştir:

- **D.Ö. :** Bence rasyonel sayılar daha fazladır. Çünkü kesirli sayılar var, tam sayılar var bunların hepsini kapsıyor. İrrasyonel sayılarda ise sadece kökten çıkamayanlar var. Az sayıdadır.
- **A:** Kökten çıkanlar rasyonel midir?
- **D.Ö. :** Evet kökten kurtulabilenler rasyoneldir. Ama onlar daha azdır. Bu durumda rasyoneller daha azdır. (Şaşırır) Evet ya, böyle düşününce de rasyoneller azdır, irrasyoneller fazladır.
- **A:** Peki hangisi doğru?
- **D.Ö. :** Yaptığımız tanıma göre değişiyor gibi. Kesirli sayılardan bakarsak rasyoneller daha fazladır ama karekökten bakarsak irrasyoneller daha fazladır. Sanırım hangisi daha fazla karar veremeyiz.

Öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlardan da anlaşıldığı gibi öğrencilerin yoğunlukla ilgili farklı düşünceleri mevcuttur.

"İki irrasyonel sayı arasında her zaman bir rasyonel sayı var mıdır?" ve "İki irrasyonel sayı arasında her zaman bir irrasyonel sayı var mıdır?" sorularına ilişkin öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlar Tablo 47 ve Tablo 48' de gösterilmektedir.

Tablo 47

"İki İrrasyonel Sayı Arasında Her Zaman Bir Rasyonel Sayı Var mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)

Yanıtlar	**f**	**%**
Evet +	*6*	*12*
Evet – (kanıt göstermeden)	*21*	*42*
Hayır	23	46
Yanıt Yok	0	0
Toplam	**50**	**100**

Tablo 48

"İki İrrasyonel Sayı Arasında Her Zaman Bir İrrasyonel Sayı Var mıdır?" Sorusuna İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Dağılımı (9.Sınıf)

Yanıtlar	**f**	**%**
Evet +	*10*	*20*
Evet – (açıklama yapmadan)	*26*	*52*
Hayır	14	28
Yanıt Yok	0	0
Toplam	**58**	**100**

Tablolar incelendiğinde öğrencilerin yarıdan fazlasının her iki soruya da "Evet" yanıtı verdikleri fakat bu kişilerin az bir kısmının cevabına açıklama getirebildiği görülmektedir. Bazı öğrenciler sadece birer örnek göstererek "İki irrasyonel sayı arasında rasyonel sayı da irrasyonel sayı da bulunabiliyor." şeklinde bir ifadeyle genellemeye gitmişlerdir. Bazıları ise 'her zaman' ifadesinden dolayı "İstisnalar olabilir bu nedenle her zaman iki sayı arasında bir irrasyonel ya da rasyonel sayı olmayabilir" şeklinde düşüncelerini belirtmiştir. Ondalık sayı kavram imgesi ağır basan **Zeynep E.** isimli öğrenci 7,8954391 sayısı ve 7,8954392 sayısı arasında bir rasyonel sayı bulunamayacağını ifade etmiştir. Daha önceki yorumlardan da bilindiği gibi Zeynep'e göre bu iki sayı da irrasyonel sayıdır. Ancak **Zeynep E.** "İki irrasyonel sayı arasında her zaman bir irrasyonel sayı var mıdır?" sorusuna ise "Evet bence vardır. Çünkü sayı doğrusunda her iki nokta arasında sonsuz sayıda nokta vardır." yanıtını vermiştir. Bu yanıtlardan yola çıkarak sayı doğrusundaki her bir noktanın bir irrasyonel sayıya işaret ettiği yanılgısında olduğunu söylenebilir.

Verilen iki sayı arasında irrasyonel bir sayının bulunup bulunamayacağına ilişkin öğrenci düşüncelerini Vamvakoussi ve Vosniadou (2004) tarafından rasyonel sayılar için ortaya atılmış olan Tablo 23'de yer alan kavramsal çerçeveden yararlanarak oluşturduğumuz Tablo 24'deki kategorilere göre 9.sınıf öğrencilerinin dağılımı Tablo 49'da verilmektedir.

Tablo 49

Öğrencilerin İrrasyonel Sayıların Yoğunluğuna İlişkin Kategorilere Göre Dağılımı (9.Sınıf)

Cevap Kategorileri	2-5 f (%)	10,45-10,46 f (%)	$\sqrt{3}$-$\sqrt{5}$ f (%)	1/5-1/4 f (%)
İlkel Ayrıklık	2 (%4)	12 (%24)	14 (%28)	9 (%18)
Belirsiz Düzey	3 (%6)	6 (%12)	5 (%10)	7 (%14)
Gelişmiş Ayrıklık 1.Düzey	3 (%6)	6 (%12)	1 (%2)	1 (%2)
Gelişmiş Ayrıklık 2.Düzey	18 (%36)	0 (%0)	5 (%10)	7 (%14)
Yoğunluk 1.Düzey	1 (%2)	14 (%28)	7 (%14)	17 (%34)
Yoğunluk 2.Düzey	23 (%46)	12 (%24)	18 (%36)	9 (%18)
TOPLAM	50 (%100)	50 (%100)	50 (%100)	50 (%100)

Tablo incelendiğinde her bir soruda öğrencilerin %45'den fazlasının yoğunluk düzeyine ulaştıkları görülmektedir. 2 ile 5 arasında sonsuz sayıda irrasyonel olduğunu belirten öğrencilerin oranı %48 iken, 10,45-10,46 aralığında bu oran %52, $\sqrt{3}$-$\sqrt{5}$ aralığında %50 ve 1/5 - 1/4 aralığında bu oran yine %52 olarak bulunmuştur. Daha alt seviyedeki öğrenci oranlarına baktığımızda da 2-5 aralığında öğrencilerin % 42'sinin gelişmiş ayrıklık seviyesinde oldukları ancak diğer aralıklarda bu düzeyde olan öğrencilerin oranının %16'yı geçmediği görülmektedir. Bir başka önemli husus da 2.Düzeye ulaşan yani verilen aralıklarda örnek bir sayı verebilen öğrencilerin oranıdır. Bu oran 2-5 aralığında % 82 iken 10,45-10,46

aralığında %24'e düşmüştür. 2.düzeyde olan öğrencilerin kullanmış oldukları temsillere ve verdiği örneklere göre oranları aşağıdaki gibidir:

- 2-5 aralığında 2.düzeyde olan 41 öğrenciden %73,17'si köklü sayı örneği verirken, %9,76'sı ondalık gösterimi kullanmıştır. π sayısını örnek olarak verenler de %17,07 oranındadır.
- 10,45-10,46 aralığında 2.düzeyde olan 12 öğrenciden %58,33'ü 10,456987… gibi bir ondalık gösterimle, %41,66'sı köklü gösterimle bir sayı örneği vermişlerdir.
- √3-√5 aralığında 2.düzeyde olan 23 öğrenciden %86,96'sı $\sqrt{3,5}$ gibi köklü sayı örneği verirken %13,04'ü bu iki sayının ondalık değerlerini yaklaşık olarak alarak bu aralıkta yer alan 1,932457… gibi başka bir irrasyonel sayı örneği vermişlerdir.
- 1/5 ve 1/4 aralığında 2.düzeyde olan 16 öğrenciden sadece 1 tanesi bu iki sayıyı ondalık sayıya çevirerek aralıkta yer alan bir irrasyonel sayıyı ondalık olarak ifade etmiştir. Ancak bir başka öğrenci de aynı yolu izlemesine karşın sayının ondalık kısmının sonsuza gideceğini hesaba katmamıştır. Bu öğrenci görüşme yapılan öğrencilerden **Zeynep E.**'dir. 0,2 ve 0,25 arasında 0,219766547 sayısını örnek vermiş ancak sayının ondalık kısmının sonsuza gittiğini belirtmemiştir.

4.2.7. Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin İki İrrasyonel Sayının Toplanması ve Çarpılması ile İlgili Güçlükleri

Öğrencilerin irrasyonel sayılarla toplama ya da çarpma yaparken yaşadıkları işlemsel sorunlar öğrenme süreci ile ilgili değildir. Ancak kavramı öğrenirken yaşadıkları güçlükler işlemlerin sonuçlarını yorumlamada da hatalara neden olabilir. Tablo 50'de "İki irrasyonel sayının toplamı rasyonel sayı olabilir mi?" sorusuna öğrencilerin verdiği yanıtların dağılımı görülmektedir.

Tablo 50

"İki İrrasyonel Sayının Toplamı Rasyonel Sayı Olabilir mi?" Sorusuna Öğrencilerin Verdiği Yanıtların Dağılımı (9.Sınıf)

Yanıtlar	f	%
Evet + *(Örneklerle destekleyenler)*	*0*	*0*
Evet – *(Örnek veremeyenler)*	*11*	*22*
Hayır olamaz	39	78
TOPLAM	50	100

Tablo incelendiğinde öğrencilerin %78 gibi büyük bir çoğunluğunun iki irrasyonel sayı topladığında sonucun rasyonel sayı olamayacağını düşündükleri görülmektedir. Sadece %22'lik kısım "evet olabilir" yanıtını vermiş ancak bir örnek gösterememişlerdir. Verilen öğrenci yanıtlarından bazıları aşağıdaki gibidir:

- **Zeynep E. :** İki irrasyonel sayıyı toplarsak rasyonel sayı olabilir belki. Ama emin değilim. Sonuçta ondalık kısımları birbirini tamamlayacak şekilde denk gelebilir.
- **Deniz Ö. :** Hayır olamaz çünkü $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ sonucuna baksak mesela, toplanmaz bile. Zaten bu ikisinin toplanması ile rasyonel sayı oluşmaz.
- **Onur B. :** İki irrasyonel sayının toplamı rasyonel olmaz. Çünkü kökler aynı olsa bile katsayıları toplarız sadece. Sayı yine irrasyonel olarak kalır.

Görüldüğü gibi **Zeynep E.** isimli öğrenci yine ondalık sayılardan yola çıkmış ve oldukça iyi bir açıklama yapmıştır. Diğer 2 öğrenci de ise köklü sayı kavram imgesi ağır basmış ve birbirlerini yok edecek örnek bulamamışlardır. Görüşme sırasında Onur ve Deniz'e köklü sayıların negatiflerinin de olduğu hatırlatılınca " O halde aynı sayının bir negatif bir pozitifini alırsak sonuç sıfır çıkar. O da rasyonel bir sayıdır." şeklinde düşünerek doğruyu bulmuşlardır.

"İki irrasyonel sayının çarpımı rasyonel sayı olabilir mi?" sorusuna öğrencilerin verdiği yanıtların dağılımı Tablo 51'deki gibidir.

Tablo 51

"İki İrrasyonel Sayının Çarpımı Rasyonel Sayı Olabilir mi?" Sorusuna Öğrencilerin Verdiği Yanıtların Dağılımı (9.Sınıf)

Yanıtlar	f	%
Evet + *(Örneklerle destekleyenler)*	*39*	*78*
Evet – *(Örnek veremeyenler)*	*4*	*8*
Hayır olamaz	7	14
TOPLAM	50	100

Tablo incelendiğinde öğrencilerin %86'sının "Evet olabilir." dediği ve bunların da büyük çoğunluğunun örnek verebildiği görülmektedir. "Hayır, olamaz" şeklinde yanıt veren öğrencilerden de birçoğu açıklama yapmazken **Zeynep E.** ondalık sayılardan yola çıktığı için "Eğer ondalık kısmı sonsuza giden iki irrasyonel sayıyı çarparsak rasyonel sayı bulamayız." yanıtını vermiştir.

Tablo 52'de ölçekteki son görev olan 9. görevde $\sqrt{2}$ sayısının farklı temsillerinin kendisiyle toplanmasına ve çarpılmasına ilişkin öğrencilerin verdikleri yanıtların dağılımı görülmektedir. 'O' sayının ondalık gösterimini, 'K' ise köklü gösterimini ifade etmektedir.

Tablo 52

Ondalık ve Köklü Gösterimli İki Sayının Toplanması veya Çarpılmasıyla İlgili Öğrencilerin Verdiği Yanıtların Dağılımı (9.Sınıf)

Yanıtlar		f	%
OxO	*=2*	*22*	*44*
	≈2	28	56
O+O	*=2,8284...*	*27*	*54*
	≈2,8284...	23	46
K+K	*=2,8284...*	*19*	*38*
	≈2,8284...	31	62
K+K	$=2\sqrt{2}$	*47*	*94*
	$\approx 2\sqrt{2}$	3	6

Tablo incelendiğinde ondalık olarak ifade edilmiş $\sqrt{2}$ sayısının kendisi ile toplanması veya çarpılmasının sonucunun 2'ye tam olarak eşit olup olmayacağı konusunda cevap veren öğrenci oranlarının birbirlerine yakın olduğu görülmektedir. Ancak öğrencilerin %62'si $\sqrt{2}+\sqrt{2}$'nin 2,8284... sayısına tam olarak eşit olmayacağı görüşüne sahip olduğu görülmektedir. Öğrencilerin %94'ü son soruda $\sqrt{2}+\sqrt{2}$'nin $2\sqrt{2}$' ye tam olarak eşit olduğunu belirtmiştir. Bu APOS'a göre eylemsel bir adımdır. Ancak öğrencilerin APOS'a göre nesnelleştirme süreçleri görüşme verilerinden yola çıkılarak daha iyi incelenebilmiştir. Görüşmede de ölçek uygulanırken de 1,4142... şeklinde ifade edilen sayının $\sqrt{2}'$nin bir açılımı olduğu 2,8284... olan sayının da $\sqrt{8}$'in yani $2\sqrt{2}$'nin açılımı olduğu vurgulanmıştır.

- **Ece Nur Ş.:** Her ne kadar ondalık açılım $\sqrt{2}'$ye eşit dense de bu şekilde sonsuza kadar ondalık kısmı giden bir irrasyonel sayıyı kendisiyle çarparsak 2 gibi tam bir sayı çıkmaz. Yaklaşık bir sayı çıkar. Ondalık gösterimli olan diğer sorularda da durum aynıdır. Yaklaşık olarak eşittir diyebiliriz sadece. Ancak son soruda iki köklü sayıyı toplarsak √2+√2 kesinlikle $2\sqrt{2}$'dir.

- **Deniz Ö. :** Ondalık şekilde verilmiş ve sonu belli olmayan iki sayıyı çarparsak kesinlikle tam olarak 2'ye eşit bir şey bulamayız. Ancak bu iki sayıyı topladığımızda her ne kadar sonsuza kadar da gitse başka bir ondalık sayıya tam olarak eşit olur. Sonuçta biri 2'nin karekökünü alırken ortaya çıkan rakamlar diğeri de 8'in karekökünü alırken ortaya çıkan rakamlar. $\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{8}$ olduğuna göre $2\sqrt{2}'$den dolayı. Ondalık açılımlarını da toplarsak birbirlerine tam olarak eşit bulunur.
- **Onur B. :** 1,4142… $\sqrt{2}'$nin tam olarak eşiti olan ondalık gösterilmiş hali olduğuna göre bunları toplasak da çarpsak da fark etmez. İkisinin çarpımı tam olarak 2 bulunur. Toplama ile ilgili sorular da aynı durum geçerlidir. Hepsi tam olarak eşittir.

3 öğrenci de APOS'a göre farklı düzeylerdeki öğrencilerdir. **Ece Nur Ş.**'nin bir irrasyonel sayıyı ondalık haliyle nesnelleştiremediği görülmektedir. Köklü olarak ifade edildiğinde ise "Tam olarak eşittir." diyebilmiştir. Sadece katsayıları toplayarak hareket etmiş ve eylem basamağında yer aldığı yorumu yapılabilir. Ancak **Deniz Ö.** İki ondalık gösterimle ifade edilmiş sayının toplamının yine başka bir açılıma eşit oluğunu belirtmiştir. Sadece bunu belirtmekle kalmamış 2'nin veya 8'in karekökünü alma sürecinden yola çıkmıştır. Deniz, ondalık ifade edilmiş iki irrasyonel sayının ve köklü olarak ifade edilmiş iki irrasyonel sayının arasındaki ilişkiyi doğru kavramasına rağmen aynı sayının ondalık gösterimi ve köklü gösterimindeki ilişkiyi net olarak anlayamamıştır. Kök alma sürecini ele aldığı için bütünü göremediği düşünülebilir. Bu nedenle Deniz, APOS'a göre süreç aşamasındadır. **Onur B.** isimli öğrenci ise bütün sorulara tereddüt duymadan 'eşittir' yanıtı vermiştir. Görüşme sırasında ondalık da ifade edilse köklü de ifade edilse sayılar arasında ayrım yapmayarak yorumlarda bulunmuştur. Bu öğrencinin ondalık gösterimle ifade edilmiş sayıyı nesnelleştirdiği ve APOS'a göre nesne basamağında olduğu söylenebilir.

4.3. Sekizinci ve Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Öğrenme Güçlüklerinin Karşılaştırılması

Bu bölümde 8. ve 9. sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayı kavramıyla ilgili öğrenme güçlükleri sekiz ana başlığa uygun olarak karşılaştırılacaktır.

4.3.1. Sekizinci ve Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Sayı Kümelerini Tanımlamayla İlgili Güçlüklerinin Karşılaştırılması

Öğrencilerin irrasyonel sayılarla ilgilerini güçlüklerini belirlemek için diğer sayı kümeleriyle özellikle de rasyonel sayılarla ilgili bilgilerine ve yanılgılarına da bakmak gerekir. 8. ve 9. sınıf öğrencilerinin rasyonel sayı denildiğinde akıllarına gelen kavramlara bakıldığında ilk sırayı pay-payda-kesir ve a/b gibi ifadelerin aldığı görülmektedir. Hem 8. sınıfta hem de 9. sınıfta rasyonel sayı denildiğinde ondalık sayıdan ziyade kesirli gösterimin ön planda olduğu yorumu yapılabilir. Ondalık sayı kavramının akla gelme oranı 8.sınıflarda %17'de, 9.sınıflarda %12'de kalmıştır. Rasyonel sayılardan önce görülen tam sayı-doğal sayı kavramları da öğrencilerin en çok hatırladığı kavramlardandır (%32-33). Karekök ifadesi de iki gruptaki öğrencilerin de en çok akıllarına gelen kavramlardandır. İki grupta da hatırlanma yüzdesi %20'nin üzerindedir. 8.sınıflarda öğrencilerin %19'u devirli sayı kavramını belirtirken 9.sınıf öğrencilerinden sadece 2 tanesi devirli sayı kavramını belirtmiştir. Bu da önemli farklılıklardan bir tanesidir. 9.sınıf öğrencilerinin belirtip de 8.sınıf öğrencilerinin daha az belirttiği kavram da gerçek sayı kavramıdır. Bu oran %24'e %14'tür. Buna göre her iki sınıf düzeyindeki öğrencilerde de rasyonel sayı denildiğinde kesirli sayı imgesinin ağır bastığı yorumu yapılabilir.

