T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ LİSANSÜSTÜ ÖĞRENCİLERİNİN TRİGONOMETRİ KONUSUNDA TEKNOLOJİK PEDAGOJİK ALAN BİLGİLERİNİN İNCELENMESİ

İzmir
2023

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ LİSANSÜSTÜ ÖĞRENCİLERİNİN TRİGONOMETRİ KONUSUNDA TEKNOLOJİK PEDAGOJİK ALAN BİLGİLERİNİN İNCELENMESİ

TUĞÇE AVCAR KARAMAN

DANIŞMAN
Doç. Dr. Melike YİĞİT KOYUNKAYA

İzmir
2023

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum "Matematik öğretmenliği lisansüstü öğrencilerinin trigonometri konusunda teknolojik pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi" adlı çalışmanın içerdiği fikri izinsiz başka bir yerden almadığımı; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında ve bölümlerinin yazımında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yaptığımı ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi, ayrıca bu çalışmanın Dokuz Eylül Üniversitesi tarafından kullanılan bilimsel intihal tespit programıyla tarandığını ve *intihal içermediğini* beyan ederim. Herhangi bir zamanda aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonuca razı olduğumu bildiririm.

28/07/2023

Tuğçe AVCAR KARAMAN

TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: 09/08/2023

Tez Başlığı:

Matematik Öğretmenliği Lisansüstü Öğrencilerinin Trigonometri Konusunda Teknolojik Pedagojik Alan Bilgilerinin İncelenmesi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 272 sayfalık kısmına ilişkin, 09/08/2023 tarihinde **tez danışmanım tarafından** Dokuz Eylül Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı'nın sağladığı İntihal Tespit Programından (**Turnitin**-Tez İntihal Analiz Programı) aşağıda belirtilen **filtreleme tiplerinden biri** (uygun olanı işaretleyiniz) uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin **benzerlik oranı % 8'dir.**

- http://www.kutuphane.deu.edu.tr/tr/turnitin-tez-intihal-analiz-programi/ adresindeki Tez İntihal Analiz Programı Kullanım Kılavuzunu okudum X

Filtreleme Tipi 1(Maksimum %15) X **Filtreleme Tipi 2(Maksimum %30)** □

□ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, X Kaynakça hariç, X Alıntılar dâhil, X Altı (6) kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.	□ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, □ Kaynakça dâhil, □ Alıntılar dâhil.
EK 1- İntihal Tespit Programı Raporu İLK SAYFA Çıktısı. X **EK 2- İntihal Tespit Programı Raporu (Tümü) Cd İçinde.** X	

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve yukarıda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmasının herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Adı Soyadı : Tuğçe AVCAR KARAMAN
Öğrenci No :
Anabilim Dalı : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
Programı : Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans
Statüsü : Yüksek Lisans X Doktora □

ÖĞRENCİ	**DANIŞMAN**
Tuğçe AVCAR KARAMAN 09/08/2023	Doç. Dr. Melike YİĞİT KOYUNKAYA 09/08/2023

Açıklamalar

1: Bu formu teslim etmeden önce sizden istenen bilgileri uygun kutucuğu (□) işaretleyerek doldurunuz.

Kullanıcı şifre vb. konusunda sorun yaşanması durumunda Üniversitemiz Merkez Kütüphanesinde bulunan Turnitin yetkilisine başvurunuz.

2: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu" formu tezin ciltlenmiş ve elektronik nüshalarının içerisinde ekler kısmında yer alır.

3: Tez savunmasında düzeltme alınması durumunda bu form güncellenerek yeniden hazırlanır.

4: Turnitin-Tez İntihal Analiz Programına yükleme yapılırken Dosya Başlığı (document title) olarak **tez başlığının tamamı**, Yazar Adı (author's first name) olarak **öğrencinin adı**, Yazar Soyadı (author's last name) olarak **öğrencinin soyadı** bilgisini yazınız.

TEŞEKKÜR

Öncelikle uzun ve meşakkatli bir yol olan yüksek lisans eğitimim ve tez yazma sürecim boyunca bana her konuda yardımcı olan desteğini esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Melike YİĞİT KOYUNKAYA'ya teşekkürlerimi sunuyorum. Tez savunma jürimde yer almayı kabul ederek benimle değerli fikirlerini paylaşan Doç. Dr. Berna TATAROĞLU TAŞDAN hocama ve Öğr. Üyesi Deniz ÖZEN ÖNAL hocama teşekkür ederim. Bu süreçte bana her türlü maddi ve manevi desteği veren canım annem Fatma AVCAR'a, her zaman yanımda olan, bana moral vererek fedakarlıklar gösteren canım eşim Emre KARAMAN'a çok teşekkür ederim. Çalışmamı hazırlama sürecimde bana yanımda olduklarını hissettiren kardeşim Tugay AVCAR'a, kayınvalidem Naciye KARAMAN ile kayınpederim Osman KARAMAN'a ve katkılarından dolayı ablam Dr. Öğr. Üyesi Elvan KARAMAN MEZ ile eşi abim Öğr. Gör. Erel MEZ'e teşekkür ederim. Ayrıca bu çalışmayı oluştururken fikir ve önerilerini benimle paylaşan canım arkadaşım Nur Elif YILDIZ'a teşekkür ederim. Son olarak eğitim ve öğretim hayatımda beni hep desteklemiş olan ancak yüksek lisans eğitimim sırasında kaybettiğim, beni cennetten duyduğuna inandığım babam Halil İbrahim AVCAR'a bugünlere gelmemi sağladığı için teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET xiv
ABSTRACT xvi
BÖLÜM I 1
GİRİŞ 1
1.1. Problem Durumu 1
1.2. Amaç ve Önem 4
1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri 5
1.4. Sınırlılıklar 6
1.5. Varsayımlar 6
1.6. Tanımlar 6
BÖLÜM II 8
KURAMSAL ÇERÇEVE / KAVRAMSAL ÇERÇEVE / İLGİLİ ARAŞTIRMALAR 8
2.1. TPAB Modeli 8
2.1.1. Alan Bilgisi (AB) 10
2.1.2. Pedagojik Bilgi (PB) 10
2.1.3. Pedagojik Alan Bilgisi (PAB) 11
2.1.4. Teknolojik Bilgi (TB) 11
2.1.5. Teknolojik Pedagojik Bilgi (TPB) 12
2.1.6. Teknolojik Alan Bilgisi (TAB) 12
2.1.7. Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi (TPAB) 13
2.2. TPAB ile İlgili Yapılan Çalışmalar 14
2.3. Trigonometri ile İlgili Yapılan Çalışmalar 19
2.3.1. Öğrencilerin Trigonometri Konusundaki Bilgilerini İnceleyen Çalışmalar 19

2.3.2. Öğretmen ve Öğretmen Adaylarının Trigonometri Konusundaki Bilgilerini İnceleyen Çalışmalar 21

2.3.3. Trigonometri Konusunu Öğrenme ve Öğretme Sürecinde Teknoloji Kullanımı 22

BÖLÜM III 26

YÖNTEM 26

3.1. Araştırmanın Modeli / Deseni 26
3.2. Evren / Örneklem / Çalışma Grubu / Katılımcılar 27
3.3. Veri Toplama Süreci ve Araçları 29
3.3.1. Soruların Hazırlanma Süreci 29

3.3.2. Uzman Görüşü 29

3.3.3. Pilot Çalışma 30

3.3.4. Veri Toplama Süreci 42

3.4. Verilerin Analizi 43
3.5. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği 49
3.6. Araştırmacının Rolü 50
BÖLÜM IV 51

BULGULAR 51

4.1. Alan Bilgisi (AB) 51
4.1.1. Katılımcıların Fonksiyon Kavramına Dair Alan Bilgileri 51

4.1.2. Katılımcıların Trigonometrik Fonksiyona Dair Alan Bilgileri 54

4.1.2.1. Açı Kavramı 56

4.1.2.2. Birim Çember ve Trigonometrik Fonksiyonlar 62

4.1.2.2.1. Trigonometrik Fonksiyonların Tanımları 62

4.1.2.2.2. Trigonometrik Fonksiyonların İşaretleri 65

4.1.2.2.3. Trigonometrik Fonksiyonların Açı Değerlerine Göre Değişimi ve Karşılaştırılması 68

4.1.2.2.4. Bir Açının Trigonometrik Değerlerinin Dar Açı Cinsinden Yazılması 72

4.1.2.2.5. Trigonometrik Özdeşlikler 79

4.1.2.2.6. Trigonometrik Fonksiyonlarda Periyot 84

4.1.2.2.7. Trigonometrik Fonksiyonlarda Grafikler 92

4.2. Pedagojik Bilgi (PB) ve Pedagojik Alan Bilgisi (PAB)..... 98

4.3. Teknoloji Bilgisi (TB)..... 108

4.4. Teknolojik Alan Bilgisi (TAB) 134

4.4.1. Trigonometrik Fonksiyonlar 134

4.4.2. Trigonometrik Fonksiyonların İşaretleri 139

4.4.3. Trigonometrik Fonksiyonların Karşılaştırılması..... 143

4.4.4. Trigonometrik Özdeşlikler 148

4.4.5. Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri ve Periyotları..... 154

4.5. Teknolojik Pedagojik Bilgi (TPB) 173

4.5.1. Zaman Tasarrufu 174

4.5.2. Anlamlı Öğrenme..... 175

4.5.3. Kalıcı Öğrenmeyi Destekleme 178

4.5.4. Daha Fazla Sayıda Örneklendirme..... 180

4.5.5. Motive Etme..... 181

4.6.Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi (TPAB)..... 182

4.6.1. Katılımcı Ö1'in TPAB'ı..... 183

4.6.2. Katılımcı Ö2'nin TPAB'ı..... 191

4.6.3. Katılımcı Ö3'ün TPAB'ı..... 199

4.6.4. Katılımcı Ö4'ün TPAB'ı..... 209

BÖLÜM V 215

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER..... 215

5.1. Tartışma..... 215

5.2. Sonuç ve Öneriler 224
KAYNAKÇA 225

Ek 1. Yarı Yapılandırılmış Klinik Görüşme Soruları 238
Ek 2. Gözlem Formu 246
Ek 3. Gönüllü Katılımcı Onam Formu 247
Ek 4. Etik İzin 249
Ek 5. Öğrencinin Akademik Özgeçmişi 250

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1 *AB Soru 1-2* 31
Tablo 2 *AB Soru 3* 31
Tablo 3 *AB Soru 4* 32
Tablo 4 *AB Soru 5* 32
Tablo 5 *AB Soru 6-11* 33
Tablo 6 *AB Soru 12* 33
Tablo 7 *AB Soru 13-15* 34
Tablo 8 *TPAB Soru 1* 34
Tablo 9 *TPAB Soru 2-3* 35
Tablo 10 *TPAB Soru 4* 36
Tablo 11 *TPAB Soru 5-6* 37
Tablo 12 *TPAB Soru 7-8* 38
Tablo 13 *TPAB Soru 9* 40
Tablo 14 *TPAB Soru 10-11* 40
Tablo 15 *Çalışmadaki oturumlar ve süreleri* 43
Tablo 16 *Katılımcıların fonksiyon kavramına ait tanımları* 51
Tablo 17 *Katılımcıların fonksiyon çeşitlerine ilişkin cevapları* 53
Tablo 18 *Katılımcıların trigonometrik fonksiyon tanımına ilişkin cevapları* 55
Tablo 19 *Katılımcıların derece kavramına ilişkin cevapları* 56
Tablo 20 *Katılımcıların radyan kavramına ilişkin cevapları* 58
Tablo 21 *Katılımcıların esas ölçü kavramına ilişkin cevapları* 60
Tablo 22 *Katılımcıların özdeşlik kavramına ilişkin cevapları* 79
Tablo 23 *Katılımcıların periyot kavramına ilişkin cevapları* 85
Tablo 24. *Katılımcı Ö1'in kullandıkları araçlar ve özellikler ile kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri araçlar ve özellikler tablosu* 108
Tablo 25 *Katılımcı Ö2'nin kullandıkları araçlar ve özellikler ile kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri araçlar ve özellikler tablosu* 115
Tablo 26 *Katılımcı Ö3'ün kullandıkları araçlar ve özellikler ile kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri araçlar ve özellikler tablosu* 121

Tablo 27 *Katılımcı Ö4'ün kullandıkları araçlar ve özellikler ile kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri araçlar ve özellikler tablosu* 127
Tablo 28 *TPB'ye yönelik başlıklar* 173

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. TPAB Modeli (Koehler ve Mishra, 2009)..... 9
Şekil 2. Veri analizi örneği-1..... 44
Şekil 3. Veri analizi metni-1..... 44
Şekil 4. Veri analizi örneği-2..... 45
Şekil 5. Veri analizi metni-2..... 46
Şekil 6. Veri analizi metni-3..... 46
Şekil 7. Veri analizi örneği-3..... 47
Şekil 8. Veri analizi metni-4..... 47
Şekil 9. Veri analizi örneği-4..... 48
Şekil 10. Veri analizi metni-5..... 49
Şekil 11. Veri analizi metni-6..... 49
Şekil 12. Katılımcıların fonksiyon tanımına ilişkin çizimleri 53
Şekil 13. Ö2'nin fonksiyon çeşitlerine ilişkin çizimi 54
Şekil 14. Katılımcıların trigonometrik fonksiyon tanımlarına ilişkin çizimleri 56
Şekil 15. Ö1'in birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonları gösterimi 62
Şekil 16. Ö1'in birim çember üzerinde tanx fonksiyonunu çizimi ve ispatı 63
Şekil 17. Ö2'nin birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonları tanımladığı çizimi ve tanx, cotx fonksiyonlarının ispatı 63
Şekil 18. Ö4'ün birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonları gösterimi 64
Şekil 19. Ö1'in birim çember üzerinde secx fonksiyonu çizimi ve ispatı 64
Şekil 20. Ö1'in birim çember üzerinde cscx fonksiyonu çizimi ve ispatı 64
Şekil 21. Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların işaretleri ile ilgili çizimleri ... 66
Şekil 22. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların işaretleri ile ilgili çizimi 67
Şekil 23. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların işaretleri ile ilgili çizimi 67
Şekil 24. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların işaretleri ile ilgili çizimi-2 68
Şekil 25. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların değişimini incelediği çizimleri 69
Şekil 26. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların değişimini incelediği çizimi 69
Şekil 27. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması ile ilgili çizimi 71
Şekil 28. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması ile ilgili genellemesi 71
Şekil 29. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması ile ilgili çizimi-2..... 72

Şekil 30. Ö1'in birim çember üzerinde 1. bölgede aldığı noktanın koordinatlarını trigonometrik fonksiyonlar cinsinden gösterdiği çizimi 73
Şekil 31. Ö1'in birim çember üzerinde cos(180- α)=-cosα ve sin(180-α)=sinα ispatı74
Şekil 32. Ö1'in 3. bölgede birim çember üzerinde aldığı noktanın koordinatlarını trigonometrik fonksiyonlar cinsinden gösterdiği çizimi 74
Şekil 33. Ö2'nin birim çember üzerinde aldığı noktanın koordinatlarını trigonometrik fonksiyonlar cinsinden gösterdiği çizimi 75
Şekil 34. Ö2'nin 200º'nin çemberi kestiği noktanın koordinatlarını trigonometrik fonksiyonlar cinsinden gösteren çizimi..... 76
Şekil 35. Ö1'in bir açının trigonometrik değerini dar açı cinsinden karşılığını bulurken uyguladığı yöntemi 77
Şekil 36. Ö3'ün bir açının trigonometrik değerini dar açı cinsinden karşılığını bulurken uyguladığı yöntemi 78
Şekil 37. Ö1'in birim çember üzerinde $sin^2x + cos^2x = 1$ özdeşliğini gösterdiği çizimi..... 81
Şekil 38. Ö1'in dik üçgeni kullanarak $sin^2x + cos^2x = 1$ özdeşliğini gösterdiği çizimi..... 81
Şekil 39. Ö1'in birim çember üzerinde $tanx.cotx = 1$ özdeşliğini gösterdiği çizimi 82
Şekil 40. Ö1'in dik üçgeni kullanarak $tanx.cotx = 1$ özdeşliğini gösterdiği çizimi 82
Şekil 41. Katılımcıların trigonometrik özdeşlikler ispatları 83
Şekil 42. Katılımcıların bildikleri yarım açı ile toplam fark formülleri 83
Şekil 43. Ö3'ün cos2α'nın eşitini gösterdiği örneği..... 84
Şekil 44. Ö4'ün bildiği trigonometrik özdeşlikler ve formüller..... 84
Şekil 45. Ö1'in periyodik fonksiyon örneği 87
Şekil 46. Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların periyotları ile ilgili çizimleri. 87
Şekil 47. Ö1'in periyot formülü ile ilgili çalışma kağıdına yazdığı 88
Şekil 48. Ö1'in periyot formülünü açıkladığı örneği 89
Şekil 49. Ö1'in periyot formülünü açıkladığı örneği-2 90
Şekil 50. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonlarda periyot konusunda çalışma kağıdına yazdıkları..... 91
Şekil 51. Ö3'ün periyot formülünü açıkladığı örneği..... 91

Şekil 52. Ö1'in trigonomerik fonksiyonların grafiklerinin çizimi ile ilgili örneği..... 93
Şekil 53. Ö2'nin trigonomerik fonksiyonların grafiklerinin çizimi ile ilgili örneği... 94
Şekil 54. Ö3'ün trigonomerik fonksiyonların grafiklerinin çizimi ile ilgili örneği.... 95
Şekil 55. Ö4'ün trigonomerik fonksiyonların grafiklerinin çizimi ile ilgili örneği.... 95
Şekil 56. Ö1'in fonksiyonlarda dönüşüm örneği..... 99
Şekil 57. Ö1'in fonksiyonlarda dönüşüm örneği-2 99
Şekil 58. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin çizimi örneği 100
Şekil 59. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin çizimi örneği-2..... 101
Şekil 60. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması ile ilgili cevap kağıdına yazdıkları..... 103
Şekil 61. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların periyotları ile ilgili cevap kağıdına yazdıkları..... 104
Şekil 62. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri konusunun öğretimi ile ilgili örneği..... 105
Şekil 63. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri konusunun öğretimi ile ilgili örneği..... 107
Şekil 64. Ö1'in GeoGebra yazılımı üzerinde dik üçgen çizimi..... 110
Şekil 65. Ö1'in trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü 111
Şekil 66. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların işaretleri etkinliği ekran görüntüsü .. 112
Şekil 67. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların periyotları etkinliği ekran görüntüsü 113
Şekil 68. Ö2'nin GeoGebra yazılımı üzerinde dik üçgen çizimi..... 117
Şekil 69. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü 118
Şekil 70. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü..... 119
Şekil 71. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü-2 119
Şekil 72. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü 120
Şekil 73. Ö3'ün GeoGebra üzerinde dik üçgen çizimi..... 123
Şekil 74. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü 124
Şekil 75. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü..... 125
Şekil 76. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü 125

Şekil 77. Ö4'ün GeoGebra yazılımı üzerinde dik üçgen çizimi ekran görüntüsü 129
Şekil 78. Ö4'ün GeoGebra yazılımı üzerinde dik üçgen çizimi ekran görüntüsü-2. 129
Şekil 79. Ö4'ün GeoGebra yazılımı üzerinde dik üçgen çizimi ekran görüntüsü-3. 130
Şekil 80. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü 131
Şekil 81. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-2 132
Şekil 82. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların periyotları etkinliği ekran görüntüsü 133
Şekil 83. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların periyotları etkinliği ekran görüntüsü-2 133
Şekil 84. Ö1'in trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-2 136
Şekil 85. Ö1'in trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-3 136
Şekil 86. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-2 137
Şekil 87. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-2 138
Şekil 88. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-3 139
Şekil 89. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların işaretleri etkinliği ekran görüntüsü-2141
Şekil 90. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların işaretleri etkinliği ekran görüntüsü 142
Şekil 91. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-3 143
Şekil 92. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü 145
Şekil 93. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü-3 146
Şekil 94. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü-2 147
Şekil 95. Ö1'in trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü 149
Şekil 96. Ö1'in trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü-2 150
Şekil 97. Ö2'nin trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü 151
Şekil 98. Ö3'ün trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü 152
Şekil 99. Ö4'ün trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü 153
Şekil 100. Ö1'in sinx fonksiyonu ile ilgili çizimi 155
Şekil 101. Ö1'in cotx fonksiyonu ile ilgili çizimi 156
Şekil 102. Ö2'nin sinx fonksiyonu ile ilgili çizimi 157
Şekil 103. Ö2'nin cotx fonksiyonu ile ilgili çizimi 158

Şekil 104. Ö3'ün sinx fonksiyonu ile ilgili çizimi 159
Şekil 105. Ö3'ün cosx fonksiyonu ile ilgili çizimi 159
Şekil 106. Ö3'ün tanx fonksiyonu ile ilgili çizimi 160
Şekil 107. Ö4'ün cotx fonksiyonu ile ilgili çizimi 161
Şekil 108. Ö4'ün sinx fonksiyonu ile ilgili çizimi 162
Şekil 109. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-2 163
Şekil 110. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-2 165
Şekil 111. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-3 166
Şekil 112. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü 167
Şekil 113. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların periyotları etkinliği ekran görüntüsü-2 168
Şekil 114. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların periyotları etkinliği ekran görüntüsü-3 169
Şekil 115. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-3 172
Şekil 116. Ö1'in trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-4 184
Şekil 117. Ö1'in trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-5 185
Şekil 118. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların işaretleri etkinliği ekran görüntüsü-3 186
Şekil 119. Ö1'in trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü-3 188
Şekil 120. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü 189
Şekil 121. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların periyotları etkinliği ekran görüntüsü-3 191
Şekil 122. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-3 192
Şekil 123. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların işaretleri etkinliği ekran görüntüsü-2 192
Şekil 124. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-4 193

Şekil 125. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü-4 194
Şekil 126. Ö2'nin trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü-2..... 196
Şekil 127. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-4 197
Şekil 128. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-5 198
Şekil 129. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-4..... 200
Şekil 130. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-5..... 201
Şekil 131. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-6..... 202
Şekil 132. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-7..... 203
Şekil 133. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü-3 204
Şekil 134. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü-4 205
Şekil 135. Ö3'ün trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü-2..... 206
Şekil 136. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-4 207
Şekil 137. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-5 208
Şekil 138. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-4..... 210
Şekil 139. Ö4'ün trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü-2..... 212
Şekil 140. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-2 213
Şekil 141. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların periyotları etkinliği ekran görüntüsü-4 214

ÖZET

MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ LİSANSÜSTÜ ÖĞRENCİLERİNİN TRİGONOMETRİ KONUSUNDA TEKNOLOJİK PEDAGOJİK ALAN BİLGİLERİNİN İNCELENMESİ