Rasyonel sayının tanımı ile ilgili göreve verilen yanıtların yer aldığı Tablo 2 ve Tablo 29'a bakıldığında iki grupta da öğrencilerin yarıdan fazlasının a/b şeklinde yazılamayan sayı veya kesirli gösterilemeyen sayı tanımlarını yaptıkları görülmektedir. Köklü ifadeden kurtulma ile ilgili tanım yapan öğrencilerin de oranları birbirine yakındır. En önemli farklılık ondalık sayıdan yola çıkarak tanım

yapan öğrenci oranındadır. 8. sınıf öğrencilerinin %17'si ondalık kısmı sonlu veya devirli olan sayılara rasyonel sayı denildiğini belirtirken 9.sınıflarda sadece 1 öğrenci bu tanımı yapmıştır. Tablo 3 ve Tablo 30'daki öğrencilerin verdikleri rasyonel sayı örneklerini incelendiğinde iki grupta da a/b şeklindeki örneklerin ilk sırada yer aldığı görülmektedir. Ancak 9.sınıf öğrencilerinin %56'sı tam sayı örneği verirken bu oran 8.sınıflarda %38'dir.

Öğrencilerin irrasyonel sayılarla ilgili kavram imgelerini ortaya çıkarmak için sorulan sorularda da benzerlik ve farklılıklara rastlanmıştır. İrrasyonel sayı denildiğinde iki gruptaki öğrencilerin %50'den fazlasının aklına gelen kavram köklü sayı kavramı olmuştur. Ondalık sayı kavramı 9.sınıf öğrencileri arasında %34 oranında hatırlanırken 8.sınıflarda bu oran %26'dır. Rasyonel sayı hatırlanırken 8.sınıflar daha çok ondalık temsile yönelirken irrasyonel sayı da durum tam tersi olmuştur. Ayrıca 8.sınıflarda olmamasına karşın 9.sınıflarda öğrencilerin %14'ü e sayısını belirtmişlerdir. 8.sınıflarda da Pisagor'u hatırlayan öğrenciler varken 9.sınıflarda buna rastlanılmamıştır. İrrasyonel sayılarla ilgili kavram imgelerini ortaya koyabilecek en önemli konulardan biri de öğrencilerin yaptıkları tanımlardır. 8.sınıfların %32'si 9.sınıfların ise %20'si ya tanım yapamamıştır ya da yanlış tanım yapmıştır. 8.sınıflar en çok (%36) "a/b şeklinde yazılamayan sayılar" tanımını yaparken 9.sınıflarda en çok (%38) "rasyonel olmayan sayılar" tanımı yapılmıştır. Köklü sayılardan ve ondalık sayılardan yola çıkarak tanım yapanların oranları ise birbirine yakındır. Tanımlarda daha çok rasyonel sayılara ve a/b şeklindeki ifadelere odaklanıldığı görülmektedir. Öğrencilerin vermiş oldukları irrasyonel sayı örnekleri incelendiğinde 8.sınıfların %72'sinin 9.sınıfların ise %88'inin köklü sayı temsilini kullandıkları göze çarpmaktadır. 8. sınıfların %26'sı ondalık şekilde yazılmış irrasyonel sayılara örnek verirken bu oran 9.sınıflarda da %26'dır. 8.sınıfların %22'si yanlış örnek vermiş veya hiç örnek verememiştir. 9.sınıflarda ise sadece 1 kişi örnek verememiştir. En önemli farklılık da bu durumdur. Bir başka önemli farklılık da π sayısını örnekler arasında gösteren öğrenci oranındadır. 8.sınıfların %41'i, 9.sınıfların %68'i örnekleri arasında π sayısına yer vermiştir. Ayrıca 9.sınıflardan 7 öğrenci e sayısına da örnekleri arasında yer vermiştir.

Gerçek sayı tanımını 8.sınıf öğrencilerinin %62'si geçerli sayılabilecek şekilde açıklamışken 9.sınıflarda ise bu oran %94'tür. Bu durumda 8.sınıflarda gerçek sayı kavramı ile ilgili sıkıntıların olduğu 9.sınıflarda ise bu kavramın hemen hemen oturmuş olduğu yorumu yapılabilir. Ayrıca 8.sınıflarda %41 ile "Bütün sayılar-Tüm sayılar" gibi basit bir açıklama yapan öğrenciler çoğunlukta iken 9.sınıfların %70'i, "İrrasyonel ve rasyonel sayıların birleşim kümesi" tanımını yapmıştır. Bu önemli farklılık 9.sınıflarda gerçek sayılar konusundan önce kümeler konusunun işlenilmesinden kaynaklanmış olabilir. 8.sınıflar ise kümeler konusunu en son 6.sınıf düzeyinde görmüşlerdir.

4.3.2. Sekizinci Sınıf ve Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Sayı Kümelerinin Birbirleriyle Olan İlişkilerine Yönelik Güçlüklerinin Karşılaştırılması

8. sınıflar ve 9. sınıfların sayı kümelerinin birbirleriyle ilişkisine yönelik güçlükleri incelendiğinde çeşitli benzerlik ve farklılıklara rastlanmaktadır. Rasyonel ve irrasyonel sayıların zıt iki kavram olduğu konusunda her iki sınıf düzeyindeki öğrencilerin de hemfikir olduğunu Tablo 9 ve Tablo 36'ya bakarak söyleyebilir. 8.sınıfların %83'ü, 9. sınıfların ise %84'ü hem rasyonel hem de irrasyonel bir sayının olamayacağını ifade etmiştir. Ancak 8.sınıfların sadece %24'ü tanımlardan yola çıkarak doğru açıklamalarla fikrini desteklerken bu oran 9.sınıflarda %64'tür.

Rasyonel sayı-Gerçek sayı ilişkisi sorgulanan soruya ise her iki düzeydeki öğrenci grubu da yüksek bir yüzdeyle "Rasyonel sayıların tamamı gerçek sayıdır" yanıtını vermiştir. Ancak 8.sınıflarda bu oran %83'de kalırken 9.sınıflarda 2 kişi hariç tüm grup bu düşünceye katılmıştır. 8.sınıfların sadece %45'i, 9.sınıfların ise %86'sı alt küme kavramından yararlanarak doğru bir açıklamada bulunmuştur. "Her irrasyonel sayı gerçek sayı mıdır?" sorusuna verilen yanıtlar incelendiğinde iki grup arasında önemli farklılıkların olduğu görülmektedir. 8. sınıflarda öğrencilerin %34'ü her irrasyonel sayının gerçek sayı olduğunu sayı doğrusundan veya küme kavramından yola çıkarak açıklayabilirken bu oran 9.sınıflarda %86'dır. Ayrıca 8.sınıfların %40'ı "Hayır, her irrasyonel sayı gerçek sayı değildir" derken, bu oran

9.sınıflarda %8'dir. Bu farklılığa bakarak 8.sınıfların irrasyonel sayı-gerçek sayı ilişkisini kavramada güçlükler yaşadığı ve 9.sınıflara göre daha fazla yanılgıya sahip oldukları söylenebilir.

Öğrencilerin tüm sayı kümelerinin ilişkisini göz önüne alarak tamamladıkları Venn şeması görevine bakıldığında iki sınıf düzeyi arasında ciddi düzeyde fark olduğu görülmektedir. 8.sınıfların %64'ü Venn şemasını doğru bir şekilde tamamlarken 9.sınıflarda bu oran %98'dir. Tüm bunlar göz önüne alındığında sayı kümelerinin birbirleriyle olan ilişkisini kavramada 9.sınıfların 8.sınıflara göre daha iyi olduğu ve daha az öğrencinin yanılgılara sahip olduğu söylenebilir. Bu farklılığın önemli bir nedeni olarak 9.sınıflarda "Kümeler" konusunun "Gerçek Sayılar" konusundan önce işlenmesi gösterilebilir.

4.3.3. Sekizinci Sınıf ve Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Verilen Bir Sayıyı Sınıflamayla İlgili Güçlüklerinin Karşılaştırılması

Sayı kümelerinin birbirleriyle ilişkisini kavramada iki sınıf düzeyinde farklılıkların olduğu görülmüştür. Bir sayının hangi sayı kümesine ait olduğunun belirlenmesi de bu belirleme işlemi sırasında öğrencilerin algıları da yanılgıları da oldukça önemlidir. Tablo 13 ve Tablo 40 birlikte incelendiğinde belli başlı sayılar ve öğrencilerin sınıflandırmada yaşadığı güçlükler dikkat çekmektedir:

- Gerçek sayıları tanımlamada, gerçek sayı-rasyonel sayı ve gerçek sayı irrasyonel sayı ilişkisini belirtmede 9.sınıflar 8.sınıflara göre çok daha başarılı olduğu görülmüştü. Bir sayının gerçek sayı olup olmadığını yanlış belirleyen öğrenci oranına baktığımızda da yanılgıların sonuçları ortaya çıkmaktadır. 9.sınıflarda tüm sayıların gerçek sayı olduğunu belirten öğrenciler %85'in üzerinde iken 8. sınıflarda bu oranın nerdeyse tüm sayılarda %70-%80 aralığında olduğu görülmektedir. π sayısını gerçek sayı olarak sınıflayan öğrencilerde her iki sınıf düzeyinde de diğer sayılara göre düşüş olduğu göze çarpmaktadır. 9.sınıflarda 20 sayıdan 18'ine %90'ın

üzerinde kişi sayısı gerçek sayı derken 8.sınıflarda hiçbir sayı için %90'a ulaşılamamıştır.

- 5 sayısı için rasyonel sınıflamasını yapan öğrenci oranı 8.sınıflarda %71 iken 9.sınıflarda %98'dir. "-2" sayısı için doğru sınıflama yapan öğrencilerin ortalaması 8.sınıflarda %75,29 iken 9.sınıflarda ise bu ortalama %96,67'dir. "0" sayısını 8.sınıf öğrencilerinin %48'i rasyonel olarak sınıflarken bu oran 9.sınıflarda %78'dir. Bu karşılaştırmalardan 8.sınıf öğrencilerinin sayı kümeleri arasındaki ilişkiyi kavramada yaşadıkları güçlüklerin sayıyı sınıflamaya da yansıdığı görülmektedir.
- 3,14 sayısını rasyonel ve gerçek sayı olarak sınıflayan öğrenci ortalaması 8.sınıflarda %69,83 iken bu oran 9.sınıflarda %93'tür. 4,4793512853 sayısını ise rasyonel ve gerçek olarak sınıflayan öğrenci ortalaması 8.sınıflarda %60,35 iken 9.sınıflarda ise %70'dir. Görüldüğü gibi 3,14 sayısındaki fark oldukça fazlayken 4,4793512853 sayısında fark azalmıştır.
- 7,333… sayısına rasyonel ve gerçek sayı diyen öğrenci ortalaması 8.sınıflarda %70,69 iken 9.sınıflarda bu oran %82'dir. $0,15\overline{7}$ sayısında da $1,\overline{42593}$ sayısında da benzer durum söz konusudur. 9.sınıflar devirli sayıların rasyonelliği ve gerçekliği konusunda daha doğru sınıflama yapmışlardır.
- $\sqrt{3}$ sayısına 8.sınıf öğrencilerinin %74'ü irrasyonel sayı derken bu oran 9.sınıflarda %96'dır.
- $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$ sayısına rasyonel diyen öğrenci oranlarında iki sınıf düzeyindeki farklılık göze çarpmaktadır. 8.sınıfların %48'i, 9.sınıfların ise %78'i bu sayıyı rasyonel olarak sınıflayabilmiştir.
- $\pi/3$ sayısına 9.sınıflarda rasyonel sayı diyen hiçbir öğrenci bulunmazken 8.sınıfların %26'sı bu sayıyı rasyonel olarak sınıflandırmıştır. 8.sınıfların %67'si 9.sınıfların ise %98'i bu sayıyı irrasyonel olarak nitelemiştir.

0,123123123… sayısı ve 0,12345678910… sayısının sınıflandırılmasıyla ilgili soruda da ondalık temsile ilişkin zorluklar incelenmiştir. Tablo 14 ve Tablo 41 incelendiğinde iki grupta da öğrencilerin %64'ünün 0,123123123… sayısını rasyonel olarak sınıflayabildiği görülmektedir. 0,123456789… sayısını ise 8.sınıfların %72'si

9.sınıflarınsa %88'i irrasyonel sayı olarak sınıflamıştır. Sayıların ikisini de doğru şekilde sınıflandıran öğrencilerin oranı 8.sınıflarda %50, 9. sınıflarda ise %60 olarak bulunmuştur.

4.3.4. Sekizinci ve Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin π Sayısının Değerine İlişkin Algılarının Karşılaştırılması

Π sayısının değeriyle ilgili öğrencilerin yanıtları Tablo 16 ve Tablo 43'e bakılarak karşılaştırıldığında 8.sınıf öğrencilerinin %22'si π sayısının 3'e eşit olduğunu belirtirken 9.sınıflardan hiçbiri aynı hatayı yapmamıştır. 8.sınıfta gerçek sayılardan sonra görülen kürenin hacmi, yüzey alanı gibi konularda π sayısını formüllerde ve sorularda kullanan öğrencilerin yanılgılarını gidermiş olabileceği düşünülebilir. π sayısının 3,14159... sayısına tam olarak eşit olduğunu düşünen öğrencilerin 8.sınıflarda %26 iken 9.sınıflarda %68 olduğu da dikkat çekici farklılıklardandır. Buna göre 9.sınıf öğrencilerinin 8.sınıf öğrencilerine göre π sayısını nesneleştirmede daha başarılı olduğu yorumu yapılabilir.

4.3.5. Sekizinci ve Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayıların Ondalık ve Köklü Gösterimine İlişkin Algılarının Karşılaştırılması

İrrasyonel sayıların ondalık temsiline ilişkin soruya verdikleri yanıtlar karşılaştırıldığında her irrasyonel sayının ondalık açılımı olacağı konusunda 8.sınıfların da 9.sınıfların da yarıdan fazlasının yanılgıda olduğu görülmektedir. "İrrasyonel sayıların tamamı ondalık biçimde yazılabilir mi?" soruyla ilgili öğrenci yanıtları karşılaştırıldığında 8.sınıfların %31'inin 9.sınıfların ise %44'ünün 'evet yazılabilir' dediği görülmektedir. Ancak iki grupta da çoğunluk 'hayır yazılamaz' seçeneğindedir. İki sınıf düzeyinde de çoğunluk yanılgı içindedir. "Köklü sayıların tamamı irrasyonel sayı mıdır?" sorusuna ilişkin verilen yanıtların dağılımları karşılaştırıldığında ise 8.sınıfların %74'ünün, 9.sınıfların ise %90'ının örneklerle köklü sayıların tamamının irrasyonel sayı olmadığını belirttiği görülebilir. Köklü sayılarla ilgili iki sınıf düzeyinde de doğru cevap yüzdesi oldukça yüksektir.

4.3.6. Sekizinci ve Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayıların ve Rasyonel Sayıların Yoğunluğuna İlişkin Algılarının Karşılaştırılması

Öğrencilerin rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilgili yoğunluk algıları incelendiğinde 8.sınıfların 9.sınıflardan daha iyi düzeyde olduğu görülmektedir. Çünkü Tablo 19 ve Tablo 46 karşılaştırıldığında 8.sınıf öğrencilerinin %33'ünün 9.sınıfların ise %16'sının "İrrasyonel sayılar rasyonel sayılardan daha fazladır." şeklinde algılarının olduğu görülmektedir. İki sayı kümesinin de eşit elemana sahip olduğunu düşünen öğrenci oranı 8.sınıflarda %16, 9.sınıflarda ise %26'dır. Ayrıca 9.sınıfların arasında %8'i bu iki sayı kümesinin de elemanlarının sayılamayacağını bu nedenle hangisi daha az hangisi daha fazla yorum yapılamayacağını belirten öğrenciler vardır. 8.sınıf öğrencileri arasında böyle bir yoruma rastlanmamıştır.

"İki irrasyonel sayı arasında her zaman bir rasyonel sayı var mıdır?" sorusuna öğrencilerin verdikleri yanıtlar karşılaştırıldığında 8.sınıf öğrencilerinin %40'ının 9.sınıf öğrencilerinin ise %54'ünün iki irrasyonel sayı arasında her zaman rasyonel sayı bulunabileceğini belirttiği görülmektedir. Ancak 8.sınıf öğrencilerden hiçbiri doğru bir açıklama getirememiştir. 9.sınıf öğrencilerin de sadece %12'si açıklamayla görüşünü savunmuştur. "İki irrasyonel sayı arasında her zaman bir irrasyonel sayı var mıdır?" sorusuna ise 8.sınıf öğrencilerinin %55'i doğru yanıt verirken 9.sınıflarda bu oran %72'dir. Yanıtlarını doğru açıklamalarla destekleyenlerin oranı ise 8.sınıflarda %3'de kalmış, 9.sınıflarda ise %20 olarak görülmüştür. 8.sınıf öğrencilerinde de 9. sınıf öğrencilerinde de iki irrasyonel sayı arasında irrasyonel sayı bulunabileceğini düşünenlerin oranları rasyonel sayı bulunabileceğini düşünenlerin oranlarına göre artmıştır.

Verilen iki sayı arasında kaç tane irrasyonel sayının olduğunun sorulduğu ve 1 örnek istendiği göreve ait öğrencilerin verdikleri yanıtlar Tablo 23'deki kategorilere göre dağıtılmıştır. Verilen sayılar ve öğrencilerin bulundukları kategorilere göre ortaya çıkan karşılaştırma sonuçları şu şekildedir:

- 2-5 aralığında 8.sınıf öğrencilerinin %16'sı ilkel düzeyde yer almaktayken 9.sınıf öğrencilerinin %4'ü ilkel düzeydedir. Yani 2-5 aralığında irrasyonel sayının bulunamayacağını düşünen öğrencilerin oranı 8.sınıflarda daha fazladır. 8.sınıfların %33'ü 9.sınıfların ise %48'i yoğunluk düzeyinde yer almaktadır. Buna göre 9.sınıf öğrencilerinde 2-5 aralığında sonsuz sayıda irrasyonel sayı bulunduğunu ifade eden öğrenci sayısı daha fazladır. Ayrıca 8.sınıfların %43'ü, 9.sınıfların ise %82'si 2.düzeyde yer almıştır yani bu aralıkta bir irrasyonel sayı örneği verebilmiştir.
- 10,45-10,46 aralığında 8.sınıf öğrencilerinin sadece %28'i yoğunluk seviyesinde yer almakta iken 9.sınıflarda bu oran %52'dir. 2.düzeyde olan öğrenciler ise 8.sınıflarda %17 iken 9.sınıflarda %24'tür. Bu sonuçlara göre iki öğrenci grubunun da 10,45 ve 10,46 arasında irrasyonel sayı örneği vermede güçlük yaşadığı söylenebilir.
- $\sqrt{3}$-$\sqrt{5}$ aralığında 8.sınıf öğrencilerinin %28'i 9.sınıf öğrencilerinin ise %50'si yoğunluk düzeyinde yer almaktadır. 8.sınıflarda 2.düzeyde olan öğrencilerin oranı da %28'dir. 9.sınıflarda ise öğrencilerin %46'sı 2.düzeydedir. Görüldüğü gibi 8.sınıflarda hem örnek verme konusunda hem iki aralık arasında sonsuz tane irrasyonel sayının olduğu konusunda eksiklikler vardır. İki öğrenci grubunda da öğrencilerin yarısından fazlası irrasyonel sayı örneği verememiştir.
- 1/5-1/4 aralığında ilkel düzeyde olan öğrenci oranlarına bakıldığında önemli bir farklılık görülmektedir. 8.sınıf öğrencilerinin %53'ü ilkel düzeyde iken 9.sınıflarda bu oran %18'dir. Buna göre 8.sınıfların yarıdan fazlası 1/5-1/4 aralığında irrasyonel sayının olmadığını düşünmektedir. Sonsuz sayıda irrasyonel sayının olduğunu söyleyen yoğunluk düzeyindeki öğrencilerin oranı 8.sınıflarda %28, 9.sınıflarda ise %52'dir. Ayrıca 1/5-1/4 aralığında irrasyonel sayı örneği verebilen öğrencilerin 8.sınıflarda %28, 9.sınıflarda ise %32 olduğu görülmektedir. Buna göre her ne kadar 9.sınıfların yoğunluk düzeyindeki öğrenci oranı 8.sınıflara göre fazlaysa da örnek verebilen öğrenci oranının iki sınıf düzeyinde de yakın olduğu görülmektedir.