Bu çalışmanın temel amacı matematik öğretmenliği lisansüstü öğrencilerinin trigonometri konusunda Teknolojik Pedagojik Alan Bilgilerinin (TPAB) incelenmesidir. TPAB, öğretilecek olan konunun sunulması aşamasında, alan ve pedagojik bilgi ile teknoloji bilgisinin etkili bir şekilde birleştirilmesini içermektedir. Bu bağlamda trigonometri konusu kapsamında lisansüstü öğrencilerinin TPAB'ın alt bileşenleri olan alan, pedagoji, teknoloji, pedagojik alan, teknolojik alan, teknolojik pedagojik ve teknolojik pedagojik alan bilgileri incelenmiştir. Çalışmada, lisansüstü öğrencilerinin TPAB'larını incelemek amacıyla Mishra ve Koehler (2006) tarafından geliştirilen TPAB modeli çalışmanın kavramsal altyapısı olarak ele alınmıştır. Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması ile desenlenmiştir. Çalışmanın katılımcıları 2020-2021 bahar döneminde bir devlet üniversitesi bünyesindeki Eğitim Bilimleri Enstitüsü'nde öğrenim görmekte olan Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programına kayıtlı 4 öğrenciden oluşmaktadır. Çalışmanın katılımcı grubu seçilirken, derinlemesine araştırılması gereken durumlara dair detaylı bilgi verdiğinden dolayı amaçlı örneklem yöntemi kullanılmıştır. Lisansüstü öğrencilerin TPAB'larını incelemek amacıyla trigonometri konusu kapsamında sorular geliştirilmiş ve bu sorular kılavuzluğunda yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler yapılmıştır. Tüm süreç boyunca yapılan klinik görüşmelerin kayıtları, araştırmacı tarafından tutulan gözlem notları ve lisansüstü öğrencilere ait cevap kağıtları çalışmanın veri grubunu oluşturmaktadır. Araştırma süresince kaydedilen videolar transkript edilmiş ve transkript edilen metinler ile öğrencilerin cevap kağıtları içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. Bu çalışmada matematik öğretmenliği lisansüstü öğrencilerinin, trigonometri konusunda alan, pedagoji ve teknoloji bilgilerinin birbirinden farklı düzeyde olduğu dolayısıyla bu bilgi türlerinin ikişerli ve üçerli birleşimleri olan PAB (Pedagojik Alan Bilgisi), TAB (Teknolojik Alan Bilgisi), TPB (Teknolojik Pedagojik Bilgi) ve TPAB'larında da farklılıklar olduğu görülmüştür. Ayrıca bu çalışma ile lisansüstü öğrencilerinin alan, pedagoji ve teknoloji bilgilerinin ayrı ayrı kapsamlı olması durumunda bu bilgilerin ikişerli üçerli birleşimleri sonucu oluşan PAB, TAB, TPB ve TPAB'ının da kapsamlı olduğu; alan, pedagoji ve teknoloji bilgilerinden bir ya da birkaçında eksiklikler olmasında durumunda ise bu bilgilerin birleşiminden doğan bilgilerinde de eksiklikler olduğu sonucuna

ulaşılmıştır. Aynı zamanda bu çalışma ile lisansüstü öğrencilerin tekli bilgi türlerinin (alan, pedagoji ve teknoloji bilgisi), teknolojiyi entegre edebilme becerilerinin, öğretmenlik tecrübelerinin, trigonometri konusuna olan ilgisinin öğrencilerin trigonometri konusundaki TPAB'larını etkilediği sonucuna ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Trigonometri, Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi, TPAB, Matematik eğitiminde teknoloji kullanımı

ABSTRACT

AN EXAMINATION OF MATHEMATICS TEACHING GRADUATE STUDENTS' TECHNOLOGICAL PEDAGOGICAL CONTENT KNOWLEDGE IN THE CONCEPT OF TRIGONOMETRY

The main goal of this study is to examine the mathematics teaching postgraduate students' Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) specifically in the topic of trigonometry. TPACK includes the effective integration of content knowledge, pedagogical knowledge, and technological knowledge during theteaching of the subject. In this context, the sub-components of TPACK, namely content knowledge, pedagogical knowledge, technological knowledge, pedagogical content knowledge, technological content knowledge, technological pedagogical knowledge, and technological pedagogical content knowledge, were investigated in the context of trigonometry for postgraduate students. Mishra and Koehler's (2006) TPACK model, developed to examine the TPACK of teachers, was used as the conceptual framework for this study. The study was designed as a case study, which is one of the qualitative research methods. The participants of the study consisted of 4 students enrolled in the mathematics teaching graduate program at a state university's Institute of Educational Sciences during the spring semester of 2020-2021. Purposive sampling method was used to select the participant group due to their ability to provide detailed information about cases that need to be investigated in-depth. So as to examine the participants' TPACK in trigonometry, questions were developed and semi-structured clinical interviews were conducted based on the developed questions. All over the process, the records of the clinical interviews, observation notes kept by the researcher, and answer sheets of the postgraduate students constituted the data of the study. The video records were transcribed, and the transcribed texts and the answer sheets of the students were analysed using the content analysis method. In this study, it was observed that postgraduate students in mathematics teaching have different levels of content, pedagogical, and technological knowledge in trigonometry. Consequently, differences were also observed in the combinations of these knowledge types, namely Pedagogical Content Knowledge (PCK), Technological Content Knowledge (TCK), Technological Pedagogical Knowledge (TPK), and Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK). Additionally, it was concluded that when the content, pedagogical, and technological knowledge of postgraduate students are comprehensive individually, the

resulting PCK, TCK, TPK, and TPACK are also comprehensive. However, if there were deficiencies in one or more of the contents, pedagogical, and technological knowledge, there were also deficiencies in the information arising from the combination these components. At the same time, with this study, it was concluded that postgraduate students' single knowledge types (content, pedagogy and technology knowledge), their ability to integrate technology, their teaching experience, and their interest in trigonometry affected students' TPACK on trigonometry.

Keywords: Trigonometry, Technological Pedagogical Content Knowledge, TPACK, The use of technology in mathematics education

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

Son yıllarda özellikle teknoloji alanındaki yaşanan gelişmeler hayatın her alanını olduğu gibi eğitim ve öğretimi de etkilemektedir. Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] 2018 yılında yayınladığı Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nda "Teknolojinin getirdiği yenilikler ile birlikte matematik öğrenme ve öğretme süreçlerimiz de yeniden şekillenmektedir" (s. 4) vurgusunu yapmaktadır. Diğer bir deyişle, teknolojinin gelişmesiyle beraber öğrenme ve öğretme sürecinde teknoloji ile farklı yöntem ve teknikler kullanılarak yeni öğrenme ortamları oluşturulmaya başlanmıştır (Usta & Korkmaz, 2010). Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi-National Council of Teacher of Mathematics [NCTM] (2000), teknolojinin öğrenme ve öğretme sürecinde kullanılmasının, öğrencilerin öğrenmesine katkı sağlayarak matematik öğrenimini olumlu etkilediğine değinmektedir. Ayrıca MEB (2018) matematik derslerinde farklı teknolojilerden yararlanılarak öğretimin gerçekleştirilmesinin öğrencilerin farklı matematiksel becerileri kazanmasına yardımcı olduğunu belirtmektedir. Teknolojinin öğrenme ortamında kullanılması öğrencileri motive ederek matematiğe karşı olumlu tutum geliştirmelerinin yanı sıra analitik düşünme becerilerinin de gelişmesini sağlamaktadır (Peker, 1985). Dolayısıyla eğitim öğretim sürecinde çeşitli teknolojilere uygun şekilde yer verilip öğrenme ortamlarının zenginleştirilmesi gerekmektedir (Kaya & Yılayaz, 2013). MEB (2018) Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'ndaki birçok kazanımda da bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılmasına ve dinamik matematik/geometri yazılımlarının kullanılmasına vurgu yapılmaktadır. Teknolojinin öğretim programındaki yeri ve önemi nedeni ile de programın uygulayıcısı olan öğretmenlere büyük rol düşmektedir.

Teknolojinin eğitim alanındaki katkıları ve öğretim programındaki yeri göz önüne alındığında, bunu sağlayacak olan öğretmenlerin teknolojiyi yakından takip etmesi ve teknolojiyi etkili şekilde öğretim sürecine dahil etmesi gerekmektedir (Yiğit-Koyunkaya, 2017). Bu bağlamda öğretmenlerin teknoloji yeterliliği önemli bir konu haline gelmekte ve araştırmacılar öğretmenlerin teknoloji konusunda sahip olması gereken bilgi ve becerilerle ilgili çalışmalar yapmaktadırlar (Varank, 2009). "Öğretmenlerin neleri bilmesi ve neleri yapabilmesi gerektiği uluslararası araştırmaların da odağı olmuş ve öğretmenlerin sahip olması gereken yeterlikler literatürde Pedagojik Alan Bilgisi (PAB) adı altında ele alınmıştır" (Timur & Taşar, 2011, s.2). Teknolojinin eğitim öğretimdeki öneminin artması, PAB kavramı

ve teknoloji kavramlarının bir araya gelmesi ile yeni bir kavram olarak "Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi" (Technological Pedagogical Content Knowledge (TPAB)) kavramını ortaya çıkarmıştır (Kaya vd., 2010; Niess, 2005). TPAB, PAB kavramına ek olarak öğretmenin alanı ile ilgili bir konuyu öğretirken PAB ve teknolojiyi pedagojik stratejilerle etkili şekilde birleştirebilme bilgisidir (Graham vd., 2009).

Mishra ve Koehler (2006) TPAB'ı; teknoloji, pedagoji ve alan bilgisinin kesişim ve birleşiminden ziyade daha kapsamlı ve gelişmekte olan bir bilgi türü olarak tanımlamıştır. Daha geniş tanımı ile TPAB;

> Teknolojiyle iyi bir öğretimin temelidir ve teknolojilerin kullanıldığı kavramların temsilinin; teknolojileri öğretmek için yapıcı yöntemlerle kullanan pedagojik tekniklerin; kavramların öğrenilmesini zorlaştıran veya kolaylaştıran şeylerin ve teknolojinin öğrencilerin karşılaştığı bazı sorunların giderilmesine nasıl yardımcı olabileceği bilgisinin; öğrencilerin ön bilgileri ve epistemoloji teorilerinin; ve mevcut bilgi üzerine inşa etmek ve yeni epistemolojiler geliştirmek ya da eskileri güçlendirmek için teknolojilerin nasıl kullanılabileceği bilgisinin anlaşılmasını gerektirmektedir (Mishra & Koehler, 2006, s.12).

TPAB, öğretmenin alanı ile ilgili bilgisini pedagoji bilgisi ile birleştirerek ve teknolojiyi etkili şekilde kullanarak nasıl öğreteceği hakkındaki bilgidir. Farklı bir ifadeyle ise TPAB, öğretmenlerin bilgi ve iletişim teknolojilerini bilerek uygun şekilde öğrenme ortamına entegre edebilme bilgisidir (Kaya vd., 2010). Öğrenme ortamına teknoloji entegrasyonunu gerçekleştirilirken öğretmenlerden teknolojiyi öğretimleriyle etkili bir şekilde bütünleştirmeleri beklenmektedir (Chen, 2010; Hicks, 2006). Öğretmenlerin teknolojiyi derslerinde etkin bir şekilde kullanabilmeleri içinse teknolojik imkanların farkında olarak aktarılacak konu ve öğrencinin ihtiyacına uygun araç ve yöntemleri seçebilmeleri gerekmektedir (Demiraslan & Koçak-Usluel, 2008). "Gelişmiş TPAB'a sahip bir öğretmen öğreteceği bilgiyi, bu bilgileri farklı temsillerle ilişkilendirmeyi, öğretiminde pedagojik teknik ve bilgileri nasıl kullanacağını, konunun içeriğine uygun şekilde teknoloji entegrasyonunu nasıl yapacağını ve öğretiminin öğrenciler üzerindeki etkilerini bilir" (Yiğit-Koyunkaya & Tataroğlu-Taşdan, 2019, s. 3). Diğer bir deyişle TPAB'ı gelişmiş olan öğretmenler, çeşitli teknolojik araçları etkili şekilde kullanarak bir öğretim gerçekleştirebilir ve öğrencilerinin anlama ve kavrama düzeyinin farkında olarak sınıf ortamına yön verebilerler (Akkaya, 2009). Bu bağlamda öğrencinin bilişsel seviyesinin farkında olan öğretmenler gelişmiş TPAB'ları sayesinde bilgiyi daha iyi bir şekilde öğrenciye aktarabilirler (Uşak, 2005).

Günümüz toplumunda yaşanan teknolojik gelişmeler öğretmen yeterliliklerinin ne düzeyde olduğunun belirlenmesini gerekli kılmıştır (Kurt vd. 2013). Yapılan çalışmalar öğretmenlerin, teknolojiyi öğretimlerine entegre etme konusunda problem yaşadığını dolayısıyla teknolojiyi derslerinde etkili bir şekilde kullanmadığı göstermektedir (Bozkurt & Cilavdaroğlu, 2011; Brush vd., 2003; İşman, 2002; Nyikahadzoyi, 2015; Ottenbreit-Leftwich & Ertmer, 2010). Ayrıca araştırmalar, öğretmenlerin teknolojiye derslerinde çok sık yer vermediğini de göstermektedir (Kafyulilo vd., 2015; Ruthven, 2009).

Bahsedildiği gibi teknoloji çağı olan günümüzde öğretmenlerin matematik konularını teknoloji destekli öğretmelerinin önemli olduğu düşünülmektedir. Bu anlamda trigonometri konusununda da teknoloji ile öğretilmesinin önem arz ettiği düşünülmektedir. Trigonometri cebirsel ve geometrik akıl yürütmeyi bir arada barındırması sebebiyle de matematikte önemli bir yere sahiptir (Weber vd., 2008). Bununla birlikte Taş (2013), trigonometrinin müfredattaki ağırlığı ve birçok matematik konusunun temeli olması nedeniyle programda kapsamlı bir yeri olduğunu belirtmiştir. Alan yazında trigonometri hakkında yapılan çalışmalar incelendiğinde, trigonometrinin kavram ve teorilerinin öğreniminin, öğrencilerin bilişsel birçok becerisi (Akkoç & Akbaş-Gül, 2010) ile yaratıcı, mantıklı ve analitik düşünebilme yeteneklerinin gelişmesini olumlu yönde etkileyerek ileri düzeydeki matematiksel kavramların anlaşılmasını sağladığını ve matematik dilinin oluşması anlamında önemli bir yeri olduğu tespit edilmiştir (Güntekin & Akgün, 2011). Buna ek olarak trigonometri konularını öğrenen öğrenciler, bilgilerini sentezleyerek hayata uygulayabilme ve yorum yapabilme yeteneğini kazanmaktadırlar (Kaleli-Yılmaz vd., 2010).

Matematiğin önemli konularından biri olan trigonometri; matematik öğretmenlerinin öğretiminde, öğrencilerin ise anlamakta en çok zorlandığı konular arasında gelmektedir (Kaleli-Yılmaz vd., 2010). Benzer olarak Durmuş (2004), öğrencilerin matematikte öğrenme güçlüğü çektiği konularla ilgili çalışmasında trigonometri konusunun öğrencilere göre %57 oranında zorluk indeksine sahip olduğunu tespit etmiştir. Bununla ilgili olarak Weber (2005), öğrencilerin trigonometrik fonksiyonları zihinlerinde kavramsal olarak anlamlandıramadıklarını dolayısı ile trigonometrik fonksiyonları bir fonksiyon olarak ifade etmede sorun yaşadıklarını belirtmiştir. Ayrıca yapılan çalışmalar, öğrencilerin açı ölçü birimlerinin birbirlerine dönüştürülmesinde, birim çemberin kullanılmasında, trigonometrik fonksiyon değerleri arasında ilişki kurma ve yorum yapılması konusunda, trigonometrik ifadeler içeren denklemlerin çözümünde, trigonometrik özdeşliklerin kullanılmasında zorluk yaşadıklarını ortaya koymaktadır (Demetgül, 2001; Doğan, 2001; Güntekin & Akgün, 2011; Kültür vd., 2008). Delice ve Aydın (2015) ise trigonometri ile ilgili yapılan çalışmalar

sonucunda trigonometride yapılan hata ve oluşan kavram yanılgılarının benzer şekilde devam ettiğini ifade etmiş ve bu durumun sorgulanması gerektiğine değinmiştir. Yapılan çalışmalarda daha çok öğrencilerin öğrenme sürecine odaklanıldığı görülmüştür. Buradan hareketle, öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının trigonometri konusu özelinde TPAB'larının incelenmesinin önemli olduğu düşünülmektedir.

1.2. Amaç ve Önem

TPAB, Mishra ve Koehler (2006) tarafından 2006 yılında alan yazına kazandırılmasıyla hem ülkemizde hem de dünyada çok fazla kullanılan bir kuramsal çerçeve haline gelmiştir (Baran & Canbazoğlu-Bilici, 2015). Ancak alan yazında matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının TPAB'ları ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, öğretmen ve öğretmen adaylarının eğitim ve öğretim süreçleri boyunca alan, pedagoji ve teknolojiye yönelik dersler almış ve uygulama olanakları bulmuş olmalarına rağmen alan, pedagoji ve teknolojiye yönelik bilgilerini nasıl ve ne zaman kullanacakları konusunda sorun yaşadıkları görülmüştür (Akyüz, 2016; Erduran & Tataroğlu-Taşdan, 2017; Garofalo vd., 2000; Özgen vd., 2013; Yiğit-Koyunkaya & Tataroğlu-Taşdan, 2019). Bu konuda yapılan araştırmalar öğretmenlerin teknolojiyi öğretimlerine entegre etme konusunda problem yaşadığını dolayısıyla teknolojiyi derslerinde etkili bir şekilde kullanmadığını da göstermektedir (Bozkurt & Cilavdaroğlu, 2011; Brush vd., 2003; İşman, 2002; Nyikahadzoyi, 2015). Ayrıca yapılan çalışmalar, öğretmenlerin teknolojiyi derslerinde nadiren kullandığını göstermektedir (Kafyulilo vd., 2015; Ruthven, 2009). Buna ek olarak Kaleli-Yılmaz (2015), yapılan çalışmaların çok az bir bölümünde türev, ısı ve sıcaklık gibi belirli konular özelinde öğretmen ve öğretmen adaylarının TPAB'larının araştırıldığını ortaya koymuştur. Kaleli-Yılmaz (2015) TPAB'ı incelemeyi amaçladıkları çalışmalarda TPAB'ın tanımı gereği öncelikle belirli bir konu alanına odaklanılarak katılımcıların alan, pedagoji, teknoloji bilgilerinin incelenmesi ve uygun yaklaşımlarla TPAB'larının arttırılmaya çalışılması gerektiğini belirtmiştir. Kaleli-Yılmaz'ın (2015) TPAB konulu araştırmalarda belirli bir konu alanına odaklanması önerisidoğrultusundave alan yazında daha önce çalışılmamış olmasından dolayı bu araştırmanın konu alanı olarak matematikte önemli bir konu olan trigonometri seçilmiştir.

Alan yazında trigonometri ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde ise öğrencilerin trigonometri konularının öğreniminde güçlükler yaşadığı ve birçok farklı kavram yanılgılarının olduğu görülmüştür (Brown, 2005; Demetgül, 2001; Doğan, 2001; Gooya & Rabanifard, 2008; Güntekin & Akgün, 2011; Gür, 2009; Kendal & Stacey, 1998; Kültür vd., 2008; Marchi, 2012; Martin-Fernandez vd., 2019; Moore, 2009, 2010, 2013, 2014; Özgen vd., 2017; Steckroth, 2007; Thompson, 2007; Thompson vd., 2007; Weber, 2005). Bu nedenle

Kaleli-Yılmaz (2015), trigonometri konusunda çok sayıda çalışma yapılması gerektiğini belirterek, öğrencilerin hangi konularda güçlük çektiklerinin, sahip oldukları kavram yanılgılarının belirlenmesi gerektiğini ve bu kavram yanılgılarının nasıl giderilebileceğinin araştırılmasını önermektedir. Bununla birlikte Wescoatt (2013) da trigonometri konusuna gerekli önemin verilmeyip bu konuda yeterli sayıda çalışma olmadığını belirtmiştir.

Weber (2005) öğrencilerin trigonometride yaşadıkları zorlukların trigonometri öğretiminde kullanılan öğretim yöntemleriyle ilgili olduğunu belirtmiştir. Buna benzer şekilde Delice ve Aydın da (2015); öğretmenlerin sınıf içerisinde anlattıklarının, tahtaya yazdırdıklarının ve öğrencilere aldırdıkları notların, öğrencilerin kavram yanılgılarının nedenleri arasında olduğunu söylemiştir. Demetgül (2001) ise öğrencilerin trigonometri konusundaki kavram yanılgılarının temelinde, geleneksel öğretmen merkezli yaklaşımın dayattığı ezbere yönelik uygulamalarla zenginleştirilmiş öğrenme ortamlarının kullanılmaması nedeniyle trigonometrinin görselleştirilerek öğretilmemesi olduğunu savunmuştur.

Buradan hareketle, matematiğin önemli konularından biri olan trigonometrinin öğretimini gerçekleştirecek olan öğretmenlerin etkili bir öğretim gerçekleştirebilmeleri için trigonometri konusuna dair TPAB'larının incelenmesinin gerekli olduğu düşünülmektedir. Bu çalışmanın temel amacı da matematik öğretmenliği lisansüstü öğrencilerinin trigonometri konusunda var olan TPAB'larını araştırmaktır. Bu araştırma sayesinde geleceğin öğretmenleri olan matematik öğretmenliği lisansüstü öğrencilerinin trigonometri özelinde TPAB'larıincelenerek, öğretmen adaylarının bilgi türlerine göre etkili öğretmen eğitimi için alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Araştırmanın öğretmen eğitim programlarının ders içeriklerinin tasarlanmasında, mikro öğretim uygulamalarında, gerçek sınıflarda öğretmen eğitiminde kullanılabilecek uygulamalarda fikir verici olacağı düşünülmektedir.

1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri

1-Matematik öğretmenliği lisansüstü öğrencilerinin trigonometri konusundaki teknolojik pedagojik alan bilgileri nasıldır?

2-Matematik öğretmenliği lisansüstü öğrencilerinin trigonometri konusundaki alan, pedagoji ve teknoloji bilgileri, teknolojik pedagojik ve alan bilgisi çerçevesinde yer alan her bir bilgi türünü nasıl etkilemektedir?

1.4. Sınırlılıklar

1- Araştırmaya ilişkin veriler 2020-2021 bahar döneminde bir devlet üniversitesi bünyesindeki Eğitim Bilimleri Enstitüsü'nde Matematik öğretmenliği yüksek lisans programına kayıtlı 4 öğrenci ile sınırlıdır.

2- Araştırma, lisansüstü öğrencilerinin trigonometri konusunda TPAB'larını ölçmek amacıyla trigonometrik fonksiyonların temeli olan fonksiyon ve özellikleri, açı çeşitleri, birim çember ve trigonometrik fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonların işaretleri, sıralanması, trigonometrik özdeşlikler, trigonometrik fonksiyonların periyot ve grafikleri konularında hazırlanan sorular ile sınırlıdır.

3- Araştırma, araştırmacının sorgulama sürecini yönetme ve öğretme tecrübeleri ile sınırlıdır.

1.5. Varsayımlar

1- Katılımcıların araştırmaya samimiyetle ve içtenlikle katılıp, soruları kendilerini yansıtacak biçimde cevapladıkları varsayılmıştır.

2- Lisansüstü öğrencilerinin trigonometri konusunda TPAB'larını ölçmek amacıyla hazırlanan soruların bu amaca ulaşmayı gerçekleştirebilecek düzeyde olduğu varsayılmıştır.

1.6. Tanımlar

Alan Bilgisi (AB): Öğretmenin trigonometri konularına ait matematiksel ifadeleri tanımlayabilme, açıklayabilme, örnek verebilme, ilişki kurabilme, ispat yapabilme bilgisidir.

Pedagojik Bilgi (PB): Öğretmenin öğretme-öğrenme yöntem ve tekniklerine dair bilgisidir.

Pedagojik Alan Bilgisi (PAB): Öğretmenin trigonometri öğretimini gerçekleştirmek için öğretme-öğrenme yöntem ve tekniklerine dair bilgisidir.