Öğrencilerin vermiş oldukları örneklerin yüzdeleri karşılaştırıldığında ise en dikkat çekici farklılık 10,45 ve 10,46 arasında irrasyonel sayı örneği veren öğrencilerde

görülmektedir. 8.sınıfta doğru cevap veren öğrencilerinin tamamı ondalık temsili kullanırken 9.sınıftaki öğrrencilerin %42'si bu aralıkta bir köklü sayı örneği vermişlerdir. Bir başka dikkat çekici farklılık da 1/5-1/4 aralığında verilen irrasyonel sayı örneklerindedir. 8.sınıf öğrencileri arasında $\frac{1}{4,134528...}$ şeklinde örnek veren öğrenciler bulunurken 9.sınıflarda bu şekilde bir örneğe rastlanmamıştır.

4.1.7. Sekizinci ve Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin İki İrrasyonel Sayının Toplanması ve Çarpılması ile İlgili Güçlüklerinin Karşılaştırılması

"İki irrasyonel sayının toplamı rasyonel sayı olabilir mi?" sorusuna 8.sınıfların ve 9.sınıfların vermiş oldukları yanıtların yüzdeleri Tablo 25 ve Tablo 50'de görülmektedir. 8.sınıfların daha başarılı olduğu tablolar karşılaştırıldığında görülmektedir. 8.sınıfların %40'ı "Evet olabilir" yanıtı verirken 9.sınıflarda ise bu oran %22'de kalmıştır. Üstelik 9.sınıflardan hiçbir öğrenci örnek bir toplama işlemi gösteremezken 8.sınıf öğrencilerden 4 tanesi vermiş olduğu yanıtı örneklendirebilmiştir. İki grupta da öğrencilerin yarıdan fazlası "Hayır olamaz" yanıtı vermiştir. Öğrencilerin köklü sayıların negatiflerini düşünmemeleri veya irrasyonel sayıları ondalık olarak düşünmemeleri bu yanılgının nedenleri olarak sayılabilir. "İki irrasyonel sayının çarpımı rasyonel sayı olabilir mi?" sorusuna 8. ve 9. sınıfların vermiş oldukları yanıtların yüzdeleri Tablo 26 ve Tablo 51'de görülmektedir. Bu tablolar karşılaştırıldığında 8.sınıfların %69'unun, 9.sınıfların ise %86'sının soruya doğru cevap verdikleri görülmektedir.

Tablo 27 ve Tablo 52'ye bakılarak öğrencilerin $\sqrt{2}$ sayısının farklı temsilleriyle yapılan işlemlerine yönelik algıları ortaya konulabilir. √2'nin ondalık açılımlarının çarpımının 2'ye eşit olduğunu belirten öğrenci oranının 8.sınıflarda %17, 9.sınıflarda ise %44 olduğu görülmektedir. İki grupta da yaklaşık olarak eşit diyen öğrenciler çoğunlukta kalmıştır. √2'nin ondalık açılımlarının toplanmasıyla √8'in ondalık açılımının tam olarak elde edileceğini belirten öğrencilerse 8.sınıflarda %41, 9.sınıflarda ise %56'dır. Bu duruma göre 9.sınıfların yarıdan fazlasının doğru

cevap, 8.sınıfların da yarıdan fazlasının yanlış cevap verdiği söylenebilir. $\sqrt{2}+\sqrt{2}$ işleminin sonucunun 2,8284… sayısına tam olarak eşit olacağını düşünen öğrencilerin oranı 8.sınıflarda %28 ile 9.sınıflarda da %38 ile azınlıkta kalmıştır. Öğrencilerin 2,8284… sayısını nesneleştiremedikleri bu düşük oranlardan da bellidir. Ancak $\sqrt{2}+\sqrt{2}$'nin $2\sqrt{2}$'ye tam olarak eşit olacağını 8.sınıfların %84'ü 9.sınıfların ise %94'ü belirtmiştir. Görüldüğü gibi APOS'a göre eylem basamağındaki bir öğrencinin rahatlıkla yapabileceği bu sorunun doğruluk oranı diğerlerine göre iki grupta da yüksektir. Her iki gruptaki öğrencilerde de çoğunluğun 1,4142… irrasyonel sayısını $\sqrt{2}$ şeklinde nesneleştiremediği yorumu yapılabilir.

4.4. Öğrencilerin İrrasyonel Sayılara İlişkin Algıları ve Güçlüklerine Yönelik Öğretmen Görüşleri

Bu bölümde Ek-3'de yer alan form doğrultusunda Levhi, Abdi, Edayi, Hilalî ve Vefai mahlasları kullanılacak beş öğretmenle yapılan görüşmelere ait bulgular yer alacaktır. Görüşme formu, *İrrasyonel Sayı Kavram Testi*'ne paralel olarak hazırlandığı için bu bölümde yer alan alt başlıklar da 7'ye ayrılacaktır.

4.4.1. Öğrencilerin Sayıları Tanımlamalarıyla İlgili Güçlüklerine Yönelik Öğretmen Görüşleri

"Sizce öğrencilere rasyonel sayı denildiğinde akıllarına neler gelir?" ve "Sizce öğrenciler rasyonel sayıyı tanımlayabilirler mi? Nasıl tanımlarlar?" sorularına Levhi, Abdi, Edayi, Hilali ve Vefai öğretmenlerin benzer cevaplar verdikleri görülmüştür:

- **Levhi:** Kesirli sayılar akıllarına gelir. a/b gelir. Kesirli yazılabilen sayılara rasyonel sayı denilir şeklinde tanım yaparlar.
- **Edayi:** Aslında birçoğunun aklına bir şey gelmiyor yani sayı kümelerini ayırt edemiyorlar ama en çok akıllarına gelen ve kullandıkları ifade kesir şeklinde yazılabiliyor olması. Tanım olarak da formal bir tanım yapamazlar

ama yakın tanımlar yaparlar. Kesir şeklinde yazılabilen sayılar gibi bir tanım yapabilirler.

- **Hilali:** Öncelikle akıllarına kesirler geliyor. Pay ve payda gelir. Ancak ondalık gösterim hemen akıllarına gelmez. Tanım olarak da payı paydası olan sayılardır derler.
- **Vefai:** Kesirli sayılar gelir. 3/5, 4/7 gibi sayılar gelir akıllarına. Rasyonel sayıyı tanımlayamazlar. Direk örnek olarak gösterirler. Denklik sınıfının bir elemanı olarak lisedeki hiçbir öğrenci bunu düşünmez.

Abdi ile araştırmacı (A) arasında ise şu diyalog geçmiştir:

- **Abdi:** Kesirli gösterim akıllarına gelir. Yaptıkları tanımlar ise tabi ki eksik olur ama genelde iki sayının birbirine bölümü şekilde tanımlıyorlar. Payın paydaya bölümü gibi.
- **A:** Peki payın ya da paydanın neler olabileceğinin bir öneminin olduğunu düşünüyorlar mı?
- **Abdi:** Yok düşünmüyorlar. İki sayı dediklerdi zaman akıllarında kitaplarda kaynaklarda gördükleri gibi tam sayı ya da doğal sayı şeklinde algılıyorlar ama ifade ettikleri zaman onu ifade etmeyebilirler tanımda. Sadece iki sayı derler.
- **A:** $\sqrt{3}$ / $\sqrt{5}$ gibi bir ifade versek?
- **Abdi:** Böyle bir ifade de hemen cevap veremezler. Hem köklü sayı var hem kesir var. Yanlış yapanlar olur. Yeni bir şeymiş gibi algılarlar,

Görüldüğü gibi öğretmenlerin tamamı öğrencilerin rasyonel sayı kavramı ile ilgili olarak kesirli sayı imgesine sahip olduğu görüşündedir. Hilali, özellikle öğrencilerin akıllarına ilk başta ondalık sayının gelmeyeceğini belirtmiştir. Abdi ile yapılan görüşmede de görüldüğü gibi payın ve paydanın köklü sayı olması durumunda öğrencilerin karar vermekte güçlük çekeceği yorumu yapılmıştır.

"Öğrencilerden rasyonel sayı örneği istesek verebilirler mi? Nasıl örnekler verirler?" sorusuna verilen cevaplar aşağıdaki gibidir:

- **Levhi:** Verirler. Kesirli sayılardan, doğal sayılardan falan örnekler verirler.
- **Edayi:** Hemen kesir verirler hatta basit kesir verirler pozitif rasyonel sayı verirler.
- **Hilali:** Genelde örnekleri kesirli verirler. 2 rasyonel mi desek düşünebilirler. Kararsız kalırlar.
- **Vefai:** Kesirli olarak gösterirler. Bir bütünün bir parçası gibi yani.
- **Abdi:** Direk onlardan isteyince cevap zor gelir ama önce biz örnek veriyoruz. 3/5 diyorsun onlar da benzer örnekler veriyorlar. Ama ondan sonra 2 rasyonel sayı mı diyorum düşünüyorlar. Biraz sıkıntı çekiyorlar ama ondan sonra biraz daha açıkladığın zaman onlarında devamı geliyor 3 yazdığında 3/1 yazıyorlar mesela. Ancak 0 dediğinde biraz daha duruyorlar. Kararsız kalıyorlar.

"Derste rasyonel tanımlıyor musunuz? Nasıl tanımlamaktasınız?" sorusuna verilen yanıtlar aşağıdaki gibidir:

- **Levhi:** Bir sayı a/b şeklinde yazılabiliyorsa a ve b tam sayı olmak üzere tabi. Sayı rasyoneldir şeklinde tanımlıyorum.
- **Edayi:** Ben a/b şeklinde yazılabilen sayılar diye tanımlıyorum. Tabi açıyorum a ve b'yi emin olabilirsiniz. a ve b'nin tam sayı olması gerektiği üzerinde falan duruyorum. Ancak a ve b'nin aralarında asal olmasına girmiyorum.
- **Hilali:** Tanım vermezsek öğrenciler de yanılgılar oluşabiliyor. Ben, "a/b şeklinde yazılan a ve b tam sayı olan payda 0 olmayan sayılardır" şeklinde tanımlıyorum.
- **Vefai:** Ben denklik sınıflarına girerek anlatıyorum. Kavramın özünü öğrenmeli öğrenciler.
- **Abdi:** Rasyonel sayıyı tanımlıyorum. Tanımlara aslında pek fazla önem vermiyorum ama şöyle hani bilsinler diye biraz bahsediyorum. Rasyonel

sayının ne olduğunu bilsin sonuçta neticede insanlar sınava giriyor. Sınavda pek tanım sorulmuyor. Sadece ne olduğunu bilmesi gerekiyor tanım o kadar önemli değil ama yine de bilsinler tabi. Rasyonel sayı a/b şeklinde ifade edilmiş bir sayıdır aynı zamanda a ve b'nin aralarında asal olması gerekiyor. Bunu söylediğim zaman 2/4'ün rasyonel olmadığı ortaya çıkıyor. O bir kesirdir.

Yanıtlar incelendiğinde öğretmenlerin de genel olarak benzer tanımlar yaptığı görülmektedir. Vefai'nin ise denklik sınıflarından yararlanması ve sayı kümesinin inşaasına dayalı tanım yapması diğerlerine göre farklı bir yaklaşım olarak görülebilir.

"Sizce öğrencilere irrasyonel sayı denildiğinde akıllarına neler gelir?" ve "Sizce öğrenciler irrasyonel sayıyı tanımlayabilirler mi? Nasıl tanımlarlar?" sorularıyla öğrencilerin kavram imgeleri konusunda dolaylı yoldan öğretmenlerin görüşleri araştırılmıştır. Öğretmenlerin yanıtları aşağıdaki gibidir:

- **Levhi:** Köklü sayılar gelir. Öğrenciler rasyonel olmayan sayılara irrasyonel sayı denir şeklinde tanım yaparlar bence.
- **Edayi:** Çoklu sayılar geliyor bir de ondalık sayılarda virgülden sonra düzenli olmayan sayılar geliyor öğrencilerin akıllarına. Öğrencilere tanım yaptırmadım ama tanım yapacak olsalar köklü sayılar ve ondalık sayılardan sonrası düzenli gitmeyen sayılar derler. a/b şeklinde tanım yapamazlar.
- **Hilali:** İrrasyonel sayı dediğimizde kareköklü sayılar akıllara gelir. Karekökten çıkmayan ya da kurtulamayan sayılar şeklinde tanımlama yapıyorlar.
- **Vefai:** Köklü sayılar akıllarına geliyor öğrencilerin. Zaten ortaokuldan öğrenmiş olarak geliyorlar. Ama tanım yapamazlar. Örnek verebilirler sadece.
- **Abdi:** İrrasyonel sayı denildiği zaman korkuyorlar o ne falan diyorlar ama şunu biliyorlar hani virgüllü bir sayı yazdım ve virgülden sonraki kısmı hatırlamıyorsun hiç bilmiyorsun. Akıllarına gelen ilk şey bu. Ondalık biçimde akıllarına geliyor. Ama tanım yapamazlar.

Öğretmenlerin yanıtlarından da görüldüğü gibi farklı düşünceler söz konusudur. Levhi, Hilali ve Vefai öğrencilerin akıllarına kareköklü sayıların geleceğini belirtirken, Abdi ve Edayi ise öğrencilerin ondalık sayıları düşüneceğini belirtmiştir. Öğrencilerin yapabilecekleri tanımlar konusunda da farklı yaklaşımları söz konusudur. Levhi, öğrencilerin rasyonel olmayan sayılardan yola çıkarak tanım yapacağını; Edayi, ondalık sayılardan yola çıkarak tanım yapabileceğini; Hilali, karekökten yararlanılarak tanım yapılabileceğini düşünürken Abdi ve Vefai ise öğrencilerin tanım yapamayacağını belirtmiştir.

"Öğrencilerden irrasyonel sayı örneği istesek verebilirler mi? Nasıl örnekler verirler?" sorusuna öğretmenlerin verdikleri yanıtlar aşağıdaki gibidir:

- **Levhi:** Köklü sayı örnekleri verirler.
- **Edayi:** Hemen köklü sayı söylerler ama pi sayısı da akıllarına gelebilir.
- **Hilali:** Köklü sayı örneği verirler ama pi sayısını da verirler. Çünkü üzerinde çok duruyoruz.
- **Vefai:** Köklü sayı örnekleri verirler. Ancak bazı öğrenciler devirli ondalık sayıları da irrasyonel olarak düşünebiliyorlar.
- **Abdi:** Direk sorunca akıllarına örnek gelmiyor ama biz önce birkaç tane köklü sayı örneği versek onlar da devam edebiliyorlar. Tabi köklü olup da irrasyonel olmayan örnekleri de gösterip belirtmek gerekiyor.

Görüldüğü gibi öğretmenler, öğrencilerin yapacağı tanımlar konusunda farklı düşünmelerine rağmen verecekleri örneklerin genelde köklü sayı şeklinde olacağını ifade etmişlerdir. "Derste irrasyonel sayıyı tanımlıyor musunuz? Nasıl tanımlamaktasınız?" sorusuna ise verilen yanıtlar aşağıdaki gibidir:

- **Levhi:** a/b şeklinde yazılamayan sayıların irrasyonel sayı olduğunu belirtiyorum.
- **Edayi:** Rasyonel olmayan sayıların irrasyonel olduğunu belirtiyorum. Buradan da sayının a/b şeklinde yazılamayacağı ortaya çıkmış oluyor.
- **Hilali:** Tanımı veriyorum. Ondalık sayı olarak söylüyorum veya köklü olarak.

- **Vefai:** "Sayı doğrusunda görüntüsü olup rasyonel olmayan sayılara irrasyonel sayılar denir." şeklinde bir tanım yapıyorum.
- **Abdi:** Ya açıkçası onun üzerinde fazla durmuyorum. Rasyonel olarak ifade edemediğimiz sayılar diye söylüyorum. Birazcık da sınav sisteminden kaynaklanıyor. Sınavlarda genel olarak tanım sorusu olmadığı için tanımlar önemsenmiyor.

Levhi ve Edayi'nin rasyonel sayıların a/b temsilinden yola çıkarak tanım yaptığı görülmektedir. Hilali, ondalık sayı veya köklü sayılardan yola çıkarak tanım yaptığını; Vefai, sayı doğrusundan yola çıkarak tanım yaptığını; Abdi ise irrasyonel sayı tanımının üzerinde durmadığını belirtmiştir.

Öğrencilerin gerçek sayı kavramıyla ilgili güçlükleriyle ilgili olarak öğretmenlere sorulan, "Sizce öğrenciler gerçek sayıyı tanımlayabilirler mi? Nasıl tanımlarlar?" ve "Öğrencilerden gerçek sayı örneği istesek verebilirler mi? Nasıl örnekler verirler?" sorularına yönelik yanıtlar şu şekildedir:

- **Levhi:** Bütün sayılar gerçek sayıdır derler. Herhangi bir sayı örneği verebilirler. Bu konuda zorlanmazlar.
- **Edayi:** Tüm sayılar diyorlar. Birçok temsili veya türü kullanarak örnekler verir benim öğrencilerim.
- **Hilali:** Gerçek sayıyı tanımlayamazlar. Örnek istesek veremeyebilirler. Gerçek sayı konusunda sıkıntı söz konusu.
- **Vefai:** Gerçek sayının ne olduğunu bilmezler. Onun bütün sayı kümelerini kapsayan küme olduğuna dair sıkıntı yaşıyorlar. Bilmeden de örnek veremezler.
- **Abdi:** Tanımlamada zorlanırlar. Ama örnek verirken zaten direk akıllarına gerçek sayı deyince doğal sayı geliyor onları söylüyorlar. Genelde akıllarında pozitif tam sayı olduğu için mesela 3 gibi 5 gibi pozitif sayıları örnek veriyorlar genelde.