Teknolojik Bilgi (TB): Öğremenlerin teknolojik araçları kullanabilme durum, düzey ve becerilerine ait bilgisidir.

Teknolojik Alan Bilgisi (TAB): Öğretmenin alan bilgisi ile teknoloji bilgisinin kesişiminden oluşmaktadır. Öğretmenin teknolojiyi kullanarak trigonometri konularını en etkili şekilde öğrenciye nasıl aktarabileceği ile ilgili bilgisidir.

Teknolojik Pedagojik Bilgi (TPB): Öğretmenin teknoloji bilgisi ile pedagoji bilgisinin kesişiminden oluşmaktadır. Öğretmenin teknolojinin trigonometri öğretme ve öğrenme sürecini nasıl etkili hale getireceği ile ilgili bilgisidir.

Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi (TPAB): Öğretmenin alan, teknoloji ve pedagoji bilgisinin kesişiminden oluşmaktadır. Öğretmenin teknolojiyi kullanarak trigonometri konusunu öğretme ve öğrenme sürecine dahil etme durumlarına ait bilgisidir.

1.7. Kısaltmalar

AB: Alan Bilgisi

DGY: Dinamik Geometri Yazılımları

GHM: Grafik Hesap Makinesi

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics

PB: Pedagojik Bilgi

PAB: Pedagojik Alan Bilgisi

TB: Teknolojik Bilgi

TAB: Teknolojik Alan Bilgisi

TPB: Teknolojik Pedagojik Bilgi

TPAB: Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi

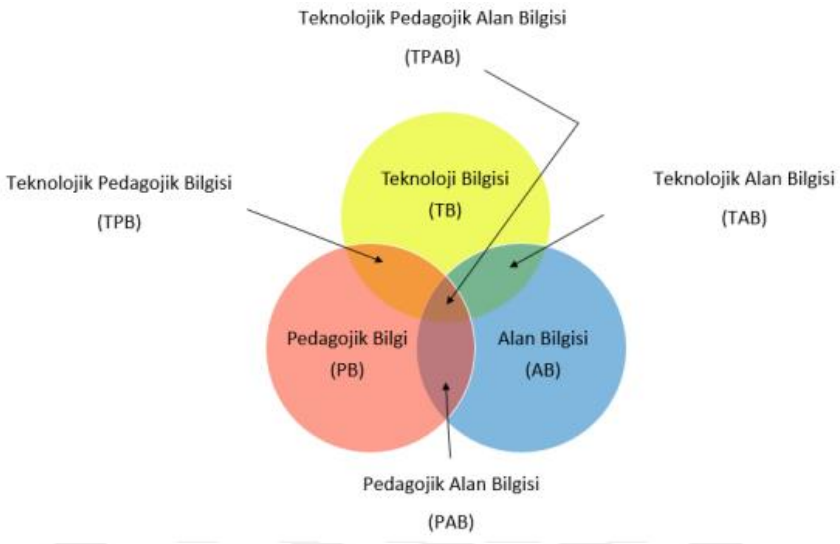
BÖLÜM II

KURAMSAL ÇERÇEVE / KAVRAMSAL ÇERÇEVE / İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

2.1. TPAB Modeli

Geçmişten günümüze öğretmenin sahip olması gereken bilgi türleri konusu, araştırmalarda üzerine düşülen önemli bir konu olmuştur (Karataş, 2015). Shulman (1986, 1987) bir öğretmenin sahip olması gereken bilgileri PAB modeli ile açıklamıştır. Shulman (1987) PAB modelinde PAB'ı, Alan Bilgisi (AB) ile Pedagojik Bilginin (PB) kesişimi ile oluşan bir bilgi türü olarak ifade etmiş ve "öğretilen içerik için, fikirlerin en uygun şekilde gösterimi, en etkili benzetmeler, açıklamalar ve örnekler; özetle içeriğin anlaşılması için en uygun şekillerde gösterebilme ve açıklayabilme bilgisi" şeklinde tanımlamıştır (s. 9). Shulman'ın (1987), öğretmenlerin sahip olması gereken bilgi türlerini açıklayan PAB modeline, Mishra ve Koehler (2006) tarafından teknolojinin entegre edilmesi ile oluşan TPAB, alana kazandırılan yeni bir bilgi türü ve çerçevedir (Kaya, 2014).

TPAB modeli temel anlamda konu alan bilgisi, pedagojik bilgi (öğretme ve öğrenci öğrenmesi) ve teknolojik bilginin birleşimi olarak görünse de aslında TPAB, bir öğretmenin alan, teknoloji ve pedagoji bilgisinin birleşiminin çok ötesinde sahip olduğu bir bilgi türü şeklinde açıklanabilir (Mishra & Koehler, 2006). TPAB öğretimde etkili bir teknoloji entegrasyonu için öğretmen yeterliklerine odaklanan bir modeldir (Kabakci-Yurdakul vd., 2012). TPAB, öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının teknoloji konusundaki bilgilerini, teknolojinin derse nasıl etkili şekilde entegre edileceğini içerisinde barındıran bir terimdir (Akkoç, 2011; Harris vd., 2009). Mishra ve Koehler'e (2006) göre TPAB modeli teknolojinin eğitime entegre edilmesi konusunda öğretmenlere rehber olarak tanımlanmıştır. Ayrıca TPAB modeli, teknoloji entegrasyonunun nasıl geliştirilebilir olduğunun üzerine düşünmeyi sağlayarak yaratıcılığı da geliştirmektedir (Schmidt vd., 2009). Mishra ve Koehler (2006) tarafından tasarlanan TPAB modeli; Teknoloji Bilgisi (TB), Alan Bilgisi (AB) ve Pedagoji Bilgisi (PB) olmak üzere üç bilgi türü ile bu bilgi türlerinin ikişerli, üçerli kesişimlerinden doğan Teknolojik Alan Bilgisi (TAB), Teknolojik Pedagojik Bilgi (TPB), Pedagojik Alan Bilgisi (PAB) ve Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi (TPAB) olmak üzere 7 bilgi türlerinden oluşmaktadır (Şekil 1).



Şekil 1. TPAB Modeli (Koehler & Mishra, 2009)

Alan yazın incelendiğinde TPAB'ın belli bir disiplin alanına özgü olmadığı, genel bir teorik çerçeve olduğu görülmektedir. Bununla birlikte, araştırmacılar tarafından TPAB çerçevesinden yola çıkılarak farklı disiplin alanlarında kullanılabilecek özgün teorik çerçeveler ortaya koyulmuştur. Matematik eğitimi özelinde de çeşitli TPAB çerçeveleri oluşturulmuştur. Örneğin, Bowers ve Stephens (2011), Mishra ve Koehler (2006) tarafından geliştirilen TPAB çerçevesine sadık kalarak ve teknoloji (Geometer's Sketchpad) ile matematik eğitimi konulu bir tartışma bir ortamı oluşturarak matematik öğretmenlerinin TPAB düzeylerini yorumlamak amacıyla TPAB çerçevesini matematik eğitimi özelinde geliştirerek yeniden tanıtmıştır. Bowers ve Stephens (2011) çerçevede, TPAB çerçevesinin beş bileşenine (AB, TB, TAB, TPB ve TPAB) odaklanmış ve bilgi türlerinin tanımlarını belirlerken Geometer's Sketchpad geometri yazılımının kullanımını ve bu yazılımın matematik eğitimine entegre edilmesini temel almışlardır. Akyüz (2016) ise çalışmasında teknoloji destekli bir ders kapsamında uygulanan farklı öğretim yöntemleri ile ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının TPAB düzeylerini incelemiştir. Akyüz (2016) öğretmen adaylarının GeoGebra ve Cabri dinamik yazılımlarını kullanarak oluşturdukları etkinlikler, çalışma kağıtları ve ders planlarını analiz ederek TPAB düzeylerini belirlemek amacı ile Bowers ve Stephens'in (2011) ana fikirlerine sadık kalarak öğretmen adaylarının AB, TB, TAB, TPB ve TPAB'larının incelenebileceği bir teorik çerçeve oluşturmuştur. Yiğit-Koyunkaya (2017) çalışmasında, Akyüz'e (2016) benzer şekilde matematik öğretmeni adaylarına birden fazla teknoloji ve teknolojik aracının kullanılmasına dair bir eğitim vermiş ve Bowers ve Stephens'ın (2011) teorik çerçevesi ile TPAB çerçevesini (Mishra ve Koehler, 2006) göz önünde bulundurularak yeni bir TPAB model önerisi sunmuştur. Yiğit-Koyunkaya

(2017) çerçevesinde matematiksel ve teknolojik bilgi türlerini incelemesi nedeniyle TB, TAB, TPB ve TPAB bilgi türlerini ele almıştır. Mishra ve Koehler'in (2006) TPAB modelinin temelini oluşturan alan bilgisi, pedagojik bilgi ve teknoloji bilgisi ile bu üç bilgi türünün ilişki ve etkileşimleri sonucu oluşan PAB, TPB, TAB ve TPAB bilgi türlerine ait tanımlar ile Mishra ve Koehler'in TPAB çerçevesi ele alınarak araştırmacılar tarafından tasarlanan çerçeve ve bilgi türleri aşağıda detaylı açıklanmıştır. Bu çalışmada da TPAB çerçevesi tanıtılırken, bahsedildiği gibi Bowers ve Stephens (2011), Akyüz (2016) ve Yiğit-Koyunkaya'nın (2017) çalışmalarından esinlenerek matematik eğitimi özelindeki bilgi türlerine odaklanılmıştır.

2.1.1. Alan Bilgisi (AB)

Shulman (1987), AB için bir alandaki kavram, teori, fikir, yaklaşım, hipotez ve ispatları bilmeyi gerektiğini ifade etmiştir. Mishra ve Koehler (2006) ise AB'yi öğretmenin öğreteceği konu ile ilgili bilgisi olarak tanımlamıştır. Grossman'a (1990) göre AB, konunun tüm özellikleri ile içeriğini bilmeyi ve öğretim sürecindeki deneyimi de barındırmaktadır. Davis'e (2003) göre AB; konuya yönelik tanımları, örnekleri, temsilleri, teoremleri ve temel kavramları bilmeyi içerirken aynı zamanda konunun diğer disiplinlerle olan ilişkilerini de kapsayan bir bilgi türüdür. Özet olarak AB; öğretmenlerin öğretim sürecinde sahip olmaları gereken diğer bir deyişle öğretmenlerin kılavuz bilgisidir (Yazıcı & Albayrak, 2019). Bu nedenle de iyi bir AB, nitelikli bir eğitim gerçekleştirebilmek için öğretmenlerin sahip olması gereken oldukça önemli bir bilgidir (NCTM, 2000). Bu çalışmada katılımcıların trigonometri konusundaki AB'leri incelenirken, trigonometri konularına ait matematiksel ifadeleri tanımlayabilme, açıklayabilme, örnek verebilme, ilişki kurabilme, ispat yapabilme vb. durumları incelenmiştir.

2.1.2. Pedagojik Bilgi (PB)

Shulman (1987) PB'yi öğrenme ve öğretme süreci hakkındaki bilgi olarak tanımlamıştır. PB, öğretmenin öğretme ve öğrenme süreçlerinde; ders planı oluşturma ve uygulama, yöntem ve teknik belirleme, sınıf yönetimi, öğrenci öğrenimi ve değerlendirmesi gibi konularda genel bir bilgi biçimidir (Mishra & Koehler, 2006). PB, öğretmenin alan bilgisinden ayrı olarak; öğretim yöntem ve teknik bilgisi, program hakkındaki bilgisi, değerlendirme bilgisi, öğrenme güçlüğü ile ilgili bilgileridir (Grossman, 1990). PB, öğrencilerin bilgiyi nasıl yapılandırarak becerileri kazandıklarını, öğrenmeye yönelik olumlu eğilimleri nasıl geliştirdiklerini de bilmeyi içerir (Koehler & Mishra, 2009). Kabakçı-Yurdakul ve Odabaşı'na (2013) göre ise PB; bireysel farklılıklara, öğrenci ön öğrenmesine, öğrenci düzeyine dikkat ederek öğretimi planlama, yöntem ve teknik belirleme, değerlendirme

araçlarını hazırlama bilgisidir. Bu çalışmada katılımcıların PB'leri incelenirken öğretme-öğrenme yöntem ve tekniklerine dair söylemlerinde yer alan ifadeler incelenmiştir.