Levhi ve Edayi öğrencilerin "Bütün sayılar" şeklinde bir tanım yapabileceğini düşünürken; Hilali, Vefai ve Abdi öğrencilerin gerçek sayı tanımını yapamayacağını düşünmüştür. Öğrencilerin vermiş oldukları cevapları düşünüldüğünde iki grupta da yarıdan fazlasının gerçek sayıyla ilgili bir tanım yaptıkları akla gelmektedir. Öğretmenlerin kendi yaptıkları tanım sorulduğunda da şu yanıtlar verilmiştir:

- **Levhi:** Yazdığımız her sayı gerçek sayıdır diyorum ben.
- **Edayi**: Bütün sayı kümelerin içine alan olarak tanımlıyoruz ve sayı doğrusunu oluşturan her bir noktada noktaya karşılık gelen sayılar olarak tanımlıyoruz. Hatta tahtaya da öyle çizmiştim sayı doğrusun tek tek doldurdum.
- **Hilali:** Rasyonel sayıların ve irrasyonel sayıların birleşimi diyorum.
- **Vefai**: Sayı kümelerini hatırlatırım önce. "Sayma sayıları, doğal sayılar diye başladınız. Sonradan Tam sayıları öğrendiniz. Rasyonelleri öğrendiniz. 8.sınıfta irrasyonelleri öğrendiniz. İşte bunların hepsini içine alan sayı kümesine gerçek sayı denir." şeklinde tanımlıyorum.
- **Abdi**: Tanımını verdim tabi şöyle veririm. Venn şemayı çizdikten sonra veririm. Şekil üzerinde gösteririm. Tüm açıklamaları yaptıktan sonra şu soru gelebiliyor: "Peki bunların dışında başka sayı var mıdır?" diye. Tabi detaya girmeden karmaşık sayılardan da örnek veriyorum. Sayı doğrusuyla da anlatıyorum ayrıca gerçek sayıları.

Görüldüğü gibi öğretmenler gerçek sayı kavramını oluştururken farklı yaklaşımlarda bulunmaktadır. Venn şemasından, sayı doğrusundan ve önceki sayı kümelerinden yararlanılmaktadır.

4.4.2. Öğrencilerin Sayı Kümelerinin Birbirleriyle Olan İlişkilerine Yönelik Güçlükleriyle İlgili Öğretmen Görüşleri

Kavram testinde bulunan rasyonel sayıların ve irrasyonel sayıların gerçek sayılarla ilişkisiyle ilgili sorulara öğrencilerin nasıl cevaplar verebilecekleri öğretmenlere sorulmuştur. "Öğrencilere rasyonel sayıların tamamı gerçek sayı mıdır diye sorsak sizce nasıl cevaplar gelir? Rasyonel sayı - gerçek sayı ilişkisini

kavramada güçlük yaşıyorlar mı?" ve "Öğrencilere her irrasyonel sayı gerçek sayı mıdır diye sorsak sizce nasıl cevaplar gelir? İrrasyonel sayı - gerçek sayı ilişkisini kavramada güçlük yaşıyorlar mı?" sorularına verdikleri yanıtlar aşağıdaki gibidir:

- **Levhi:** Venn şemasıyla öğrencilere kümeler gösterilirse hem rasyonel-gerçek sayı hem de irrasyonel-gerçek sayı ilişkisini kavrayabilirler. Bu şekilde anlatılınca zorluk yaşamıyorlar.
- **Edayi:** Öğrencilerin genellikle kümelerle ilgili problemleri olduğu için alt küme kavramında da sorun yaşayan çok oluyor ama anlıyorlar. Rasyonel sayıların da irrasyonel sayıların da gerçek sayıların alt kümesi olduğunu söylerler. Bu konu üzerinde çok konuştuk derste çünkü.
- **Hilali:** Rasyonel sayıların tamamı gerçek sayı derler. Görsel olarak venn şemasının kesinlikle çizilmesi gerekir. Her irrasyonel sayının gerçek sayı olduğunu da belirtirler. Gerçek sayıların onları kapsadığını biliyorlar çünkü. Zorluk çekiyorlar mı sorusuna gelirsek örnekler üzerinde görünce zorluk çekiyorlar ama direk bu şekilde sorduğumuzda o tabloyu verdiğim için büyük ihtimalle zorluk çekmezler.
- **Vefai:** Öğrenciler zorluk çekiyorlar. Hatta sembollerde de sorunları var.IR yazınca öğrencilerin büyük çoğunluğu bu kümeye irrasyonel sayılar kümesi diyor. Venn şemasıyla gösterildiği zaman öğrenciler arasında bu ilişkileri kolay anlayanlar da olur, ama o üst küme ilişkisini göremeyenler de olur.
- **Abdi:** Sadece sözel olarak, tanımsal olarak ifade edip 2-3 tane örnek verdiğimiz zaman zorluk yaşayabilirler. Ama Venn şemasıyla ya da sayı doğrusuyla gösterildiği zaman bence sıkıntı çekmezler.

Öğretmenlerin sayı kümeleri arasındaki ilişkiyi kavramada Venn şemasının etkili olduğunu düşündükleri görülmektedir. Öğrenci cevaplarını düşündüğümüzde de Venn şemasını tamamlama ile ilgili soruda iki grubun da yüksek oranda doğruluk yüzdesine sahip oldukları akla gelmektedir.

4.4.3. Öğrencilerin Verilen Bir Sayıyı Sınıflamaya İlişkin Güçlüklerine Yönelik Öğretmen Görüşleri

Önceliklere öğretmenlere "Öğrenciler bir sayının hangi sayı kümesine ait olduğunu belirlemede ne tür güçlükler yaşamaktadırlar?" şeklinde genel bir soru sorulmuştur. Bu soruya verdikleri yanıtlar şu şekildedir:

- **Levhi:** Rasyonel ve irrasyonel sayıların hangisine ait olduğu konusunda sıkıntı yaşıyorlar. Bir de irrasyonel ve gerçek sayı arasında zorluk yaşayabiliyorlar. Günlük hayattan örneklerle açıklama yapabiliriz. Elma hem elma grubuna giriyor hem meyve grubuna giriyor hem de bir bitki. Bu şekilde bir örnekle bir sayının hem doğal hem rasyonel hem de gerçek sayı olacağı söylenebilir. Venn şeması da kullanılır. Sayılar şema üzerine yerleştirilirse daha kalıcı olur.
- **Edayi:** Çoğunlukla doğru yapıyorlar. Bir sayının hangi kümelere ait olduğunu ayrı ayrı belirleyebilen öğrenci sayım az olur ama en azından irrasyonel sayıyı söylerler. Yani tam sayı rasyonel sayıdır aynı zamanda deyip yorum da yapabilirler. Ama ölçek uygulanırken de fark ettim birden fazla sayı kümesini işaretleyebilirsiniz demiş olmama rağmen sanki bir tanesini işaretlemeleri gerekiyormuş gibi algılayanlar oluyor. Soyut düşünemedikleri için bir sayının birden fazla kümeye ait olabileceğini çok algılamıyorlar
- **Hilali:** Yok hayır pek güçlük yaşamıyorlar. Bir yorumda bulunurlar kesinlikle o sayıyı bir yere dâhil edebilirler.
- **Vefai:** Öğrencilere hangi sayı rasyoneldir veya aşağıdakilerden hangisi irrasyoneldir gibi bir soru sorulsa buna cevap verebilirler. Zaten 8.sınıftan öğrenmiş olarak geliyorlar. Ancak $\sqrt{2}$ / $\sqrt{8}$ rasyonel midir irrasyonel midir desek karıştırırlar. Yapamayabilirler.
- **Abdi:** Örneğin 3 sayısını versen akıllarına ilk gelen doğal sayı olduğudur. Diğer sayı kümeleri için siz söyledikçe onay verirler. $\sqrt{3}$ gibi bir sayı versek gerçek sayı olup olmadığını karıştırırlar. Sınıflandırmada gerçek sayıları biraz daha karıştırıyor gibiler. İrrasyoneli, rasyoneli, doğal ve tam sayıları biliyorlar. Üst küme olarak gerçek sayılar farklı bir âlemdeymiş gibi kalıyor.

Bir de 5/0 ifadesini merak ediyorlar. Hangi kümeye dâhil diye. Belirsizlik ve tanımsızlık kavramları da ilgisini çekiyor öğrencilerin.

Özellikle Vefai'nin $\sqrt{2}$ / $\sqrt{8}$ ifadesinde öğrencilerin zorlanabileceğine ilişkin görüşü kavram testi sonuçlarını da desteklemektedir. Ayrıca Abdi'nin belirttiği gibi öğrencilerin bir sayıyı gerçek sayı olarak sınıflandırmada da güçlük yaşadıkları görülmüştür. Paydası 0 olan ifadelerde de **Suat B.** isimli öğrencinin yaşamış olduğu güçlük gibi sınıflandırmada güçlükler yaşanabileceği Abdi tarafından da dile getirilmiştir. Ondalık veya köklü biçimde verilmiş bir sayıyı sınıflandırmada öğrencilerin ne tür güçlükler yaşadığına ilişkin sorulara öğretmenlerin vermiş oldukları yanıtlar aşağıdaki gibidir:

- **Levhi:** Ondalık temsille ifade edilmiş bütün sayılara rasyonel sayı diyebiliyor öğrenciler. Ama köklü sayılarda zorluk yaşamıyorlar. Kökün dışına çıkabiliyorsa kolaylıkla rasyonel diyebiliyorlar.
- **Edayi:** Ondalık sayılarda sayının düzenli gidip gitmediğine bakarak karar verebilirler. Köklü sayıları ise biliyorlar. Kökten çıkabiliyorsa eğer rasyonel olduğunu çıkamıyorsa irrasyonel olduğunu söylüyorlar.
- **Hilali:** Ondalık şekilde bir sayı versek rasyonel ve irrasyonel mi diye karar verirken eğer üzerinde bir devir işareti varsa büyük ihtimalle irrasyonel derler ama işaret yoksa büyük ihtimalle rasyonel derler. O konuda güçlükleri var. Köklü biçimde bir sayı versek eğer tam kare sayı ise irrasyonel sayı değil der ama çıkartamıyorlarsa irrasyonel derler. Çıkartmaya çalışırlar kök dışına.
- **Vefai:** Öğrenciler devirli sayılara da irrasyonel sayı diyebiliyor. Ondalık kısmı sonsuza giden sayıların irrasyonel sayı olduğuna dair yanılgıları var. Ama köklü sayılarda pek zorlanmazlar. Kökten çıkarmaya çalışarak sınıflamayı doğru şekilde yaparlar.
- **Abdi:** Çok nadir de olsa ondalık sayıları sınıflamada güçlük yaşayan öğrencilerle karşılaştım. "Virgülden sonra uzun olduğu zaman irrasyonel olmuyor muydu?" diye soran öğrenciler oluyor. Ama köklü sayıları sınıflamada zorluk yaşamıyorlar. Kökten çıkarabiliyorsa rasyoneldir bunu biliyorlar. Bunu bilip rahat yapıyorlar.

Görüşme yapılan öğretmenlerin tamamı öğrencilerin köklü ifade edilmiş bir sayıyı sınıflamada güçlük yaşamayacağını belirtmiştir. Ancak ondalık temsille ilgili olası bazı yanılgılara dikkat çekmişlerdir. Levhi, tüm ondalık sayıların rasyonel olabileceği yanılgısı konusunda; Hilali, devir işaretinin irrasyonelliğe işaret edebileceği yanılgısı konusunda; Vefai, ondalık kısmının sonsuz olmasının sayıyı irrasyonel yapacağı yanılgısı konusunda; Abdi ise ondalık kısmının uzun ama sonlu olmasının sayıyı irrasyonel yapacağı yanılgısı konusunda görüşlerini bildirmişlerdir. Bu yanılgılara öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlarda da rastlanılmıştır. Ondalık gösterimle ifade edilmiş ve açılımı sonsuza giden 0,123123123… ve 0,12345678910… sayısına ilişkin öğrencilerin sınıflandırmada yaşayacağı güçlüklerin sorulduğu soruya öğretmenlerin vermiş oldukları yanıtlar şu şekildedir:

- **Levhi:** Pi sayısının sonunu tahmin edemiyoruz bu nedenle kesirli yazılamaz ama bu iki sayının da kuralı belli ve devamını biliyoruz. Bu nedenle ikisi de rasyonel olur. Öğrenciler de bu şekilde düşünürler bence.
- **Edayi:** 0,123123… sayısının düzenli gidiyor olduğunu görüp rasyonel sayı olduğunu söylerler bence. Ama diğer sayının düzensiz gittiğini söyleyip irrasyonel diyeceklerdir.
- **Hilali:** 123 devrettiği için büyük ihtimalle o sayının irrasyonel olduğunu söylerler ama diğerinde devirli bir şey olmadığı için ona rasyonel deyip geçerler.
- **Vefai:** Bu iki sayıya da irrasyoneldir derler. Ondalık kısımlarının sonsuza gitmesi bu düşünceye yönlendirir.
- **Abdi:** 0,123456… sayısına direk irrasyonel derler. 0,123123… sayısında biraz daha fazla düşünürler. Devirli sayılarda çizgi olduğu için rasyonel diyor öğrenci ama çizgi olmayınca irrasyonel diyen öğrenciler olabilir.

Öğretmenlerin bu soruya verdikleri yanıtlar karşılaştırıldığında farklılıklar olduğu görülmektedir. Öğretmenlerin 0,123123123… sayısına öğrencilerin verebileceği düşündükleri cevabı ilk sıraya 0,123456789… sayısına öğrencilerin verebileceği düşündükleri cevabı ikinci sıraya yazarsak şu ilginç sonuç ortaya çıkmaktadır:

- Levhi: Rasyonel- Rasyonel
- Edayi: Rasyonel-İrrasyonel
- Hilali: İrrasyonel-Rasyonel
- Vefai: İrrasyonel-İrrasyonel
- Abdi: İrrasyonel-İrrasyonel

Öğretmenlerin görüşlerine bakılırsa tüm kombinasyonlar görülmektedir. Öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlarda ise her iki grupta da %50 ve daha fazlasının doğru cevabı verip "Rasyonel-İrrasyonel" dedikleri görülmektedir. 2.sırada da "İrrasyonel-İrrasyonel" diyen öğrenciler bulunmaktadır. Öğretmenlerin vermiş oldukları yanıtlar incelendiğinde Levhi'nin kendisinin de yanılgıya sahip olduğu görülmektedir.

4.4.4. Öğrencilerin π Sayısının Değerine İlişkin Algılarına Yönelik Öğretmen Görüşleri

"Sizce öğrenciler π sayısının değeri konusunda ne düşünüyorlar? Ayrıca π sayısının irrasyonelliği ile ilgili öğrenci güçlükleri nelerdir?" sorusuna yönelik öğretmenlerin vermiş oldukları cevaplar şu şekildedir:

- **Levhi:** Onun yaklaşık olarak 3'e veya 3,14'e eşit olduğunu biliyorlar. Ama irrasyonel derler.
- **Edayi:** Biliyorlar onu. Yaklaşık değerlerini de biliyorlar irrasyonel olduğunu da hatta çemberin çapına oranı olduğunu da biliyorlar.
- **Hilali:** Sonsuza kadar gittiğini biliyorlar ondalık kısmının ama sorularda genelde 3 kullandığımız için büyük ihtimalle ilk alacağımız cevap 3'e eşit olduğudur. Ancak pi sayısına irrasyonel derler muhtemelen. Çünkü vurguluyoruz.
- **Vefai:** Sayının nerden geldiğini tanımını falan bilmiyorlar ama sayının 3 veya 3,14'e eşit veya yakın bir sayı olduğunu biliyorlar. Yalnız devamında sonsuza kadar ondalık kısmının gittiğini ve devretmediğini bilen öğrenci de var bilmeyenler de var.

- **Abdi:** Neden 3,14 diyoruz da 3,1 değil ya da 3,1415 değil falan diye soruyorlar. "Yaptığımız işlemin hacmine göre yaklaşık değerlerini alabiliriz." diyorum. Ancak sayının daha devam ettiğini biliyorlar. "Sonuncu rakam ne hocam?" sorusu da soruluyor. "Ne bileyim onu bulsam tarihe geçeceğim zaten." Gerçi sonuncu rakam bulunsa sayı irrasyonellikten çıkar.

4.4.5. Öğrencilerin İrrasyonel Sayıların Ondalık ve Köklü Gösterimine İlişkin Algılarına Yönelik Öğretmen Görüşleri

Öğretmenlere yöneltilen "Öğrencilere 'İrrasyonel sayıların tamamı ondalık biçimde yazılabilir mi?' diye sorsak sizce nasıl cevaplar gelir? Öğrenciler köklü sayıları ondalık biçimde yazabiliyorlar mı, zorluk çekiyorlar mı?" sorusuna verdikleri yanıtlar şu şekildedir:

- **Levhi:** Yazılabileceğini söylerler ondalık olarak. Köklü sayıların da yaklaşık olarak ondalık değerlerini söyleyebilirler.
- **Edayi**: Hiç bu konuda konuşmamıştık bilmiyorum. Ama bir köklü sayının açılımı olduğunu biliyorlar. Hesap makinesiyle de hesaplamıştık ve hatta şunu da unutmayın demiştim birçok soruda çıkabilir köklü sayıların yaklaşık değerleri sorulabilir diye. Hesap makinasıyla falan hesaplamıştık ama kendileri yapamazlar.
- **Hilali:** Her irrasyonel sayının bir ondalık açılımı olduğunu düşünebilirler. Direk akıllarına devirli ondalık sayıların gelebileceğini düşünüyorum. Hesap makinesi ile köklü sayıların ondalık açılımını gösteriyoruz o yüzden söylerler. Kendi başlarına ise deneyerek bulurlar yaklaşık olarak.
- **Vefai:** Her irrasyonel sayının ondalık açılımı olduğunu düşünemezler. Özellikle köklü sayıların birer ondalık açılımlarının da olduğunun çoğu öğrenci farkında değil.
- **Abdi:** Öğrenciye bir tane köklü sayının ondalık açılımını bulmaya yönelik örnek gösterdiğin vakit onlar da bulabiliyorlar. Ama göstermediğin zaman bilmemeleri de doğal.

Vefai ve Abdi hariç öğretmenler, öğrencilerin irrasyonel sayıların tamamının bir ondalık açılımı olduğunu bildiklerini düşünmüşlerdir. Ancak öğrencilerin yanıtları incelendiğinde iki grupta da en çok verilen cevabın, "Hayır yazılamaz" olduğu görülmektedir.

4.4.6. Öğrencilerin İrrasyonel Sayıların ve Rasyonel Sayıların Yoğunluğuna İlişkin Algılarına Yönelik Öğretmen Görüşleri

Öğrencilere sorulan "Hangi sayı kümesi eleman sayısı bakımından daha zengindir, rasyonel sayılar mı irrasyonel sayılar mı?" sorusuna verilebilecek cevaplarla ilgili öğretmenlerin görüşleri alınmıştır. Ayrıca sayı kümelerinin yoğunluklarıyla ilgili öğrencilerin yaşadığı güçlüklerin neler olduğu sorulmuştur. Öğretmenlerden gelen yanıtlar şu şekildedir:

- **Levhi:** İrrasyonel sayıların daha fazla olduğunu bilirler. Yoğunluklarının üzerinde fazla durmuyoruz ama Venn şemasında irrasyonel sayıların olduğu kısmı daha büyük çizerek onların daha çok olduğunu belirtiyorum.
- **Edayi:** Ben sormuştum bunu denemek için şöyle rasyonel sayı daha çok diyorlar. İrrasyonel sayı örneklerini daha az görüyorlar da ondan bu düşünce var. Gerçek hayatta da az görüyorlar köklü sayıları. Pi sayısı var bir de işte düzenli olmayan sayılar. Bu yanılgının giderilmesi konusunda da bir şey yapmıyorum. Çünkü öğrencilerin yoğunluk ile ilgili düşünmelerine gerek yok ortaokul seviyesinde.
- **Hilali:** Büyük ihtimalle irrasyonel derler. Bir sonsuzluk olduğu için ve düzensizlik. Ama bu konu üzerinde durmuyorum.
- **Vefai:** Bence rasyonel sayılar daha fazla derler. Köklü sayılardan ziyade kesirler akıllarına gelir. 1/5, 1/7 gibi sayıları düşünüp sonsuza kadar gidiyor, rasyonel sayılar daha fazladır diyebilirler. Yoğunluk ile ilgili de öğrencilerin yanılgıları mevcut. Daha doğrusu bilgisizlikleri mevcut. Bir öğrenci reel sayıların rasyonel sayılardan daha yoğun olduğunu anlayamaz. O şekilde düşünemez. Ama anlatırsan onaylar.

- **Abdi:** Bilmiyorum. Bu soruyu ben bile sorarım. Hangisi daha yoğun? Hangisinden daha çok var?

Görüldüğü gibi Levhi ve Hilali öğrencilerin irrasyonel sayıları fazla gördüğünü düşünmektedir. Edayi ve Vefai ise öğrencilerin rasyonel sayıları fazla gördüğünü düşünmektedir. Abdi ise kendisinin de sorunun cevabını bilmediğini ifade etmiştir. Öğrencilerin cevapları incelendiğinde ise rasyonel sayıların çoğunlukta olduğu görülmektedir.

2-5 aralığında 10,45-10,46 aralığında, $\sqrt{3}$ - $\sqrt{5}$ aralığında ve 1/4-1/5 aralığında 1 tane irrasyonel sayı örneği istenilen soruya yönelik öğretmenlerin görüşleri şu şekildedir:

- **Levhi:** 2 ile 5 arasında evet örnek verebilirler. 2'nin karesini alırlar 4, 5'in karesini alırlar 25 ve bunların arasında bir köklü sayı örneği verirler. 10,45 ve 10,46 arasında da yine örnekleri karekök içinde verebilirler. İkisinin de karesini alırlar sonra aralarında başka bir sayı söylerler. $\sqrt{3}$-$\sqrt{5}$ aralığında ise pi sayısını örnek verirler. Daha doğrusu kök içinde pi sayısı. 1/5 - 1/4 aralığında da ikisinin de karelerini alırlar ve daha sonra aralarında bir sayı söylerler. Yedinci sınıflar bile yapabilir bence.
- **Edayi:** 2-5 aralığında köklü sayı verirler. Ama $\sqrt{3}$ gibi aralarında olmayan bir sayı söyleyen öğrenciler de olur. 10,45-10,46 aralığında da sayı bulabilen öğrenci çok az olur. Hiç kendim sormamıştım. Bilmiyorum ne derler. $\sqrt{3}$-$\sqrt{5}$ aralığında da "vardır" diyebilirler diye tahmin ediyorum ama örnek verebileceklerini sanmıyorum. Mesela benim sınıfımda 1 kişi yapar bunu bilemedin 2. Otuz bir kişilik sınıfta yapamazlar yani çünkü o kadar çok temsil göstermiyoruz. 1/5 – 1/4 aralığında da sayı örneği verebilen 1 yada 2 kişi falan olur çünkü normalde de öğrencilerin rasyonel sayılarla problemi var. Daha doğrusu bunun temeli 4. Sınıftan kesirlerden geliyor. Öğrencinin kesirle bir problemi var zaten. Kesir kavramını tam oturtamadıkları için kesirlerde bu dönüşümleri işlemleri falan sevmiyorlar aslında yapamayacakları bir şey değil ama kesirlere öğrencinin ön yargısı var. Onun için bu soruyu da öğrenciler yapamaz.

- **Hilali:** 2 ile 5 arasında bir irrasyonel sayı örneği verirler. Her ikisinin de karelerini alıp ikisi arasında bir kareköklü ifade bulurlar. 1/4 ve 1/5 aralığında da bulabilirler yine aynı mantık uygulayarak. 10,45-10,46 aralığında ise yuvarlayadabilirler ama büyük ihtimalle karelerini alacaklardır. Ondalık olarak yaklaşmazlar diye düşünüyorum. $\sqrt{3}$-$\sqrt{5}$ aralığında iyi öğrenciler ondalık açılımları düşünüp bir irrasyonel sayı bulabilirler. Ama yoktur diyen öğrenciler de çok olacaktır. Sonsuzluk düşüncesi akla gelir mi bilmiyorum.
- **Vefai:** 2-5 aralığında öğrenciler direk $\sqrt{3}$ vardır diyebilirler. $\sqrt{5}$ de diyebilirler. O aralıkta olup olmadığına bile dikkat etmeyebilirler yani. 10,45 ve 10,46 aralığında ise hayatta bir öğrenci irrasyonel sayı örneği söyleyemez. Hiç sanmıyorum ondalık açılımla falan vereceğini. $\sqrt{3}$-$\sqrt{5}$ aralığında da öğrencilerin bir irrasyonel sayı bulabileceğini zannetmiyorum. 1/4 ve 1/5 arasında da sayı bulamazlar. Önce ondalığa çevirip sonra sayı bulmak akıllarına gelmez. Sanmıyorum.
- **Abdi:** 2-5 aralığında öğrenci direk 2,… yazarak sonsuz bir ondalık açılım verirler. Direk akıllarına gelen ondalık sayı geldiği için ona yönelirler. Köklü olarak ifade etmezler. Ondalık açılımla söylerler. 10,45-10,46 aralığında sınıfın %60'ı 'irrasyonel sayı yoktur' der. Çünkü bundan sonra nasıl devam ettiririz diye düşünürler. "Vardır" diyenler de çıkar. İyi öğrenciler ondalık kısmı uzatır. $\sqrt{3}$-$\sqrt{5}$ aralığında sayı bulmak kök kavramı biraz sıkıntı olduğundan zor. Kökten çıkarma yaklaşık değer bulma olayına pek fazla yanaşmazlar. Daha doğrusu akıllarına gelmez. 1/4 - 1/5 aralığı içinse iyi öğrenciler genişletip ortak paydadan bir şey çıkarırlar. Bir grup öğrenci ise kolaya kaçıp ondalığa çevirir. Daha sonra ondalık olarak araya sayı koyarlar

Görüldüğü gibi özellikle Levhi ve Hilali öğrencilerin köklü sayılara odaklanacağı ve buna göre cevaplar verebileceği görüşündedir. Abdi ise öğrencilerin ondalık sayılara odaklanarak cevap vereceğini düşünmektedir. Edayi ve Vefai ise öğrencilerin bu aralıklarda irrasyonel sayı örneği verirken zorlanacağını hatta çoğu öğrencinin yanıt veremeyeceğini belirtmiştir. Öğrencilerin iki sayı arasında kaç tane

irrasyonel sayı bulunacağını belirtmesi onların yoğunluk-ayrıklık düzeylerini göstermektedir. Öğretmenlerin görüşlerine bakılarak öğrencilerin algıları konusunda bilgi edinilebilir. Rastgele alınan iki sayı arasında kaç tane sayı olacağına dair öğrencilerin verebilecekleri cevaplara ilişkin öğretmenlerin yorumları şu şekildedir:

- **Levhi:** Sonsuz sayıda vardır. Bunu öğrenciler de yapabilir çünkü ondalık sayıları anlatırken sayının yanına sonsuz tane 0 konulabilir diyoruz bunu irrasyonel sayılara da uyarlayıp sonsuzluk fikrine ulaşabilirler.
- **Edayi:** Bilmiyorum derler. Sonsuz olduğunu yapamazlar yani normalde irrasyonel sayıların sonsuz olduğun bilirler ama iki tane sayının arasında sonsuz tane irrasyonel olacağını konuşmamıştık. Ben sayı doğrusunu doldururken gösterdim ama onu pek hatırlayacaklarını sanmıyorum.
- **Hilali:** Biraz orda soru işareti yaşayabilirler ama eğer konu anlatıldıktan sonra sorulursa belki daha iyi bir cevap alınabilir. Sonsuzluk akıllarına gelmeyebilir. Ondalıklı olarak düşünmeyebilirler o yüzden akıllarına gelmeyebilir.
- **Vefai:** Sonsuzluğu düşünemeyeceklerini düşünüyorum. Genelde bunları biz kendimiz verdiğimiz için çocukların düşünüp düşünemeyeceğine pek dikkat etmiyoruz. Ama "2 tane 3 tane vardır." der ve bulmaya çalışırlar muhtemelen. Sonsuz tane var olduğunu söylemezler.
- **Abdi**: Sonsuzluk akıllarına gelmez. Bir sayı söylerler. Şu kadar sayı var derler.

Görüldüğü gibi öğretmenlerin görüşleri öğrencilerin akıllarına sonsuzluk fikrinin gelmeyeceği yönündedir. Gerçekten de öğrencilerin %50'den daha az kısmı iki grupta da yoğunluk düzeyinin altında kalmıştır. **Levhi** ile yapılan görüşmede araştırmacı ile aralarında şu diyalog geçmiştir:

- **A:** İki sayı arasında sonsuz tane sayının olduğunu öğrenciler söyleyebileceğini söylediniz. Ya öğrenci sorarsa "Her iki rasyonel sayı arasında irrasyonel sayı var mıdır ya da her iki irrasyonel sayı arasında rasyonel bir sayı var mıdır?" diye?

- **L:** İki rasyonel arasında bir irrasyonel bulunacağı gibi iki irrasyonel arasında da rasyonel sayı bulunabilir. Çünkü aralarında sonsuz nokta var derim.
- **A**: Ee o zaman öğrenci, "Madem herhangi iki rasyonel arasında irrasyonel bir sayı bulunabiliyor, herhangi iki irrasyonel arasında da bir rasyonel sayı bulunabiliyor. Bu iki sayı kümesinin de eleman sayısı aynıdır. İrrasyoneller daha fazla demiştiniz." derse?
- **L:** Pardon doğru söylüyorsunuz. İki rasyonel arasında mutlaka irrasyonel sayı bulabiliriz ancak iki irrasyonel arasında rasyonel sayı bulunmayabilir.

4.4.7. Öğrencilerin İki İrrasyonel Sayının Toplanması ve Çarpılmasına İlişkin Algılarına Yönelik Öğretmen Görüşleri

İki irrasyonel sayının toplamının ve çarpımının rasyonel sayı olup olamayacağına dair öğrencileri sorulan sorularda öğrencilerin toplamada yanılgıya düştüğü çarpmada ise büyük oranda doğru cevabı verdikleri görülmüştü. İki irrasyonel sayının toplamının irrasyonel olup olamayacağına ilişkin sorulan soruya öğretmenlerin verdikleri yanıtlar şu şekildedir:

- **Levhi:** İki irrasyonel sayıyı toplarsak rasyonel olur mu düşünmem lazım. Sonsuz sayı var sonuçta denk gelebilir toplamları rasyonel olan sayılar. Ama azdır bu şekilde durum.
- **Edayi**: Ya bunu yüksek ihtimalle kafalarında canlandıramazlar diye tahmin ediyorum olmaz derler. Ama bilerek demezler. Sezgisel davranırlar.
- **Hilali:** İrrasyonel olacağını söylerler. Rasyonel olacağına dair örnek akıllarına gelmez.
- **Vefai:** Akıllarına gelmez be öyle bir örnek. Nasıl gelsin? İrrasyonel olur derler.
- **Abdi:** İlk etapta olmaz derler. Öğrencilerimin verebilecekleri cevapları düşünüyorum da pi ile e yi nasıl toplarız diyen öğrenciler de olur. Rasyonel olabilir diyen öğrenciler de olur. Toplanmaz diyen de. Ama biraz uğraştırınca bulurlar. (A: Nasıl olabilir?) Bir sayının negatifini ve pozitifini

alırsak olur. (A: Peki iki pozitif irrasyonel sayının toplamı irrasyonel sayı olur mu?) Onu bilmiyorum. Nasıl denk gelecek öyle bilmiyorum.

Görüldüğü gibi öğretmenlerin genel olarak görüşü öğrencilerin rasyonel sayıların toplamının irrasyonel sayı olabileceğini düşünememeleri yönündedir. Hatta Levhi kendisi de yanılgı içindedir. Sayıların negatifleri görüşme sırasında aklına gelmemiştir. Abdi de iki pozitif sayının toplamının rasyonel olabileceği konusunda kararsız kalmıştır.

İki irrasyonel sayının çarpımının rasyonel olup olamayacağı konusunda öğrencilerin çoğu doğru cevaplar ve örnekler vermişlerdi. Bu konudaki öğretmen görüşleri ise şu şekildedir:

- **Levhi:** O soruya "Evet rasyonel de olabilir." derler. Zorlanmazlar. Köklü sayı örneği verirler.
- **Edayi**: Buna çok örnek yaptık. Konunun ardından örneğini verip yaptığımız zaman sormuş olsaydık o zaman "Evet" derler ama bir süre sonra sorsak sezgisel olarak "Hayır" diyebilirler.
- **Hilali:** İşin içine sadeleşmeler falan gireceği için çarpmada rasyonel olabilir derler. Toplamadaki kadar zorlanmazlar.
- **Vefai:** Bunu rahat yaparlar bence. Köklü sayıları çarpmak birbiriyle akıllarına gelir.
- **Abdi:** İki ondalık sayıyı çarpmaya çalışırlar ama bakar ki oradan bir şey çıkmaz. Sonra köklü sayıyı yazarsa çıkar işin içinden.

Öğretmenlerin görüşleri incelendiğinde öğrencilerin bu soruda zorlanmayacaklarını düşündükleri görülmektedir. Nitekim öğrenci cevaplarında da durum bu şekildedir. Öğrencilerin büyük bir oranı iki grupta da kareköklü sayılardan yola çıkarak "Evet, rasyonel olabilir." yanıtını vermişlerdir.

BÖLÜM V

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde önceki bölümde sunulmuş olan bulgular yardımıyla irrasyonel sayı kavramına ilişkin öğrencilerin yaşadıkları güçlüklerle ilgili sonuç, tartışma ve önerilere yer verilmiştir. Alt problemlerin ayrı ayrı tartışılması yerine irrasyonel sayılarla ilgili güçlükler sınıflandırıldığında ortaya çıkan bulgularda da ayrı ayrı ele alınan bölümler doğrultusunda sonuç ve tartışmalara yer verilmiştir. Bu sonuçlar doğrultusunda da çeşitli öneriler sunulmuştur.

5.1. Sonuç ve Tartışma

İrrasyonel sayı kavramına ilişkin yaşanılan güçlüklerin araştırıldığı bu çalışmada bulgular incelendiğinde öğrencilerin kavramla ilgili farklı imgelerinin olduğu görülmüştür. Farklı temsiller ve farklı tanımlardan yola çıkabilen öğrencilerin; sayıları sınıflandırırken, yoğunluk ile ilgili fikir yürütürken, sayıların toplanması ve çarpılmasının etkilerini açıklarken farklı yaklaşımlarda bulunması doğal bir sonuç olarak görülebilir. Bu yaklaşımların temelinde farkı kavram imgelerinin ağır basmasının yattığı düşünülmektedir. Kimi öğrenciler bir irrasyonel sayıyı ondalık temsille hayal etme eğiliminde olup ondalık biçime odaklanmakta kimi öğrenciler ise köklü sayı temsilinin dar kalıbı içinde irrasyonel sayıları açıklamaya çalışmaktadır. Bazı öğrenciler ise rasyonel olmayan sayı algısından yola çıkmakta bu da çeşitli sorunlara neden olmaktadır.

Rasyonel olmayan sayı imgesi ile hareket eden öğrencilerin yanılgılarının temelinde rasyonel sayılarla ilgili yanılgılarının yattığı düşünülebilir. Bulgular

incelendiğinde öğrencilerin rasyonel sayılarla da ilgili farklı tanımlamalarda ve temsillerde bulunduğu görülmektedir. Ondalık gösterim ve a/b şeklindeki kesirli gösterim (a/b rasyonel olacak şekilde) arasındaki birbirlerine dönüştürülebilir ilişkinin bilinmemesi söz konusudur. Her devirli ondalık sayının a/b rasyonel sayısına dönüştürülebileceği ve her a/b şeklindeki rasyonel sayının da devirli bir ondalık açılımının olduğu konusundaki bilgi eksikliğinin özellikle sayıları sınıflamada öğrencileri yanılgıya götürdüğü görülmüştür. Rasyonel sayı kavramında 8.sınıflarda ve 9.sınıflarda a/b temsilinin ön planda olduğu ancak ondalık sayı kavram imgesinin hatta köklü sayı kavram imgesinin ağır bastığı azınlıkta da olsa öğrencilerin mevcut olduğu görülmüştür. Öğretmenler de a/b temsilinden yararlanarak tanım yaptıklarını açıklamışlardır. Öğretmenlerin örnek beklentilerine ve tanım beklentilerine bakıldığında da kesirli gösterimin ön planda olduğu görülmektedir. Rasyonel sayıların tamamını karşılayacak olan a/b temsilinden veya ondalık temsilden yola çıkarak tanım yapan öğrencilerde aralarındaki bağlantıyı bilmemekten kaynaklı sorunlar yaşanabilmektedir. Bu sorunlar irrasyonel sayı kavramında da yanılgılara neden olabilmektedir.

İrrasyonel sayıların tamamını temsil edebileceğimiz en uygun gösterim ondalık temsildir. (Voskoglou ve Kosyvas, 2011) Çünkü tüm irrasyonel sayılar bir tam sayının veya bir rasyonel sayının karekökü şeklinde yazılamaz. Ancak 8. sınıflarda da 9. sınıflarda da karekök imgesi ağır basan öğrencilerin daha fazla olduğu görülmektedir. Bu durum sayıların yoğunluğu, sınıflandırılması gibi konularda da sorunlara neden olabilmektedir. İrrasyonel sayıların "rasyonel olmayan sayılar" tanımının anlaşılması zor bir algı olduğu düşünülebilir. Ayrıca rasyonel sayılardaki yanılgıların irrasyonel sayılara taşınmasına yol açtığı da görülmektedir. Bu çalışmada, her iki sınıf seviyesinde öğrencilerin de çoğunluğu geçerli tanımlar yapabilmişlerdir. Öğrencilerin çoğunluğu "rasyonel olmayan sayı" şeklinde tanımlama yapmıştır ve irrasyonel sayı denildiğinde en çok akla gelen kavram köklü sayılar olmuştur. Kara ve Delice (2012) çalışmaları da bu bulguyu destekler niteliktedir. Fischbein, Jehiam ve Cohen(1995)'in çalışmalarında ise 9.sınıfların sadece %14'ü doğru tanım yapabilmiştir. Öğrencilerin irrasyonel sayı kavram tanımını bilmeseler de kavram imajına sahip oldukları söylenebilir. Çünkü bazı

öğrencilerin irrasyonel sayı tanımını bilmese de irrasyonel sayı örnekleri verebildiği görülmüştür. Öğretmenler, öğrencilerin yapabileceği tanımlar konusunda farklı düşünceler ortaya koymuştur. Kendilerinin de farklı tanımlamalar yaptığı ya da tanım yapmadıklarını ifade ettikleri görülmüştür. Ancak daha çok 'rasyonel olmayan sayı' düşüncesinden hareket edildiği görülmüştür.