2.1.3. Pedagojik Alan Bilgisi (PAB)

Shulman (1987) PAB'ın alan bilgisi ile pedagojik bilginin birleşimi olduğunu ve PAB'ı öğretim için gerekli olan alan bilgisi olarak ifade etmiştir (Koehler & Mishra, 2009; Harris vd., 2009). Shulman (1987) PAB'ı "öğretilen içerik için, fikirlerin en uygun şekilde gösterimi, en etkili benzetmeler, açıklamalar ve örnekler; özetle içeriğin anlaşılması için en uygun şekillerde gösterebilme ve açıklayabilme bilgisi" şeklinde tanımlamıştır (s. 9). Shulman'ın PAB modelinin temelinde, öğretmenin konuya ilişkin sahip olduğu alan bilgisini aktarabilmesi yer alır (Mishra & Koehler, 2006). Kabakçı-Yurdakul ve Odabaşı'na (2013) göre ise PAB, öğretmenlerin alan bilgisine uygun şekilde değerlendirme araçlarını hazırlayabilmesi, belirlenen hedeflere uygun şekilde öğretim yöntemi ve materyal seçebilme ve uygulayabilme bilgisidir. Bu çalışmada katılımcıların trigonometri konusunda PAB'ları incelenirken trigonometri öğretimini gerçekleştirmek için kullandığı öğretme-öğrenme yöntem ve tekniklerine dair söylemlerinde yer alan ifadeler incelenmiştir.

2.1.4. Teknolojik Bilgi (TB)

Mishra ve Koehler (2006) TB'yi standart teknolojiler (kitap, tebeşir ve yazı tahtası gibi) ve internet, dijital video gibi daha ileri teknolojiler hakkında bilgi şeklinde tanımlamıştır. Teknoloji bilgisi, pedagoji ve alan bilgisine göre daha gelişime ve değişime açıktır ve teknoloji bilgisinin sürekli güncellenmesi nedeniyle de kesin bir tanımla ifade etmek zordur (Koehler & Mishra, 2009). Kabakçı-Yurdakul ve Odabaşı'na (2013) göre ise TB, teknolojiyi belirlenen kurallara uygun kullanarak teknolojiyi amaca uygun ve etkin bir şekilde kullanabilme bilgisidir. Bahsedildiği gibi TPAB temel çerçevesine sadık kalarak yeni TPAB çerçevesi ve tanımları oluşturan araştırmalar olduğu görülmüştür. Bunlardan Akyüz (2016), TB'yi "Dinamik geometrik yazılımlar ile etkinlikler oluşturulması ve bu etkinliklerin yazılımın dinamik özelliklerini etkin bir şekilde kullanıyor olması (aynı etkinliğin Powerpoint, Word gibi programlar ile yapılamıyor olması)" şeklinde tanımlamıştır (s. 7). Yiğit-Koyunkaya (2017) ise, TB'yi "Standart ve gelişmiş teknolojiler ve teknolojik araçların (internet, yazılımlar, web siteleri, dijital videolar vb.) kullanılması hakkındaki bilgiler (örn: Bir dinamik matematik yazılımı olan GeoGebrayı kullanarak bir matematiksel şeklin çizilmesi)" (s. 4) şeklinde tanımlamıştır. Bu çalışmada katılımcıların TB'leri incelenirken, GeoGebra araç çubuklarını kullanma durum, düzey ve becerileri (örn: birim çember, dik üçgen oluşturma, açı,

uzunluk ölçme, trigonometrik fonksiyonların grafiklerini çizme, sürgü oluşturma, metin kutusu, işaret kutusu vb. araçları kullanma vb.) incelenmiştir.

2.1.5. Teknolojik Pedagojik Bilgi (TPB)

TPB öğretimin belirli teknolojilerin kullanılması sonucu nasıl değişebileceğinin farkında olma bilgisidir (Mishra & Koehler, 2006). TPB, teknoloji bilgisi ile pedagoji bilgisinin birleşiminden doğan ve teknolojinin pedagojik yöntemleri desteklemesi ile öğretimi gerçekleştirmeyi sağlayan bir bilgi türüdür (Koehler & Mishra, 2009). TPB, öğretmenlerin teknoloji ile zenginleştirilmiş sınıfları öğrencinin öğrenmesine uygun şekilde hazırlayarak dersi yönetebilme bilgisidir (Graham vd., 2009). Kabakçı Yurdakul ve Odabaşı'na (2013) göre ise TPB, öğretimi teknoloji ile birleştirerek öğretim yöntemlerini planlayabilme, teknolojiyi öğrenciler ile iletişim kurmada bir araç olarak kullanabilme ve kullanımda meydana gelebilecek problemleri çözebilme bilgisidir. Akyüz (2016) TPB'yi "Zayıf bir matematiksel içeriğin teknoloji yardımıyla anlatılması ve bu anlatımın pedagojik öğeler içermesi (öğrencilerden sorunun ötesine gitmesi istenmesi, farklı çözümler, açıklamalar istenmesi gibi) ve etkinliklerin günlük hayatla bağlanması" şeklinde tanımlamıştır (s. 7). Yiğit-Koyunkaya (2017) TPB'yi "Teknolojinin ve teknolojik araçların matematik öğretimini nasıl değiştireceğini bilme, anlama ve kullanma becerisinin oluşturulması, Teknoloji ve teknolojik araçlardan faydalanarak matematik öğretiminin pedagojik öğeler içermesi (öğrencilerden düşüncelerinin paylaşımlarının istenmesi, farklı çözümler istenmesi, çizimlerinin yönlendirilmesi vb.)" şeklinde tanımlamıştır (s. 4). Bu çalışmada katılımcıların trigonometri konusunda TPB'leri incelenirken GeoGebra yazılımını trigonometri öğretme ve öğrenme sürecinde nasıl kullanmayı planladıkları incelenmiştir.

2.1.6. Teknolojik Alan Bilgisi (TAB)

TAB alan bilgisi ile teknoloji bilgisinin birbiri ile etkileşiminden doğan bir bilgi olup öğretmenlerin sadece öğrettikleri konuyu değil, aynı zamanda teknolojinin uygulanmasıyla konunun nasıl değiştirilebileceğini de bilmesidir (Mishra & Koehler, 2006). Teknolojik alan bilgisi öğretmenlerin alan bilgisinden ziyade alan bilgisini teknolojik uygulamalara dönüştürerek öğrenciye zengin içerik sunmayı gerektiren bir bilgi türüdür (Koehler vd., 2007). Kabakçı-Yurdakul ve Odabaşı'na (2013) göre TAB, konu ile ilgili güncel gelişmelerden haberdar olma, alan ile ilişkili teknolojileri kullanabilme ve teknolojiyi gerçek yaşamla bağdaştırma bilgisidir. Öğretmenlerin etkili öğretimi gerçekleştirebilmeleri için alan bilgilerine uygun teknolojik araçları öğrenerek derslerine entegre etmeleri gerekmektedir (Mutluoğlu, 2012). Akyüz (2016) TAB'ı "Etkinliklerin dinamik özellikler kullanılarak

matematiksel kuralları gözlemlemeyi ve doğrulamayı sağlayacak sorular içermesi, Şekillerin sadece araçlar yardımıyla değil matematiksel özelliklerin kullanılarak oluşturulması" şeklinde tanımlamıştır (s. 7). Yiğit-Koyunkaya (2017) TAB'ı:

> "Yapılan matematiksel uygulamaların (konu anlatımı, etkinlik, oyun, şekil çizme vb.), teknolojik araçların özelliklerini kullanarak ve bu özellikleri göz önünde bulundurarak ve kullanarak matematiksel bilgiyi gözlemleyecek, oluşturacak, doğrulayacak ve/veya güçlendirecek yapıda olmaları, Yapılan uygulamaların sadece teknolojik araçların özellikleri yardımıyla değil matematiksel özellikler ve terimler kullanılarak adım adım oluşturulması"

şeklinde tanımlamıştır (s. 4). Bu çalışmada katılımcıların trigonometri konusunda TAB'ları incelenirken GeoGebra yazılımını kullanarak trigonometri konularını nasıl ele aldıkları detaylı olarak incelenmiştir.

2.1.7. Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi (TPAB)

TPAB, genel olarak teknoloji bilgisinin pedagoji ve alan (içerik) bilgisi ile birleşiminden doğan bir bilgi türüdür (Koehler vd., 2007). TPAB çerçevesi, öğretim teknolojilerini ve disiplini içeren verimli bir öğretimi ortaya çıkarmak için öğretmenler tarafından benimsenen teknoloji anlayışı, pedagoji ve içerik arasındaki etkileşimi ifade eder (Harris vd., 2009). Dolayısı ile TPAB, öğretmenlerin öğretimlerine etkili teknoloji entegrasyonunu gerçekleştirirken gerekli olan öğretmenlik bilgisini içerisinde barındıran bir modeldir (Akkoç & Özmantar, 2012; Harris vd., 2009; Jang & Tsai, 2012; Kabakci-Yurdakul vd., 2012; Koehler & Mishra, 2009; Nyikahadzoyi, 2015). TPAB teknolojiyi konu alanına uygun yöntemler ile birleştirerek öğrenme faaliyetini kolaylaştıran, öğrenme esnasında karşılaşılan problemlere karşı daha kolay çözüm yolları sunan, kavram ve teorileri daha anlaşılır hale getiren bilgi türüdür (Mishra & Koehler, 2006). Guerrero'ya (2010) göre ise TPAB, bir öğretmenin kendi alanına en uygun teknoloji türlerini ayırt etme ve etkili şekilde uygulamasına ilişkin kararlar verme becerisini ifade eder. Dolayısı ile öğretmenlerin matematik (içerik), öğretme ve öğrenme (pedagoji) ve teknoloji konularında kapsamlı bilgiye sahip olmaları gerekir (Niess, 2006).

Akyüz (2016) TPAB'ı "Teknolojiyi zengin bir matematik içeriği ve pedagojik bir yaklaşımla birleştirerek genellemelere varmayı sağlayan sorular sorulması, öğrencilerin matematiksel kuralları keşfetmesini sağlayıcı içerikler geliştirilmesi, Bir kuralı dinamik olarak doğrulamakla yetinmeyip bunun neden geçerli olduğunu ve her durumda geçerli olup olmadığının sorgulanması" şeklinde tanımlamıştır (s. 7). Yiğit-Koyunkaya (2017) TPAB'ı:

> "AB, PB, TB, PAB, TPB ve TAB'ın kesişimi olarak teknolojiyi ve teknolojik araçları ve uygun pedagojik teknikler kullanarak matematiksel bilginin keşfedilmesini ve öğrenilmesini sağlaması, verilen konunun seviyesine göre uygun pedagojik tekniklerin ve bilgilerin, kullanılacak teknolojik araçların öğrencilere nasıl yardımcı olacağını ve ne yönde etkileyeceğini bilmesi, öğrencileri teknolojinin sağladığı faydaları kullanarak verilmek istenen matematiksel bilgiyi açıklamalar yaparak ve sorgulayarak doğrulamalarının sağlanması"

şeklinde tanımlamıştır (s. 5). Bu çalışmada katılımcıların konusundaki TPAB'ları incelenirken GeoGebra yazılımını kullanarak trigonometri konusunu öğretme ve öğrenme sürecine dahil etme durumları ve buna yönelik söylemleri incelenmiştir.

2.2. TPAB ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Alan yazın incelendiğinde farklı branşlardaki öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının TPAB düzeylerini belirlemek, incelemek, geliştirmek amacıyla yapılmış birçok çalışma olduğu görülmüştür (Akkoç; 2013; Akyüz, 2016; Atasoy vd., 2015; Bowers & Stephens, 2011; Erduran & Tataroğlu-Taşdan, 2017; Garofalo vd., 2000; Haciomeroglu vd., 2011; Karataş vd., 2016; Ozgun-Koca vd., 2010; Özgen vd., 2013; Yiğit-Koyunkaya & Tataroğlu-Taşdan, 2019). Bazı çalışmalarda da TPAB yeterliliklerinin çeşitli değişkenler açısından incelendiği (Karasu, 2019), TPAB ölçeği geliştirme ve uyarlama çalışmaları yapıldığı (Koh vd., 2013; Jang & Tsai, 2012), TPAB ile sınıf yönetimi becerileri, hizmet içi eğitim durumları, öğrenme stratejileri ve düşünme stilleri gibi çeşitli konuların birlikte araştırıldığı (Cangül, 2022; Ekici, 2018; Türkyılmaz, 2018; Usta, 2021) görülmüştür. Bunun yanında belli yıllar arasında TPAB ile ilgili yapılan çalışmaların çeşitli kriterler açısından detaylı incelendiği araştırmalara da rastlanmıştır (Baran, Canbazoğlu-Bilici, 2015; Dikmen & Demirer, 2016; Kaleli-Yılmaz, 2015; Yolcu vd., 2022).

Baran ve Canbazoğlu-Bilici (2015), Kaleli-Yılmaz (2015) 2003-2015 ve Yolcu ve diğerleri (2022) 2000-2021 yılları arasında Türkiye'de yayınlanan TPAB konulu çalışmaları amaç, konu alanı, yöntem, örneklem, veri toplama araçları, kullanılan öğretim uygulamaları ve elde edilen sonuçlar bağlamında incelemiştir. Araştırma sonucunda TPAB çalışmalarının büyük çoğunluğunun öğretmen adayları ile yürütüldüğü, nicel yöntemler kullanılarak yapıldığı ve ölçme aracı olarak da ölçeklerin yoğunlukla kullanıldığı görülmüştür (Baran & Canbazoğlu-Bilici, 2015; Kaleli-Yılmaz, 2015; Yolcu vd., 2021). Kaleli-Yılmaz (2015) çalışmanın önemli bir sonucu olarak genellikle nicel çalışmalarda katılımcıların yüksek TPAB yeterlik/algı/düzeyine sahip olduğu ortaya konulmasına rağmen nitel ağırlıklı çalışmalarda

durumun tam aksine olduğunu vurgulamıştır. Ayrıca TPAB çalışmalarının önemli bir bölümünün ölçek geliştirme/uyarlama, TPAB yeterlilik ve gelişimlerinin incelenmesi amacıyla yapıldığı ancak az sayıda çalışmada özel bir konu alanına odaklanıldığı sonucuna ulaşılmıştır (Kaleli-Yılmaz, 2015).

Bunun yanında ülkemizde alana özgü teknolojilerin (örn: GeoGebra, Graphic Calculus) araştırıldığı az sayıda TPAB çalışmasına rastlanılmıştır (Baran & Canbazoğlu-Bilici, 2015). Dolayısıyla hem ülkemizde hem de dünyada alana özgü TPAB araştırmaları ile birlikte alana özgü teknolojilerin incelendiği araştırmalara ihtiyaç duyulmaktadır (Baran & Canbazoğlu-Bilici, 2015). Ayrıca TPAB çalıştayları, karma mesleki gelişim programı, harmanlanmış öğrenme gibi farklı öğretim uygulamalarının TPAB'ı artırdığı sonuçları elde edilmiş ve elde edilen sonuçlar doğrultusunda Türkiye'de, TPAB gelişimini hedefleyen, çok sayıda veri toplama aracı kullanılarak uzun bir süreçte uygulamaların yürütüldüğü çalışmalara ihtiyaç olduğu görülmüştür (Kaleli-Yılmaz, 2015).

Ortaöğretim matematik öğretmen adayları ve öğretmenlerle yapılan TPAB çalışmalarının sonucunda, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin eğitim süreçleri boyunca alan, pedagoji ve teknolojiye yönelik dersler almış ve uygulama olanakları bulmuş olmalarına rağmen alan, pedagoji ve teknolojiye yönelik bilgilerini nasıl ve ne zaman kullanacakları konusunda sorun yaşadıkları görülmüştür (Akyüz, 2016; Erduran & Tataroğlu-Taşdan, 2017); Garofalo vd., 2000; Özgen vd., 2013; Yiğit-Koyunkaya & Tataroğlu-Taşdan, 2019). Özgen ve diğerleri (2013), matematik öğretmen adaylarının teknolojik pedagojik alan bilgisi (TPAB) düzeylerini belirlemek ve teknoloji kullanım sıklığı algısının TPAB üzerindeki etkilerini incelemek amacı ile çalışma yapmışlardır. Çalışmanın sonunda öğretmen adaylarının eğitim süreçleri boyunca alan, pedagoji ve teknolojiye yönelik dersler almış ve uygulama olanakları bulmuş olmalarına rağmen matematik öğretmen adaylarının teknoloji kullanım sıklığına yönelik yüksek algılarının olduğuna ulaşılırken, TPAB modelindeki bilgi türlerine yönelik bilgiyi kullanmada yüksek algılarının olmadığı ortaya çıkmıştır (Özgen vd., 2013). Bu durum öğretmen adaylarının alan, pedagoji ve teknolojiye yönelik bilgilerini nasıl ve ne zaman kullanacakları konusunda emin olmadıklarını da göstermektedir (Özgen vd., 2013). Erduran ve Tataroğlu-Taşdan (2017) yürüttükleri çalışmada matematik öğretmen adaylarının matematik öğretiminde teknoloji kullanımına ilişkin görüşlerini belirlemeyi ve teknolojiyi derslerine entegre etme süreçlerini incelemeyi amaçlamıştır. Çalışmanın sonucunda matematik öğretmen adaylarının matematikte kullanılabilecek teknolojilerden bilgisayar ve projeksiyonu ön plana çıkardıkları, Özgen ve diğerlerine (2013) benzer şekilde matematik dersinde kullanılabilecek yazılımların farkında olmalarına rağmen kendilerinin bu yazılımları

kullanma konusundaki yetersizliklerini dile getirerek teknolojiyi matematik eğitimine entegre etmede sıkıntılar yaşadığı sonucuna da ulaşılmıştır. Yiğit-Koyunkaya ve Tataroğlu-Taşdan (2019), ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının teknoloji temelli bir ders katılımları sonrasında TPAB düzeylerini incelediği çalışmasının sonucunda, Özgen ve diğerleri (2013) ile Erduran ve Tataroğlu-Taşdan'dan (2017) farklı olarak öğretmen adaylarının seçtikleri konu/kavram kapsamında teknoloji ve teknolojik araçlar kullanarak derslerine etkili bir şekilde teknolojiyi entegre edebildiklerini, var olan alan bilgileri ile teknoloji bilgilerini birleştirebildiklerini ortaya koymuştur. Özgen ve diğerleri (2013) ve Erduran ve Tataroğlu-Taşdan (2017) ile benzer şekilde ise öğretmen adaylarının alan ve teknoloji bilgisine sahip olmalarına rağmen bu bilgilerini hangi pedagojik tekniklerle birleştirecekleri konusunda sınırlı bilgiye sahip olduklarını tespit etmiştir.

Ortaöğretim matematik öğretmenleri ile yapılan çalışmalar incelediğinde de öğretmenlerin teknoloji, pedagoji ve alan bilgilerine sahip oldukları fakat pedagoji bilgilerini teknolojiye entegre etmede sorun yaşamaları sebebiyle TPAB bağlamında eksikleri olduğu görülmüştür. Kırıkçılar (2017), öğretmenlerin dinamik bir yazılımla etkinlik hazırlama süreçlerinde TPAB kullanımını sergilemekte zorluk çektiklerini tespit etmiştir. Özdemir ve Erduran (2019) ise matematik öğretmenlerinin sosyal medya ve temel teknoloji kullanımı konusunda kendilerini yeterli görürken; matematiksel yazılımları kullanma, web sitesi kurma, interaktif dersler oluşturma gibi üst düzey teknoloji kullanımı konusunda kendilerini yetersiz bulduklarını tespit etmiştir. Ayrıca çalışma sonucunda öğretmenlerin TB yeterliliklerinin, teknolojiye dönük diğer alt boyutlara göre (TAB, TPB, TPAB) yüksek olması, diğer boyutlardaki yeterliliklerin daha düşük olması, öğretmenlerin teknolojiyi derslerine entegre etme konusunda sıkıntı yaşadıklarını ortaya koymaktadır (Özdemir & Erduran, 2019).

Alan yazında matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının TPAB'larının gelişimini hedefleyen bazı çalışmalara da rastlanmaktadır (Akkoç; Akyüz, 2016; 2013; Atasoy vd., 2015; Bowers & Stephens, 2011; Haciomeroglu vd., 2011; Karataş vd., 2016; Ozgun-Koca, vd., 2010). Akkaya (2009) "Matematik Öğretmen Adaylarına Teknolojiye Yönelik Pedagojik Alan Bilgisi Kazandırma Amaçlı bir Program Geliştirme" adlı proje kapsamında öğretmen adaylarına eğitim verdikten sonra çalışmadaki bazı öğretmen adaylarının gelişimini derinlemesine araştırmıştır. Çalışmanın sonunda öğretmen adaylarının türev-limit, türev-eğim ve türev-değişim oranı ilişkisini kurmadaki zorlukların neler olabileceğini öngörebildikleri ve öğrencilerin zorluk yaşamamaları amacıyla teknolojinin imkânlarını kullanmaya çalıştıkları görülmüştür (Akkaya, 2009). Ergene (2011) çalışmasında, öğretmen adayının türev kavramına yönelik TPAB'larını çoklu temsiller bileşeninde ele almış ve bazı öğretmen adaylarının

bireysel gelişimlerini derinlemesine incelemiştir. Çalışmada öğretmen adaylarına türev ve fonksiyon kavramları üzerinden PAB, TB, TAB, TPB, TPAB çalıştayları uygulanmıştır. Çalıştay öncesinde ve sonrasında olmak üzere öğretmen adaylarına ait toplanan verilerin analizi sonucunda öğretmen adaylarının çoklu temsil bilgilerinin hem çoklu temsilleri kullanma hem de kullandıkları temsiller arasındaki bağlantıları kurma yönünde geliştiğini ve bu gelişimin teknolojinin devreye girmesiyle daha da belirginleştiğini ortaya koymuştur (Ergene, 2011).

TPAB'ın gelişimi amacıyla yapılan çalışmalar yıllar süresince farklı teknolojik araçlar eklenerek genişletilmiştir. Örneğin Ozgun-Koca ve diğerleri (2010) çalışmasında, öğretmen adaylarının TPAB düzeylerini geliştirmek amacıyla sorgulama temelli bir ders tasarlamışlardır. Çalışmada öğretmen adaylarına teknolojik araç olarak TI-Nspire olarak adlandırılan bir grafik hesap makinasını (GHM) kullanımı öğretilerek etkinliklerin bu araçlar ile oluşturulması istenmiştir. Çalışmanın sonucunda ise teknoloji destekli tasarlanan derslerin TPAB düzeyi gelişimini sağladığı görülmüştür (Ozgun-Koca vd., 2010). Ozgun-Koca ve diğerleri (2010) benzer şekilde, Bowers ve Stephens (2011) çalışmalarında teknolojik araç olarak dinamik geometri yazılımı (The Geometer Sketchpad) kullanarak matematik öğretmeni adaylarının TPAB gelişim düzeylerini incelmiş ve çalışmanın sonunda TPAB düzeylerini yorumlamak amacıyla yeni bir teorik çerçeve oluşturmuşlardır. Haciomeroglu ve diğerleri (2011) ise çalışmalarında, TPAB çerçevesini ve dinamik matematik yazılımı (GeoGebra) kullanarak bir ders tasarlamışlar ve matematik öğretmeni adaylarının TPAB gelişimlerini incelemişlerdir. Çalışmanın sonucunda, dinamik matematik yazılımı olan GeoGebra'nın öğretmen adaylarının TPAB düzeylerini geliştirmede etkili olduğunu ortaya koymuşlardır.