Gerçek sayı kavramıyla ilgili öğrencilerin yanılgıları olabilmektedir. Gerçek sayıları irrasyonel olmayan sayı şeklinde tanımlayan öğrenciler mevcuttur. Hatta gerçek sayılarla tam sayıları bağdaştıran öğrenciler de vardır. Gerçek sayılarla ilgili 9.sınıfların 8.sınıflara göre daha geçerli sayılabilecek tanımlar ve örnekler verdikleri görülmüştür. Çalışmada 9.sınıf öğrencilerinin %94'ü gerçek sayı için iki sayı kümesinin birleşimi, bütün sayılar veya sayı doğrusunu dolduran sayılar açıklamasını yapabilmişken Fischbein, Jehiam ve Cohen(1995)'in çalışmalarında bu açıklamaları yapabilen 9.sınıf öğrenci oranı %17'de kalmıştır. Öğretmenlerde de öğrencilerin gerçek sayıyı tanımlayamayacaklarına ilişkin görüşler mevcuttur. Gerçek sayı kavramı üzerinde yeterince durulmadığı düşünülebilir.

Öğrencilerin sayı kümelerini karşılaştırmayla ilgili de güçlükleri vardır. Öğrencilerin büyük çoğunluğu doğru yapmasına rağmen önemli bir azınlık hem rasyonel hem de irrasyonel olan sayıların olabileceğini dile getirmiştir. π sayısıyla ilgili yanılgıların yanı sıra köklü sayılar imgesinin ağırlığının da bu düşünceye neden olduğu düşünülebilir. Arbour (2012), öğrencilerin köklü temsili irrasyonel sayıların belirteci olarak gördüğünü ifade etmiştir. Tam kare olan köklü sayılar, öğrencilerde hem irrasyonel hem de rasyonel olan sayı imajı yaratabilmektedir. Rasyonel sayı-irrasyonel sayı ilişkisinde yaşanan güçlüklerin rasyonel sayı kavramındaki bilgi eksikliğinden de kaynaklanabildiği düşünülebilir. Özellikle sıfırın kesirli biçimde yazılımında yapılan hatalar, öğrencilerde onun hem rasyonel hem de irrasyonel olabileceği algısı yaratabilmektedir.

9.sınıfların tamamına yakını doğru cevaplamasına karşın 8.sınıflarda azımsanmayacak oranda yanlış yapan öğrencilerin olduğu gerçek sayı kümesinin diğer sayı kümeleriyle olan ilişkisi konusunda da çeşitli yanılgılar söz konusudur.

İrrasyonel olmayan sayılara gerçek sayı denildiği, ondalık kısmı sonsuza giden bir sayının gerçek sayı olamayacağı, gerçek sayıların kesirli yazılabilmesi gerektiği gibi düşünceler bazı yanılgılardandır.

Sayı kümeleri arasındaki ilişkiye genel olarak bakıldığında 9.sınıfların 8.sınıflara göre daha iyi noktada oldukları görülmektedir. Venn şeması ile gösterimde 9.sınıfların tamamına yakını hata yapmazken, 8.sınıflarda %36 gibi bir hata oranı vardır. Bunun nedeni olarak kümeler konusunun ortaokulda 6.sınıfta işlenmesi 9.sınıflarda ise gerçek sayılardan önce işlenmesi gösterilebilir. Kara ve Delice (2012) çalışmalarında Venn şemasıyla sayı kümelerinin ilişkisini göstermelerini öğrencilerden istemiş ve lise düzeyinde öğrencilerin %87'sinin yanlış çizim yaptığını görmüşlerdir. Bu araştırmada ise öğrencilere çizim yaptırılmamasına karşın Venn şemasını doldurmadaki doğruluk oranı oldukça yüksektir. Sayı kümeleri arasındaki ilişkinin daha iyi anlaşılması için küme kavramının da öğrencide oluşması gerektiği söylenebilir. Ancak yeni matematik öğretim programına göre kümeler konusu ortaokuldan tamamen kaldırılmıştır. Öğretmenlerin tamamının Venn şemasından yararlanarak sayı kümesindeki ilişkileri gösterdiklerini ifade etmeleri göz önüne alındığında kümeler konusunun kaldırılmasının öğretim sürecini de etkileyeceği söylenebilir.

Verilen bir sayının sınıflandırılması yani hangi kümelere ait olduğunun söylenebilmesi oldukça önemli olduğu düşünülebilir. Kavram tanımı bilinmese bile doğru bir kavram imgesine sahip öğrenci sayıları tanıyabilir. 9.sınıfların tam sayı ve a/b şeklinde yazılmış bir rasyonel sayıyı sınıflamada oldukça başarılı olduğu görülürken 8.sınıflarda negatif sayıları irrasyonel sayı olarak sınıflayan öğrencilerin olduğu görülmüştür. Ayrıca a/b ifadesinde a'yı b'ye bölerek ortaya çıkan ondalık açılıma göre yorum yapma eğiliminde olan öğrenciler vardır. Bunun nedeni olarak da öğrencilerin ondalık açılım ve kesirli gösterimle ilgili bağlantıyı kavrayamaması gösterilebilir. Zazkis ve Sirotic (2004) öğretmen adayları ile yaptıkları çalışmada a/b gösterimine rasyonel deyip de aynı sayının ondalık açılımına irrasyonel diyen adayların bulunduğunu ve bunların sayının nasıl yazıldığına göre rasyonellik-irrasyonellik durumunun değiştiğini düşündükleri bulgusuna ulaşmışlardır. Aynı

rasyonel sayının ondalık temsille de kesirli gösterimle de ifade edilebileceği göz ardı edilmektedir. Bu nedenle öğrencilerin bir kısmı $\frac{23}{17}$=1,35294… sayısının rasyonelliği konusunda kararsızlığa düşmüştür. Bu durum Kara ve Delice (2012) çalışmasını destekler niteliktedir. Zazkis ve Sirotic (2004) çalışmalarında 53/83 sayısı için benzer yanılgılar ortaya koymuşlardır. Çalışmalarında öğretmen adaylarının dahi sayının ondalık kısmına bakıp irrasyonelliğe karar verebildikleri görülmüştür. Rasyonel sayılardan kaynaklı bir başka sorun da tanımda yer alan a/b ifadesindeki b'nin sıfır olmama şartının yanlış yorumlanmasıdır. 5/0 gibi bir ifadenin rasyonel sayı olmadığı bilincinde olan öğrenciler irrasyonel olarak sınıflama yoluna gidebilmektedir. Çünkü kavram imgelerinde rasyonel olmayan sayıların irrasyonel olacağı mevcuttur. Bir başka yanılgı da öğretmenler tarafından ifade edilmiştir. Öğrencilerin bir sayının sadece tek bir kümeye ait olması gerektiğini düşünebildiklerini öğretmenler ortaya koymuşlardır.

Π sayısının iki sınıf düzeyinde de yüksek bir oranda irrasyonel olarak sınıflandırıldığı görülmektedir. Π'yi 9.sınıf öğrencilerinin %97'i irrasyonel olarak sınıflamıştır. Bu durum Fishbein ,Jehiam ve Cohen (1995) çalışmasındaki bulgulardan farklıdır. O çalışmada 9.sınıf öğrencilerinden %83'ü π sayısını irrasyonel olarak sınıflayamamıştır. π'nin 3,14 yaklaşımına ait de yanılgılar olabilmektedir. 3,14 rasyonel sayısını da π'ye eşit olarak düşünüp irrasyonel olduğunu belirtenler olmaktadır. Güven, Çekmez ve Karataş (2011) çalışmalarında matematik öğretmen adaylarına bazı sayılar verip sınıflandırmalarını istemişlerdir. Bu çalışmanın bulguları incelendiğinde Π sayısını 1.sınıf öğrencilerinin %37'sinin,devirli olmayan ondalık temsilli irrasyonel sayıyı %29'unun irrasyonel olarak sınıflayabildiği görülmüştür. Hatta bu çalışmada olduğu gibi bazı öğrenciler π sayısına irrasyonel demesine rağmen 2/ π gibi kesirli verilmiş bir sayıyı rasyonel sayı olarak sınıflamıştır. Bu durum da a/b ifadesi ve rasyonellik kavramının bir arada algılanabildiği sonucundan kaynaklanmış olabilir.

Devirli ondalık sayılarla da ilgili yanılgılar mevcuttur. Ondalık açılımı sonsuza giden her sayının irrasyonel olduğu ve kesirli yazılamayacağı yanılgısında olan öğrenciler vardır. Devirli sayıda devreden işareti yoksa irrasyonel sayı olduğunu

düşünen öğrenciler de mevcuttur. Ayrıca bir sayı devretse de onda birler basamağından itibaren devir başlamazsa yani 2,3454545… gibi bir sayı için 3'den dolayı sayıyı irrasyonel olarak sınıflayan öğrenciler vardır. Bu yanılgıların her birinin dikkat çekici olduğu söylenebilir. Devirli sayıların anlaşılması a/b şekline dönüştürülebilmesi oldukça önemlidir (Zazkis ve Sirotic, 2004). Bu eksiklik irrasyonel sayı kavramı ile ilgili de yanılgılara neden olabilmektedir.

Ondalık kısmı sonlu olan 2,354789 gibi bir sayının ondalık açılımına bakılarak irrasyonel sayı yorumu yapılabilmektedir. Bulgular incelendiğinde bunun nedeninin bazı öğrencilerin ondalık kısımda örüntü arayışları olduğu görülmüştür. Özellikle ondalık sayı kavram imgesi ağır basan ancak tanımı eksik bilen öğrenciler de bu durum söz konusudur.

8.sınıflarda da 9.sınıflarda da ondalık olarak verilmiş irrasyonel veya rasyonel sayıyı sınıflamada yanılgılar görülmektedir. Köklü şekilde ifade edilmiş sayılara göre bu oran daha fazladır. Bu nedenle irrasyonel sayılarda da rasyonel sayılarda da ondalık gösterime önem verilmesi önerilebilir. Öğrencilerin ondalık gösterimdeki hatalarından biri ondalık açılımda örüntü olması halinde ve kuralı bilinmesi halinde sayının rasyonel olacağı düşüncesine sahip olmalarıdır. Bu nedenle 0,12345678910… gibi bir sayı için rasyonel sayı sınıflaması yapılabilmektedir. Araştırmada öğretmenlerin dahi aynı yanılgıya sahip olabileceği görülmüştür. Zazkis ve Sirotic (2004) çalışmalarında öğretmen adaylarının da tekrarlayan örüntü aramak yerine herhangi bir örüntü arayıp irrasyonel olarak sınıflama yapabildiğini ifade etmişlerdir.

Köklü sayıları sınıflandırmada öğrenciler daha başarılıdır. Ancak içleri tam kare olan köklü sayılara irrasyonel sayı diyen öğrenciler de mevcuttur. Bu durum Fischbein, Jehiam ve Cohen(1995)'in çalışmalarında da görülmüştür. O çalışmada 9.sınıf öğrencilerinin sadece %30'u $\sqrt{16}$'yı rasyonel olarak nitelemiştir. Bir de $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$ gibi işlem yaptıktan sonra sonucu rasyonel olan sayılar konusunda yanılgılar söz konusudur. Kimi öğrenciler paya ve paydaya bakarak sayıya irrasyonel derken, kimi ise sadece kesir çizgisine odaklanıp sayıya rasyonel demektedir. Her ikisi de yanlış

olan bu durumlara öğretmenlerin dikkat etmesi gerekmektedir. Öğretmenler özellikle ondalık temsille ifade edilmiş sayıların sınıflanması konusunda öğrencilerin hatalar yapabildiğini söylemişler ve öğrencilerin yanılgılarına benzer örnekleri ortaya koymuşlardır. Bu çalışmada $\sqrt{3}$ sayısını öğrencilerin yarıdan fazlası her iki grupta da irrasyonel olarak sınıflayabilmişken Fischbein, Jehiam ve Cohen (1995) çalışmasında benzer bir ifade olan $3\sqrt{8}$ sayısını 9.sınıf öğrencilerinin %17'si irrasyonel sayı olarak sınıflayabilmiştir.

Π sayısının değerinin her iki sınıf düzeyinde de öğrencilerin büyük bir kısmı tarafından 3'e veya 3,14'e tam olarak eşit olmadığı yaklaşık olarak eşit olduğunun bilindiği görülmektedir. Ancak özellikle 8.sınıflarda π sayısının irrasyonel ondalık açılımı olan 3,1415...sayısına eşit olmadığı yönünde bir algı mevcuttur. Bazı öğrencilerin çevrenin çapa bölümü olan π sayısını süreç olarak gördüğü bu nedenle hiçbir zaman bir sayısal değere tam eşit olamayacağı algısında olduğu görülmüştür. 9.sınıflarda ise π sayısını nesneleştirebilen öğrenci sayısı daha fazladır. Gray ve Tall (1994) da π sayısının procept olan bu doğasından söz etmiştir. Voskoglou ve Kosyvas (2011) çalışmalarında $\sqrt{2}$ sayısının 1,41'e eşitliği, 1,414444... sayısına eşitliği, 1,41'e yaklaşık olarak eşitliği ve sayının tam olarak bir değeri olmadığı önermelerinden tamamını doğru cevaplayan lise öğrencilerinin oranının %17'de kaldığı görülmektedir. Buna göre sadece π sayısı için değil diğer irrasyonel sayılar için de nesneleştirememe sorununun olduğu düşünülebilir.

İrrasyonel sayıların en iyi temsil yöntemi ondalık gösterimdir (Voskoglou ve Kosyvas, 2011). Çünkü her irrasyonel sayının bir ondalık açılımı vardır. Ancak köklü temsil tüm irrasyonel sayıları açıklamak için yeterli değildir. Araştırmanın bulguları incelendiğinde 8.sınıfların ve 9.sınıfların yarıdan fazlasının her irrasyonel sayının ondalık açılımının olmayacağı düşüncesinde olduğu görülmüştür. Bazı öğrenciler köklü sayıların ondalık açılımlarının olduğunun farkında değildir. Bu nedenle irrasyonel sayıların da çoklu temsiline önem vermek gerekir. Öğretmenler ise derslerde köklü bir sayının yaklaşık olarak kaç olduğu konusunda alıştırmalar yaptıklarını ancak öğrencilerin yine de akıllarına gelemeyebileceğini belirtmişlerdir. Bir başka husus da köklü sayılarla ilgilidir. Öğrencilerde köklü bir sayının irrasyonel

sayı olmak zorunda olmadığına ilişkin görüş çoğunluktadır. Ancak köklü sayılarla irrasyonelliği aynı algılayan öğrenciler de mevcuttur.

Her iki sınıf seviyesinde de öğrencilerin yarıdan fazlasının yoğunlukla ilgili algılarında rasyonel sayıların irrasyonel sayılara göre fazla olduğu düşüncesi vardır. Genelde rasyonel sayılarla işlem yapılması, rasyonel sayılarla çözülen problemler ve irrasyonel sayıların fazla kullanılmaması düşünüldüğünde bu algı anlaşılabilirdir. Öğrenciler tam sayıların, kesirli sayıların hatta bazı kareköklü sayıların rasyonel olduğunu irrasyonellerin ise sadece kökten çıkmayanlar olduğunu belirtip bu nedenle rasyonel sayıların fazlalığını savunmuşlardır. Ondalık sayı kavram imgesi ağır basan öğrenciler ise yoğunlukla ilgili biraz düşündükten sonra irrasyonel sayıların fazlalığına karar verebilmektedir. Bu nedenle de ondalık temsilin yoğunluk ile ilgili yanılgıları gidermede yardımcı olabileceği söylenebilir. İki sayı kümesinin eşit olduğunu düşünen öğrenciler de vardır. Özellikle 9.sınıflarda bu oran yüksektir. İki kümenin de sonsuz olmasının öğrencileri bu algıya götürdüğü düşünülebilir. Öğretmenlerden de hangi kümenin daha yoğun olduğu konusunda bilgi sahibi olmayanlar bulunabilmektedir. İrrasyonel sayıların daha fazla olduğunu bilen öğretmenler bile derste yoğunluk üzerinde durulmadığını ifade etmiştir. Ders kitapları incelendiğinde de bu konu üzerinde fazla durulmadığı görülmektedir.

Her iki irrasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı bulunamayacağına ilişkin yanılgı iki sınıf düzeyinde de söz konusudur ve öğrencilerin yarıdan fazlası bu yanılgıya sahiptir. İrrasyonel sayıların daha fazla olduğunu düşünen bazı öğrenciler bunun sonucu olarak da iki irrasyonel sayı arasında rasyonel sayıların her zaman olmaması gerektiği inancındadır. Öğretmenlerde bile bu düşüncenin olabileceği görülmüştür. Her iki irrasyonel arasında bir irrasyonel sayı bulunabileceğine dair inanç daha fazladır. Güven, Çekmez ve Karataş (2011) çalışmalarında da durum bu bulguya paraleldir. İrrasyonel sayıyı genelde köklü sayı temsiliyle düşünen öğrenciler kök içindeki sayıları ardışık olan iki sayı verilse bile bunların aralarında kök için ondalıklı yazılarak bir irrasyonel sayı bulunabileceğini düşünmektedir. Ancak rasyonel sayı bulmak istendiği zaman köklü ifadede işler zorlaşmaktadır. İrrasyonel sayı kavramı ile ilgili ondalık sayı imgesi ağır basan öğrenciler ise bu

soruları daha rahat cevaplamaktadır. Herhangi iki tane verilen a/b şeklinde rasyonel sayı, tam sayı, ondalık sayı veya köklü ifade aralığında öğrencilerin çoğunluğu irrasyonel sayı bulmakta zorlanmaktadır. Hatta bazı aralıklarda irrasyonel sayıların hiç olmadığı ya da az sayıda olduğu görüşü mevcuttur. Ondalık sayı imgesi ağır basan öğrenciler ise aralık nasıl verilirse verilsin irrasyonel sayının sonsuz sayıda bulunabileceğini ifade edebilmiştir. Voskoglou ve Kosyvas (2011) araştırmalarında da iki sayı arasında rasyonel veya irrasyonel sayı bulmaya yönelik bulgular incelendiğinde bu araştırmayı destekler nitelikte olduğu görülmektedir.

Her iki sınıf düzeyinde de çoğunluğun sahip olduğu bir yanılgı da iki irrasyonel sayının toplamının rasyonel sayı olamayacağı yanılgısıdır. 9.sınıflarda bu şekilde düşünen öğrencilerin oranı %78'dir. Öğrencilerin akıllarına sayıların negatiflerinin gelmediği görülmüştür. Hatta öğretmenlerin de aklına negatif sayılar hemen gelmeyebilmektedir. Bu nedenle önce 'rasyonel olmaz' düşüncesi ağır basabilmiştir. İrrasyonel sayı kavramında ondalık sayı imgesi ağır basan öğrencilerden "Eğer ondalık kısımlar toplandığında sayı devirli olursa ya da tam olursa rasyonel olabilir." düşüncesinin olabileceği görülmüştür. Ancak ondalık kısmı düzensiz iki sayının toplandığında yine ondalık kısmı düzensiz sayının oluşacağı da düşünülebilmektedir. Köklü sayı imgesi ağır basan öğrencilerde kökün içi aynıysa toplamın yine irrasyonel olacağı, kökün içi farklıysa zaten toplamanın yapılamayacağı düşüncesi mevcuttur. Ders kitaplarında, köklü sayıların yaklaşık değerlerinin verilip sonuç istendiği alıştırmalar yeterince yer almamaktadır. Köklü ifadelerin içindeki sayılar farklı ise toplama yapılamaz denilmektedir. Hâlbuki o iki sayının da ondalık açılımı vardır ve bu iki açılım yaklaşık olarak toplanarak bir sonuç elde edilebilir. Voskoglou ve Kosyvas (2011) çalışmalarında aynı soruya yer vermiş ve lise düzeyindeki öğrencilerde "Evet rasyonel sayı olabilir" diyen öğrenci oranının %5'de kaldığı bulgusuna ulaşmışlardır. Güven, Çekmez ve Karataş (2011) çalışmalarında öğretmen adaylarına soruları yöneltmiş ve yarıdan fazlasının iki irrasyonel sayıyı toplarsak her zaman irrasyonel sayı oluşacağını söylediklerini belirtmişlerdir. İki irrasyonel sayının çarpımının rasyonel sayı olabileceğine ilişkin bulguları ise bu çalışmayı destekler niteliktedir. Öğrencilerin büyük bölümü tarafından doğru cevaplanabilmiştir. İki irrasyonel sayının çarpımı konusunda da ondalık sayı kavram imgesi ağır basan

öğrencilerin zorlandığı görülmektedir. Köklü sayılarda aynı sayının birbirleriyle çarpılması ile sonuç rasyonel bulunabilmektedir. Ancak bu sayıların ondalık açılımı söz konusu olduğunda nasıl çarpılacağı da sorun olmaktadır, çarpımın sonucun bir tam sayı olabileceğine olan inanç da düşük olmaktadır. Nitekim $\sqrt{2}$'nin ondalık açılımının kendisiyle toplanması veya çarpılmasında öğrencilerin büyük çoğunluğu sonucun tam olarak eşit olmayacağı yaklaşık olarak eşit olacağı görüşündedir. Sayılar ve sonuç köklü verildiği zaman hiçbir sorun yaşanmazken işin içine ondalık temsil girdiği zaman öğrenciler zorlanmaktadır. $\sqrt{2}$'nin her ne kadar 1,41421... gibi bir sayıya eşit olduğu belirtilse de ondalık açılım bazı öğrenciler tarafından kapsüllenememiştir. Bu da öğrencilerin APOS'a göre nesne aşamasına geçmesini zorlaştırmıştır. Arbour(2012) çalışmasında öğrencilerin verdikleri bazı tanımlardan irrasyonel ondalık açılımları, "Rakamların dizilmesinden oluşan sonsuza kadar ilerleyen hiçbir zaman tam bir sayı üretmeyen, nesneleşmeyen ve bir sonuca varmayan bir süreç" olarak algıladıklarını ifade etmişlerdir.

5.2.Öneriler

Araştırmanın bulgularından yola çıkılarak şu önerilerde bulunulabilir:

- İrrasyonel sayı ve gerçek sayı kavramı verilmeden önce rasyonel sayı kavramıyla ilgili öğrencilerin ön bilgileri kontrol edilmelidir. Çünkü rasyonel sayı kavramıyla ilgili yanılgılar irrasyonel sayılara da yansımaktadır.
- Rasyonel sayının tanımı a/b temsilinden yararlanılarak verilse de ondalık temsil ve a/b temsili arasındaki bağlantıya önem verilmelidir. Her a/b rasyonel sayısının bir ondalık açılımı olduğu ve her ondalık açılımla ifade edilmiş rasyonel sayının a/b şeklinde ifade edilebileceği örneklerle gösterilebilir. Böylece öğrenci a'yı b'ye bölmeden de sayının ondalık açılımının ya devirli olacağını ya da sonlu olacağını düşünebilir. Aynı şekilde devirli bir sayı verildiğinde de onun a/b şekline yazılabilen bir rasyonel sayı olduğunu kavrayabilir. Bu dikkat edilmesi gereken bağlantı irrasyonel sayı kavramıyla ilgili yanılgıları da azaltacaktır.

- İrrasyonel sayıyı en iyi karşılayacak olan tanım ondalık kısmı devretmeyen ve sonsuza giden sayı olduğu tanımıdır(Zazkis ve Sirotic, 2004). Bu tanımla köklü ifadenin dar kalıplarından kurtulunması mümkün olunabilir. Özellikle sayı kümelerinin yoğunluğu konusunda birçok yanılgının önüne geçilebilir. Çünkü ondalık biçimde yazılmış olan iki sayı arasına yeni bir sayı koymak kolaydır. İrrasyonel sayı da rasyonel sayı da konulabilir.
- Öğretmenler irrasyonel sayıların farklı temsilleri kullanmaları tavsiye edilebilir. Hatta Pisagor Teoremi sonrası geometrik yaklaşımlarda bulunulması da irrasyonel sayıların somutlaştırılması açısından yararlı olabilir.
- Köklü sayıların ondalık açılımlarının olduğu bilgisi köklü sayı kavramı oluşturulurken kazandırılmalıdır. Hesap makinesiyle bir tam sayının ondalık açınımı bulunmaya çalışılabilir. Basamak sayısı arttıkça sayıya yaklaşıldığı gösterilebilir. Bu şekilde sayının sonsuza kadar gidiyor olduğu hissi yaratılabilir. Bu araştırmada böyle bir çalışmanın ne derece yararlı olacağı konusunda bir bulgu mevcut değildir. Bundan sonraki çalışmalarda köklü sayı-ondalık açılım ilişkisinin anlaşılmasında hesap makinesinin etkisi araştırılabilir.
- Önce ondalık temsilden yararlanılarak irrasyonel sayının verilmesi daha sonra sayı kümelerinin birleşiminden gerçek sayıların verilmesi yapılabilecek bir öğretim sırasıdır. Ama önce sayı doğrusu ve gerçek sayıların verilmesi daha sonra bu doğru üzerinde rasyonel olmayan sayıların da olduğu hissi yaratılarak irrasyonel sayılara geçiş yapılması da başka bir öğretim yöntemi olarak görülebilir. Gerçek sayı ile diğer sayı kümeleri arasındaki ilişkilerin hangi yöntemle daha iyi anlaşılabileceği araştırılabilir.
- Gerçek sayı kavramı ve tanımı üzerinde durulmalıdır. a/0 ifadesinin bir ondalık açılımı olamayacağından yola çıkılarak ne rasyonel ne irrasyonel sayı olduğu yani gerçek sayı olmadığı vurgulanmalıdır. Çünkü a/0 şeklindeki bir ifadeyi irrasyonel sayı olarak düşünen öğrenciler vardır.
- Sayı kümelerinin ilişkileri gösterilirken Venn şemasının önemi büyüktür. Venn şemasını daha doğru çizebilen 9.sınıfların sayı kümelerinin ilişkisine yönelik diğer sorularda da bu şemayı düşünerek doğru yanıtlar vermeleri

Venn şemasının yararlı olduğunu göstermektedir. Bu nedenle öğretmenler görsel olarak Venn şemasını kullanması önerilebilir. Ayrıca kümeler konusunun ortaokuldan kaldırılmasının sayı kümelerinin anlaşılmasını da zorlaştıracağı düşünülebilir. "Kümeler" konusunun sayı kümeleri arasındaki ilişkinin anlaşılırlığı üzerine etkisi araştırılabilir.

- Ondalık bir sayının ondalık kısmı kaç basamak olursa olsun bir yerde bitiyorsa (0 olarak devrediyorsa) rasyonel sayı olacağı hatırlatılmalıdır. Çünkü bu tür yanılgılar görülebilmektedir. Hatta sayının yüzlerce basamak sonra devretmeye başlayabileceği de belirtilmelidir. 144/233 sayısı 232 basamak sonra devretmeye başlamaktadır.
- Kesirli bir şekilde veya bir işlemle verilen köklü sayının irrasyonelliğine karar vermeden önce sadeleştirmelerin veya başka işlemlerin yapılarak sınıflama yapılmasının gerektiğine dikkat çektirilmelidir.
- π sayısının bulunmasına yönelik çalışmalarla sayının irrasyonelliği öğrencilere kavratılabilir. π sayısının 3 veya 3,14'e yaklaşık olarak eşit olduğu aslında bir irrasyonel sayı olduğu bilgisi öğrencilere kazandırılmalıdır.
- İki sayı arasında rasyonel veya irrasyonel sayıların bulunabildiği gösterilerek ve bu tekrarlanarak sayıların yoğunluğu ile ilgili öğrencilerde doğru bir anlayış geliştirilmelidir. Herhangi iki sayı arasında rasyonel veya irrasyonel sonsuz sayıda eleman olduğu ondalık temsillerden yararlanılırsa daha kolay fark ettirilebilir. Aralık sınır değerleri köklü sayılar olarak da verilse ondalık açılımının olduğu öğrenciye hatırlatılabilir.
- İki irrasyonel sayının toplamının rasyonel sayı olabileceği ve irrasyonel sayı olabileceği örneklerle gösterilmelidir. İki pozitif irrasyonel sayı kullanılarak da örnek verilmelidir. Ondalık temsilden yararlanılabilir. Aynı şekilde çarpmayla da ilgili örneklere yer verilmelidir.
- Bir köklü sayı ve ondalık açılımının birbirine tamamen eşit olduğu ve aynı sayı oldukları vurgusu yapılmalıdır. Bu şekilde işlemlerle ilgili yanılgıların da önüne geçilebilir.

KAYNAKÇA

Adıgüzel, N. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adayları ve 8. sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayılar ile ilgili bilgileri ve bu konudaki kavram yanılgıları. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi,. Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Aktaş, M. C., Aktaş, D. Y., ve Apaydın, Z. (2014). 9. Sınıf Öğrencilerinin Rasyonel Sayılar Kümesinin Yoğunluğunu Anlama Düzeyleri. **Education & Science/Egitim ve Bilim**. 39(171).

Altun, M. (1998). **Matematik Öğretimi.** 6. Baskı, Bursa: Alfa Yayın.

Arbour D. (2012). Students' Understanding of Real, Rational And Irrational Numbers. A Thesis in The Department of Mathematics and Statistics. Concordia University Montreal, Quebec, Canada.

Arcavi A., Bruckheimer M. ve Ben-Zvi R. (Jun., 1987). History of Mathematics for Teachers: The Case of Irrational Numbers**. For the Learning of Mathematics**. Vol. 7, No. 2. 18-23

Bacanlı, H. (2004). **Gelişim ve öğrenme.** Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Baki, A. (2006). **Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi.** Trabzon: Derya Kitabevi.

Barak, B. (2007). Limit Konusundaki Kavram Yanılgılarının Belirlenmesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Batenero, C., Godino, J., Vallecillos, A., Gren, D. & Holmes, P. (1994). Errors and Difficulties in Understanding Elementary Statistical Concepts. **International Journal of Mathematics Education in Science and Technology**. 25(4), 527-547.

Baykul, Y. (2006). **İlköğretimde Matematik Öğretimi: 6.-8. Sınıflar İçin**. Ankara: Pegem A. Yayıncılık.

Bingolbali, E. & Monaghan, J. (2008). Concept Image Revisited. **Educational Studies in Mathematics.** 68(1), 19-35

Birinci, K. S. (2010). Matematik Öğretmen Adaylarının İspatlama Performanslarinin Süreç-Nesne İlişkisi Açısından İncelenmesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks J. ve Nichols D. (1992). Development of The Process Conception of Function. **Educational Studies in Mathematics.** 23, 247-285

Brousseau, G. (2002). **Theory of Didactical Situations in Mathematics,** Çeviren ve Editör: Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. & Warfield, V., New York: Kluwer Academic Publishers.

Cankoy,O. Kavram Yanılgıları . http://www.aoa.edu.tr/cankoy/Kavram%20Yanılgısı%20Nedir.doc (10 Kasım 2009)

Cottrill, J. (2003). An Overview of Theories of Learning in Mathematics Education Research. in Preparing Mathematicians to Educate Teachers: Elementary Level Workshop. Lincoln, NE: MAA.

Çepni, S. (2005). Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş. Trabzon: Üçyol Kültür Merkezi.

Çetin, İ. (2009). 7. ve 9. Sınıf Öğrencilerinin Oran ve Orantı Konusundaki Kavram Yanılgıları. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Çimen, A. (2008). **Tarihi Değiştiren Bilginler**. Timaş Yayınları.

Denzin, N. K. ve Lincoln, Y. S. (1998). Introduction: Entering the Field of Qualitative Research, **The Landscape of Qualitative Research: Theories and Issues.** London: Sage.

Dikici, R. ve İşleyen, T. (2004). Bağıntı ve Fonksiyon Konusundaki Öğrenme Güçlüklerinin Bazı Değişkenler Aşısından İncelenmesi. **Kastamonu Eğitim Dergisi**. 11(2), 105-116.

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An Apos-Based analysis: Part 1. **Educational Studies in Mathematics.** 58(3), 335-359.

Ekiz, D. (2003). Eğitimde Araştırma Yöntem ve Metotlarına Giriş. Ankara: Anı Yayıncılık.

Ersoy, Y. ve Ardahan, H. (2003). İlköğretim Okullarında Kesirlerin Öğretimi-II: Tanıya Yönelik Etkinlikler Düzenleme. http://www.matder.org.tr (15 Aralık 2004)

Fischbein,E., Jehiam, R.ve Cohen,C.(1995). The Concept of İrrationals Number in High School Students and Prospective Teachers**. Educational Studies in Mathematics**. 29, 29–44.

Gray, E. ve Tall, D. O. (1991). **Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking.** Proceedings of PME XIII. Assisi, Vol. II, 72-79.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). **Duality, ambiguity, and flexibility: A" proceptual" view of simple arithmetic.** Journal for research in Mathematics Education, 116-140.

Güney, Z. (1993). **Soyut Matematiğe Giriş.** Dokuz Eylül Üniversitesi Yayınları, İzmir.

Güven, B., Çekmez,E. ve Karataş İ. (2011). Examining Preservice Elementary Mathematics Teachers' Understandings About Irrational Numbers. **PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies.** 21(5), 401-416

İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı ve Kılavuzu 6. Sınıf (2006). MEB Talim Terbiye Kurumu Başkanlığı. Ankara

Kanbolat, O. (2010). Bazı Matematiksel Kavramlarla İlgili Epistemolojik Engeller. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü.

Kara, F. ve Delice, A. (2012). **Kavram Tanımı Mı? Yoksa Kavram İmgeleri Mi? İrrasyonel Sayıların Temsilleri**. X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi.

Karaçay, T. (1985). Matematik Öğretiminin Bugünkü Durumu ve Değerlendirilmesi. **Matematik Öğretimi ve Sorunları.**

Karasar, N.(1984). **Bilimsel Araştırma Metodu.** Ankara: Hacettepe Taş Kitapçılık.

Karasar N.(1998). **Bilimsel Araştırma Yöntemi.** Ankara: Nobel Yayınevi

King, J. P. (1998). **Matematik Sanatı (5. Basım).** TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları, 49.

Kiriş, B. (2008). İlköğretim Altıncı Sınıf Öğrencilerinin "Nokta, Doğru, Doğru Parçası, Işın ve Düzlem" Konularında Sahip Oldukları Kavram Yanılgıları ve Bu Yanılgı Nedenlerinin Belirlenmesi. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Adnan Menderes Üniversitesi. Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Lesh, R., Behr, M., ve Post, M. (1987). Rational Number Relations and Proportions. In C. Janvier (Ed.). **Problems of Representation in The Teaching and Learning of Mathematics** (pp. 41–58). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

MEB, (2007). Mesleki Eğitim ve Öğretim Sisteminin Güçlendirilmesi Projesi Çocuk Gelişimi ve Eğitimi Öğrenme Güçlüğü Modülü. Ankara.

Olivier, A. (1989). Handling Pupils' Misconceptions. **Pythagoras.** 21, 10-19.

Özkaya, M. ve İşleyen, T. (2012). Hızlı Erişim Fonksiyonlarla İlgili Bazı Kavram Yanılgıları (Some Misconceptions Related to Functions). **Çankırı Karatekin Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi.** 3(1), 01-32

Özmantar, M.F. ve Yeşildere, S. (2008). **Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri (8. bölüm).** Ankara: Pegem Yayıncılık

Peirce, C. S. (1885). On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation. **American Journal of Mathematics.** 7(2), 180-196.

Peled, I. ve Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in Knowledge Integration: Revisiting Zeno's Paradox with Irrational Numbers. **International Journal of Mathematics Education, Science and Technology.** 30, 39–46.

Sfard, A. (1989, July). **Transition from Operational to Structural Conception: The Notion of Function Revisited.** In Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 3, pp. 151-158.

Shinno, Y. (2007). **On the teaching situation of conceptual change: epistemological considerations of irrational numbers.** In Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4, pp. 185-192.

Sirotic, N. ve Zazkis, R. (2007, May). Irrational Numbers: The Gap Between Formal and Intuitive Knowledge. **Educational Studies in Mathematics.** 65, 49-76.

Sirotic, N. ve Zazkis, R. (2007, July). Irrational numbers on the number line–where are they?. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 38(4), 477-488.

Sönmez V. ve Alacapınar F. G., (2011). **Örneklendirilmiş Bilimsel Araştırma Yöntemleri**. Ankara: Anı Yayıncılık.

Tall, D. O. & Razali, M. R., (1993). Diagnosing Students' Difficulties in Learning Mathematics. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.** 24(2), 209–222.

Tall, D. ve Vinner, S. (1981*).* Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**. 12(2), 151-169.

Tarhan, Ş. G. (2013). **İlköğretim Matematik 8 Ders Kitabı.** Ankara: Can Matematik Yayınları.

Tatar E., Okur M. ve Tuna A. (2008). Ortaöğretim Matematiğinde Öğrenme Güçlüklerinin Saptanmasına Yönelik Bir Çalışma. **Kastamonu Eğitim Dergisi.** Cilt:16, No:2, 507-516

Tatar, E. (2006). İkili İşlem Kavramı ile İlgili Öğrenme Güçlüklerinin Belirlenmesi ve 4MAT Yönteminin Başarıya Etkisi. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Tepedenlioğlu, N. (2007). **Kim Korkar Matematikten.** Nesin Matematik Köyü Kitaplığı:1 İstanbul: Sarmal Yayınevi.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. ve Wilson, J. (1998). Prospective Elementary Teachers' conceptions of Rational Numbers. http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html(13 Temmuz 2013)

Türk Dil Kurumu (2013), Türkçe Sözlük, http://www.tdk.gov.tr

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. **Learning and Instruction.** 14(5), 453-467.

Van de Walle, J. A. (2004). Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally, 5/E.

Vankus, P. (2005). History and Present of Didactical Games As A Method of Mathematics' Teaching, **Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics**. 5, 53- 68.

Voskoglou, M. G. (2013). An application of the APOS/ACE approach in teaching the irrational numbers. **J Math Sci Math Educ.** 8(1), 30-47.

Voskoglou, M. G., & Kosyvas, G. (2011). A study on the comprehension of irrational numbers. Quaderni di Ricerca in Didattica (Scienze Mathematiche), University of Palermo, 21, 127, 141.

Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and Speech. In R. W. Rieber & A. S. Carton (Eds.). **The Collected Works of L. S. Vygotsky. Volume 1. Problems of General Psychology**. New York: Plenum Press.

Yazıcı, E. (2004). Öğrenme Stilleri ile İlköğretimde Beşinci Sınıf Matematik Dersindeki Başarı Arasındaki İlişki. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü.

Yıldırım A. ve Şimşek H. (2011). **Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri**. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yudariah, M.Y. ve Roselainy, A.R. (2001a). Matematics Education at Universıtı Teknologi Malaysia (UTM). **Learning From Experience, Journal Teknologi.** 34(E), 9-24.

Zazkis, R. ve Sirotic, N. (2004). **Making Sense of İrrational Numbers: Focusing on Representation**. Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education. Vol.4, 497–50.

EKLER

Ad-Soyad: **Okul/Sınıf:**

İRRASYONEL SAYI KAVRAM TESTİ (EK-1)

1) Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Rasyonel sayı denildiğinde aklınıza neler gelmektedir?

-
-
-
-

Rasyonel sayı nedir? Tanımlayınız ve 5 tane örnek yazınız.

b) İrrasyonel sayı denildiğinde aklınıza neler gelmektedir?

-
-
-
-

İrrasyonel sayı nedir? Tanımlayınız ve 5 tane irrasyonel sayı örneği veriniz.

c) Gerçek(Reel) sayı nedir? Tanımlayınız ve 5 tane gerçek sayı örneği veriniz.

d) Hem *irrasyonel* hem de *rasyonel* olan sayı var mıdır? Açıklayınız.

e) *Rasyonel sayıların* tamamı *gerçek sayı* mıdır? Açıklayınız.

f) *Her irrasyonel sayı gerçek sayı* mıdır? Açıklayınız.

2) Hangi sayı kümesi eleman sayısı bakımından daha zengindir, rasyonel sayılar mı irrasyonel sayılar mı? (Hangisinden daha fazla vardır, rasyonel sayı mı irrasyonel sayı mı?) Açıklayınız.

3) Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

SORU	**EVET/HAYIR**	**Cevap Evet İse: Kaç Tane İrrasyonel Sayı Vardır?**	**1 Tane Örnek Veriniz**
2 ile 5 arasında irrasyonel sayı var mıdır?			
10,45 ile 10,46 arasında irrasyonel sayı var mıdır?			
$\sqrt{3}$ ile $\sqrt{5}$ arasında irrasyonel sayı var mıdır?			
$\frac{1}{5}$ ile $\frac{1}{4}$ arasında irrasyonel sayı var mıdır?			

4) Doğru olanlara $\surd$ atınız. Bir sayı için birden fazla kutuyu işaretleyebilirsiniz.

	Tam Sayı	Rasyonel Sayı	İrrasyonel Sayı	Gerçek Sayı
5				
-2				
0				
$-\frac{5}{3}$				
π				
3,14				
7,333...				
$\sqrt{3}$				
$-\sqrt{4}$				
2,3545454...				

	Tam Sayı	Rasyonel Sayı	İrrasyonel Sayı	Gerçek Sayı
0,10203040...				
$0,15\overline{7}$				
2,7581125...				
$\frac{23}{17}$=1,35294...				
$1,\overline{42593}$				
$1+2\sqrt{9}$				
$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$				
$\frac{\pi}{3}$				
$\frac{11}{3}$				
4,4793512853				

5) Aşağıdaki sayılar irrasyonel midir? Açıklayınız.

- 0,123123123...

- 0,12345678910...

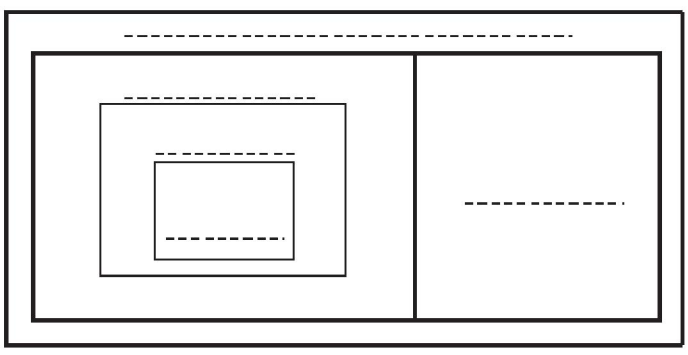
6) Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Hangisi doğrudur ? Açıklayınız.		Hangisi doğrudur ? Açıklayınız.		Hangisi doğrudur ?Açıklayınız.	
☐ $\pi \approx 3$	☐ $\pi = 3$	☐ $\pi \approx 3{,}14$	☐ $\pi = 3{,}14$	☐ $\pi \approx 3{,}14159\ldots$	☐ $\pi = 3{,}14159\ldots$

- π'ye tam olarak eşit olan sayısal bir değer yoktur. Doğru( ) Yanlış( )

7) Yandaki şemada noktalı yerlere uygun sayı kümelerini yazınız:

- Doğal Sayılar
- Rasyonel Sayılar
- Tam Sayılar
- Gerçek Sayılar
- İrrasyonel Sayılar



8) Aşağıdaki sorulara cevap veriniz. Verdiğiniz cevaplar evet de hayır da olsa açıklama yapınız.

a) İrrasyonel sayıların tamamı ondalık biçimde yazılabilir mi? Evet ( ) Hayır ( )

Cevabınız hayırsa ondalık biçimde yazılamayan bir örnek veriniz

b) Köklü sayıların tamamı irrasyonel sayı mıdır? Evet ( ) Hayır ( )

Cevabınız hayırsa irrasyonel olmayan köklü sayı örneği veriniz

c) İki irrasyonel sayının toplamı rasyonel sayı olabilir mi? Evet ( ) Hayır ( )

Cevabınız evetse toplamları rasyonel sayı olan iki irrasyonel sayı yazınız

d) İki irrasyonel sayının çarpımı rasyonel sayı olabilir mi? Evet ( ) Hayır ( )

Cevabınız evetse çarpımları rasyonel sayı olan iki irrasyonel sayı yazınız

e) İki irrasyonel sayı arasında her zaman bir rasyonel sayı var mıdır? Evet ( ) Hayır ( )

Cevabınız hayırsa aralarında rasyonel sayı olmayan iki irrasyonel sayı yazınız

f) İki irrasyonel sayı arasında her zaman bir irrasyonel sayı var mıdır? Evet ( ) Hayır ( )

Cevabınız hayırsa aralarında irrasyonel sayı olmayan iki irrasyonel sayı yazınız

9) $\sqrt{2}$ = 1,41421... şeklinde ondalık kısmı devretmeden devam eden bir sayıdır. Eşittir(=) ve yaklaşık olarak eşittir ($\approx$) sembollerine dikkat ederek soruları yanıtlayınız. Çarpı işareti (x) iki sayının çarpımını ifade etmektedir.

Hangisi doğrudur ? Açıklayınız.	Hangisi doğrudur ? Açıklayınız.
☐ 1,41421... x 1,41421... = 2	☐ 1,41421... + 1,41421... = 2,8284...
☐ 1,41421... x 1,41421... ≈2	☐ 1,41421... + 1,41421... ≈ 2,8284...
Neden?	Neden?
Hangisi doğrudur ? Açıklayınız.	Hangisi doğrudur ? Açıklayınız.
☐ $\sqrt{2}+\sqrt{2}$ = 2,8284...	☐ $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$
☐ $\sqrt{2}+\sqrt{2}$ ≈2,8284...	☐ $\sqrt{2}+\sqrt{2}\approx 2\sqrt{2}$
Neden?	Neden?

ÖĞRENCİLERLE GÖRÜŞME FORMU GİRİŞ KISMI (EK-2)

(Görüşme soruları İrrasyonel Sayı Kavram Testinin sorularıdır)

Öğrenci Adı / Soyadı :

Öğrenci Okul ve Sınıfı:

Tarih ve Saat (başlangıç-bitiş):…….

GİRİŞ

Merhaba ben Yusuf Emre ERCİRE. Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Eğitimi üzerine yüksek lisans yapıyorum aynı zamanda Manisa Kargın Ortaokulunda matematik öğretmeniyim. İrrasyonel sayılara ilişkin yaşanılan güçlükleri belirlemek amacıyla çalışma yapıyorum ve seninle bu konu üzerine görüşmek istiyorum. Bu görüşmede amacım, daha önce yapmış olduğun İrrasyonel Sayı Kavram Testindeki sorulardan bazılarına yazılı cevap verirken neler düşündüğünü, hangi nedenlerle o şekilde cevap verdiğini/veremediğini anlamaya çalışmaktır. Bu şekilde irrasyonel sayılara ilişkin güçlüklerin daha doğru bir şekilde ortaya konulacağını düşünmekteyim.

- Bu araştırmada ortaya çıkacak sonuçların, bundan sonra yapılacak olan çalışmalara da yarar sağlayacağını düşünüyorum. Bu nedenle senin kavram testindeki sorularla ve vermiş olduğun yanıtlarla ilgili düşüncelerini önemsemekteyim. Ancak çalışmamızda gönüllülük esastır. Görüş belirtmek istemediğin soruları rahat bir şekilde ifade edebilirsin.
- Görüşme sürecinde konuşulanların tümü gizlidir. Bu bilgileri araştırmacıların dışında kimsenin görmesi mümkün değildir. Ayrıca araştırmayı yürütürken kesinlikle katılımcıların isimlerini çalışmama yansıtmayacağım.
- Başlamadan önce söylediklerimle ilgili belirtmek istediğin bir düşünce ya da sormak istediğin bir soru var mı?
- Görüşmeyi izninle kaydetmek istiyorum. Bunun sence bir sakıncası var mı?
- Bu görüşmenin yaklaşık 40 (kırk) dakika süreceğini tahmin ediyorum. İzin verirsen sorulara başlamak istiyorum.

ÖĞRETMENLERLE GÖRÜŞME FORMU (EK-3)

Öğretmen Adı/Soyadı :

Öğretmenin Çalıştığı Kurum:

Tarih ve Saat (başlangıç-bitiş):

GİRİŞ

Merhaba ben Yusuf Emre ERCİRE. Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Eğitimi üzerine yüksek lisans yapıyorum aynı zamanda Manisa Kargın Ortaokulunda matematik öğretmeniyim. İrrasyonel sayılara ilişkin yaşanılan güçlükleri belirlemek amacıyla çalışma yapıyorum ve sizinle bu konu üzerine görüşmek istiyorum. Bu görüşmede amacım, öğrencilerin irrasyonel sayılara ilişkin bazı sorulara nasıl cevaplar verebileceği, ders sırasında öğrencilerin ne tür güçlükler çektikleri ve öğrencilerde irrasyonel sayı kavramı oluşturulurken nelere dikkat etmek gerektiği ile ilgili düşüncelerinizi almaktır. Bu şekilde irrasyonel sayılara ilişkin öğrenci güçlüklerinin daha doğru bir şekilde ortaya konulacağını düşünmekteyim.

- Bu araştırmada ortaya çıkacak sonuçların, bundan sonra yapılacak olan matematik eğitimi çalışmalarında da yarar sağlayacağını düşünüyorum. Bu nedenle sizin görüşlerinizi önemsemekteyim. Ancak çalışmamızda gönüllülük esastır. Görüş belirtmek istemediğiniz soruları rahat bir şekilde ifade edebilirsiniz.
- Görüşme sürecinde konuşulanların tümü gizlidir. Bu bilgileri araştırmacıların dışında kimsenin görmesi mümkün değildir. Ayrıca araştırmayı yürütürken kesinlikle katılımcıların isimlerini çalışmama yansıtmayacağım.
- Başlamadan önce söylediklerimle ilgili belirtmek istediğiniz bir düşünce ya da sormak istediğiniz bir soru var mı?
- Görüşmeyi izninizle kaydetmek istiyorum. Bunun sizce bir sakıncası var mı?
- Bu görüşmenin yaklaşık 60 (altmış) dakika süreceğini tahmin ediyorum. İzin verirseniz sorulara başlamak istiyorum.

GÖRÜŞME SORULARI

(Sorular İrrasyonel Sayı Kavram Testi ile paraleldir)

1- a) Sizce öğrencilere rasyonel sayı denildiğinde akıllarına neler gelir?
b) Sizce öğrenciler rasyonel sayıyı tanımlayabilirler mi? Nasıl tanımlarlar?
c) Öğrencilerden rasyonel sayı örneği istesek verebilirler mi? Nasıl örnekler verirler?
d) Derste rasyonel sayıyı nasıl tanımlamaktasınız?

2- a) Sizce öğrencilere irrasyonel sayı denildiğinde akıllarına neler gelir?
b) Sizce öğrenciler irrasyonel sayıyı tanımlayabilirler mi? Nasıl tanımlarlar?
c) Öğrencilerden irrasyonel sayı örneği istesek verebilirler mi? Nasıl örnekler verirler?
d) Derste rasyonel sayıyı nasıl tanımlamaktasınız?

3- a) Sizce öğrenciler gerçek sayıyı tanımlayabilirler mi? Nasıl tanımlarlar?
b) Öğrencilerden gerçek sayı örneği istesek verebilirler mi? Nasıl örnekler verirler?
c) Derste gerçek sayıyı nasıl tanımlamaktasınız?

4- Öğrencilere rasyonel sayıların tamamı gerçek sayı mıdır diye sorsak sizce nasıl cevaplar gelir? Rasyonel sayı - gerçek sayı ilişkisini kavramada güçlük yaşıyorlar mı?

5- Öğrencilere her irrasyonel sayı gerçek sayı mıdır diye sorsak sizce nasıl cevaplar gelir? İrrasyonel sayı - gerçek sayı ilişkisini kavramada güçlük yaşıyorlar mı?

6- Öğrencilere, "Hangi sayı kümesi eleman sayısı bakımından daha zengindir, rasyonel sayılar mı irrasyonel sayılar mı?" diye sorsak nasıl cevaplar gelir? Sayı kümelerinin yoğunluklarıyla ilgili öğrenciler ne tür güçlük yaşıyorlar?

7- a) Sizce öğrenciler 2 ile 5 gibi iki tam sayı arasında yer alan bir irrasyonel sayı örneği verebilirler mi? Verdikleri örnekte hangi temsil biçimini (köklü-ondalık) kullanacaklarını düşünüyorsunuz?
b) Sizce öğrenciler 10,45 ile 10,46 gibi iki ondalık sayı arasında yer alan bir irrasyonel sayı örneği verebilirler mi? Verdikleri örnekte hangi temsil biçimini (köklü-ondalık) kullanacaklarını düşünüyorsunuz?
c) Sizce öğrenciler $\sqrt{3}$ ile $\sqrt{5}$ gibi iki köklü sayı arasında yer alan bir irrasyonel sayı örneği verebilirler mi? Verdikleri örnekte hangi temsil biçimini (köklü-ondalık) kullanacaklarını düşünüyorsunuz?
d) Sizce öğrenciler $\frac{1}{5}$ ile $\frac{1}{4}$ gibi iki kesirli sayı arasında yer alan bir irrasyonel sayı örneği verebilirler mi? Verdikleri örnekte hangi temsil biçimini (köklü-ondalık) kullanacaklarını düşünüyorsunuz?
e) Sizce öğrencilere verdiğimiz iki sayı arasında (tam sayı - ondalık sayı - köklü sayı - kesirli sayı) kaç tane irrasyonel sayı olduğunu sorsak nasıl cevap verirler?

8- a) Öğrenciler bir sayının hangi sayı kümesine ait olduğunu belirlemede ne tür güçlükler yaşamaktadırlar?

b) Öğrenciler ondalık biçimde verilen bir sayının rasyonel mi irrasyonel mi olduğuna karar verirken zorluk yaşıyorlar mı? Sizce bu zorluğun nedenleri nelerdir?
c) Öğrenciler köklü biçimde verilen bir sayının rasyonel mi irrasyonel mi olduğuna karar verirken zorluk yaşıyorlar mı? Sizce bu zorluğun nedenleri nelerdir?

9- Sizce öğrencilere 0,123123123… ve 0,12345678910… şeklinde ondalık kısmı sonsuza kadar uzayan iki sayı versek ve bu sayılar irrasyonel midir diye sorsak nasıl cevaplar alırız? Sizce bu soruda öğrenciler güçlük yaşarlar mı? Neden?

10- Sizce öğrenciler π sayısının değeri konusunda ne düşünüyorlar? Ayrıca π sayısının irrasyonelliği ile ilgili öğrenci güçlükleri nelerdir?

11- Öğrencilere "İki irrasyonel sayının toplamı rasyonel sayı olabilir mi?" diye sorsak sizce nasıl cevap verirler? Toplamları rasyonel olan iki irrasyonel sayı örneği verebilirler mi?

12- Öğrencilere "İki irrasyonel sayının çarpımı rasyonel sayı olabilir mi?" diye sorsak sizce nasıl cevap verirler? Çarpımları rasyonel olan iki irrasyonel sayı örneği verebilirler mi?

13- Öğrencilere "İrrasyonel sayıların tamamı ondalık biçimde yazılabilir mi?" diye sorsak sizce nasıl cevaplar gelir? Öğrenciler köklü sayıları ondalık biçimde yazabiliyorlar mı, zorluk çekiyorlar mı?

T.C.
İZMİR VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 12018877/604.01.02/540662 06/02/2014
Konu: Yusuf Emre ERCİRE'nin
Araştırma İzni

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜNE
(Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü)
İZMİR

İlgi: a) MEB Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 07/03/2012 tarihli ve B.08.0.YET.00.20.00.0/3616 sayılı yazısı (Genelge 2012/13),
b) Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'nün 20/01/2014 tarihli ve 192 sayılı yazınız,
c) Valilik Makamı'nın 31/01/2014 tarihli ve 459854 sayılı Onayı.

Üniversiteniz Eğitim Bilimleri İlköğretim Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programı Öğrencisi Yusuf Emre ERCİRE'nin "**İrrasyonel Sayı Kavramına İlişkin Yaşanılan Güçlüklerin İncelenmesi**" konulu tez çalışması için kullanacağı ölçekleri, Müdürlüğümüz Buca İlçesi Kozağaç Ortaokulu, DEÜ Özel 75.Yıl Ortaokulu, Konak İzmir Kız Lisesi'nde öğrenim gören 8. ve 9. sınıf öğrencilerine uygulaması ilgi (c) Valilik Onayı ile uygun görülmüştür.

Araştırmacı tarafından yapılan araştırmanın tamamlanmasından itibaren en geç iki hafta içinde Araştırmanın Teslimine İlişkin Taahhütname Tutanağı doldurulup, araştırmanın CD'ye aktarılması sağlanarak Müdürlüğümüze gönderilmesi gerekmektedir.

Bilgilerinize ve gereğini arz ederim.

Dr. Yurdagül ARIKAN
Müdür a.
Şube Müdürü

EKLER:
1- Valilik Onayı (1 sayfa)
2- Araştırma Değerlendirme Formu (1 sayfa)
3- Taahhüt Formu (1 sayfa)
4- Onaylı Veri Araçları(8 sayfa)

Güvenli El...

öğr. İşl.
11.02.2014

Bu belge, 5070 sayılı Elektronik İmza Kanununun 5 inci maddesi gereğince güvenli elektronik imza i
Evrak teyidi http://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden c9b5-c89f-3c8c-abaa-433b kodu ile yapılabilir.

Hükümet Konağı C Blok Kat:8 Strateji Geliştirme Hizmetleri 1 Bölümü Konak İZMİR
Elektronik Ağ: izmir.meb.gov.tr
[illegible] strateji35_1@meb.gov.tr
Tel: [illegible] 477 21 38
Fax: [illegible] 21 477 21 07