Diğer taraftan Akyüz (2016) bir ders kapsamında uygulanan farklı öğretim yöntemleri ile farklı dönemlerde öğrenim gören ilköğretim matematik öğretmen adaylarının TPAB düzeyinin gelişip gelişmediğini ve öğrencilerin sınıf seviyesi ile takip edilen öğretim yönteminin TPAB'a olan etkisi araştırmıştır. Öğretmen adaylarının GeoGebra ve Cabri 3D dinamik yazılımlarını kullanarak oluşturdukları etkinlikler, çalışma kağıtları ve ders planlarını analizi sonucu göre birçok öğretmen adayının TPAB seviyesine ulaşamadığı daha çok Teknolojik Alan Bilgisi (TAB) düzeyinde kaldığı gözlemlenmiş ve problem çözme veya etkinlik temelli öğrenme gibi uygun öğretim yöntemleri ile tasarlanacak teknoloji destekli bir eğitimin ve öğrencilerin sınıf düzeyinin TPAB üzerinde etkisi olduğuna ulaşılmıştır (Akyüz, 2016).

Ayrıca Atasoy ve diğerleri (2015) bir ders kapsamında dinamik matematik/geometri yazılımları (Cabri 3D, GeoGebra ve Tinkerplots) ile destekli öğrenme ortamının, ilköğretim

matematik öğretmen adaylarının Teknolojik Pedagojik Alan Bilgilerinin (TPAB) gelişmesine, TPAB öz yeterliklerinin ve teknolojinin kullanımına yönelik algılarının artmasına olumlu katkı sağladığı sonucuna ulaşmışlardır. Atasoy ve diğerlerine (2015) benzer şekilde Karataş ve diğerleri (2016) bir ders kapsamında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarına farklı matematik/geometri yazılımlarının (Cabri 2D ve 3D, GeoGebra, Derive, The Geometer Sketchpad) matematik eğitiminde nasıl kullanılması gerektiğini tanıtmışlar, bu doğrultuda öğretmen adaylarına TPAB ölçeği, TPAB özgüven ölçeği ve teknoloji kullanımına yönelik algı ölçeği uygulamışlardır. Çalışmanın bulguları, uygulanan öğretim yönteminin öğretmen adaylarının TPAB düzeylerinde ve özgüvenlerinde olumlu etkilerinin olduğunu fakat teknolojiye dair algılarında bir değişim olmadığını göstermektedir.

Yiğit-Koyunkaya (2017) ise çalışmasında ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının TPAB düzeylerini ve gelişimlerini incelemiştir. Yiğit-Koyunkaya (2017), diğer çalışmalardan farklı olarak, bir öğretim deneyi yöntemi kapsamında birbirinden farklı teknolojik araçların kullanımına ve matematik eğitimine entegre edilmesine dair bir eğitim verilmiş ve öğretmen adaylarının TPAB düzeyleri daha geniş bir perspektife dayanarak incelenmiştir. Çalışmada kullanılan teknolojik araçlar ise dinamik matematik/geometri yazılımları, grafik hesap makinaları, interaktif uygulamalar, video temelli öğretim uygulamaları, öğrenme yönetim sistemleri ve web siteleridir. Çalışmanın sonucunda, uygulama öncesi öğretmen adayları sınırlı teknoloji bilgisine sahip iken hatta teknolojinin matematik eğitimine entegrasyonun nasıl yapılacağına dair fikir sahibi bile değil iken, yapılan uygulama sonrasında öğretmen adaylarının geliştirdikleri etkinliklere ve ders planlarına teknolojiyi entegre ederek, teknoloji bilgilerini var olan alan bilgileri ve pedagojik bilgileriyle birleştirdiği dolayısıyla TB, TPB, TAB ve TPAB düzeylerinin geliştiği görülmüştür (Yiğit-Koyunkaya, 2017).

Diğer çalışmalardan farklı olarak Akkoç (2013) bir matematik konusuna odaklanarak bir matematik öğretimi dersinin ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyon ve türev konularına dair TPAB düzeylerinin gelişimi için nasıl tasarlanabileceğini araştırdığı çalışmasında, öğretmen adaylarına matematik/geometri yazılımlarını (GeoGebra, Cabri Geometry, Graphic Calculus, Derive, Logo) tanıtarak belli bir amaç ya da kuram doğrultusunda tasarlanan ders ile matematik öğretmeni adaylarının TPAB düzeylerinin geliştirilebileceğini göstermiştir.

Çalışmalar incelendiğinde öğretmen ve öğretmen adaylarının TPAB'larına odaklanan çok fazla sayıda çalışma olduğu ancak öğretmen ve öğretmen adaylarının TPAB'larının bir konu özelinde incelendiği çok az sayıda çalışma olduğu görülmüştür.

2.3. Trigonometri ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Trigonometri ile ilgili yapılan çalışmalar, hem öğrencilerin hem de öğretmen ve öğretmen adaylarının, trigonometri konusunda yeterli anlayışa sahip olmadıklarını göstermektedir (Altıkardeş & Yiğit-Koyunkaya, 2022; Brown, 2005; Demetgül, 2001; Doğan, 2001; Fi, 2003; Gooya & Rabanifard, 2008; Güntekin & Akgün, 2011; Gür, 2009; Kendal & Stacey, 1998; Keser, 2017; Kültür vd., 2008; Marchi, 2012; Martin-Fernandez vd., 2019; Moore, 2009, 2010, 2013, 2014; Özgen vd., 2017; Steckroth, 2007; Thompson, 2007; Thompson vd., 2007; Weber, 2005; Yiğit-Koyunkaya, 2014a, 2014b, 2016).

2.3.1. Öğrencilerin Trigonometri Konusundaki Bilgilerini İnceleyen Çalışmalar

Mevcut araştırmalar, öğrencilerin trigonometri ile ilgili anlayışlarının trigonometriyi öğretmek için kullanılan öğretim yöntemleri ile ilgili olduğunu göstermektedir (Yiğit-Koyunkaya, 2014a). Bununla ilgili olarak Kandel ve Stacey (1998) ve Weber (2005) çalışmalarında, oran yöntemi (trigonometrik fonksiyonların dik üçgenlerdeki kenarların uzunluklarının oranları olarak tanımlanması) ve birim çember yöntemi (bir açının trigonometrik değerinin, birim çemberi kesen açının ucundaki noktanın sırasıyla x ve y koordinatları olarak tanımlanması) olmak üzere iki farklı yöntem ile gerçekleştirilen trigonometri öğretimini karşılaştırarak incelemişlerdir. Kendal ve Stacey'nin (1998) çalışmasının sonucunda oran yöntemi ile öğretim gerçekleştirilen sınıflardaki öğrencilerin trigonometri ve cebirde daha iyi performans sergiledikleri görülmüş ve oran yöntemi ile gerçekleştirilen öğretimin daha etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu nedenle Kendal ve Stacey (1998) trigonometri öğretiminin oran yöntemi ile başlanması gerektiğini; birim çember yöntemi ile gerçekleştirilen öğretimin ise trigonometrik fonksiyonların fonksiyon olarak anlaşılmasını engellediği savunmuştur.

Weber (2005) ise tam tersine trigonometri öğretimine birim çember yöntemi ile başlanmasının daha etkili olduğunu savunmuş ve trigonometrik fonksiyonların yalnızca dik üçgen üzerindeki oran olarak ifade edilerek işlendiği sınıfta öğrencilerin trigonometrik fonksiyonları kavramsal olarak anlamadıklarını dolayısı ile trigonometrik fonksiyonları fonksiyon olarak belirlemede güçlük çektiklerini ortaya koymuştur. Weber'e (2005) benzer şekilde Marchi (2012) öğrenciler sinüs ve kosinüsü sadece bir oran olarak görürlerse, trigonometrik fonksiyonları girdi ve çıktıları olan bir fonksiyon olarak değerlendirmeleri ve sınıflandırmalarının zor olacağından söz etmiştir. Örnek olarak Marchi'nin (2012) çalışmasında öğrencilere sin(x)'in neden bir fonksiyon olduğu sorulduğunda, düz anlatım yönetemi ile ders işlenen sınıftaki öğrencilerden hiçbirinin anlamlı cevap veremediği görülmüştür. Ayrıca Weber (2005) aslında bir öğretim yönteminin diğerinden üstün

olmadığını ve birim çemberi kullanmanın her zaman etkili bir trigonometri öğreniminin gerçekleşeceğini garanti etmese de önemli olanın yöntemden bağımsız olarak öğrencilere trigonometri öğrenimi boyunca düşünme fırsatı vererek birim çember oluşturma sürecini anlamalarını sağlamak gerektiğini belirtmiştir.

Bununla birlikte araştırmalar, öğrencilerin açılar, açı ölçümü ve birim çember gibi temel kavramların ilk başta anlaşılmasında güçlük yaşanması nedeni ile trigonometri ile ilgili kavram yanılgılarının oluştuğunu ortaya koymuştur. Bununla ilgili olarak Martin-Fernandez ve diğerleri (2019) öğrencilerin birim çemberi sabit bir nesne olarak görerek üçgen trigonometrisinde kaldıklarını dolayısı ile sinüs ve kosinüsü trigonometrik fonksiyonlarla ilişkilendiremediklerini tespit etmiştir. Martin-Fernandez ve diğerlerine (2019) benzer şekilde Brown (2005) çalışmasında katılımcılarının birçoğunun birim çember üzerinde sinüs ve kosinüsü temsil etme konusunda eksik anlayışa sahip olduğu sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca Brown (2005), öğrencilerin sinüs ve kosinüsün hem üçgenlerin kenarlarının hem de sayılarının oranları olabileceğini anlamakta zorlandıklarını görmüştür.

Alan yazın incelendiğinde öğrencilerin trigonometri konularının öğreniminde güçlükler yaşayarak trigonometriye dair birçok farklı kavram yanılgılarının olduğu görülmüştür (Doğan, 2001; Demetgül, 2001; Gooya & Rabanifard, 2008; Steckroth, 2007; Kültür vd., 2008; Güntekin & Akgün, 2011; Gür, 2009; Özgen vd., 2017; Yıldır-Oğuz, 2019). Steckroth (2007) çalışmasının sonucunda öğrencilerin radyan kavramıyla birim çemberi ilişkilendirememe, çember yayının uzunluğu ile ölçüsünü birbirine karıştırma gibi radyan, esas ölçü ve birim çember kavramıyla ilgili çeşitli kavram yanılgılarına sahip olduğu ve öğrencilerin sahip oldukları çeşitli kavram yanılgılarının esas sebebinin kavram imajlarının zayıf olmasından kaynaklandığını tespit etmiştir. Steckroth'a (2007) benzer şekilde Yıldır-Oğuz (2019), trigonometrideki temel kavramlardan olan radyan kavramı ile ilgili öğrencilerinin sahip oldukları kavram imajlarını belirlemeyi ve radyan kavramının öğrenciler tarafından nasıl algılandığını araştırmıştır. Yıldır-Oğuz (2019) verilerinin analizi sonucu öğrencilerin radyanı reel sayı olarak görmekte zorlandıkları, radyan kavramına ilişkin zayıf imajlara sahip olduklarını tespit etmiştir. Radyan kavramına ait var olan imajlar incelendiğinde öğrencilerin 1r= π =180 yanılgısı olduğu, radyan ölçü birimini π ile ilişkilendirme algısının olduğu ve ayrıca en sık kullanılan kavram imajınınsa $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ formülü olduğu görülmüştür (Yıldır-Oğuz, 2019).

Doğan (2001) çalışmasının sonucunda öğrencilerin bazı trigonometrik ifadeleri karıştırdıkları, trigonometrik ifadeler içeren denklemlerin çözümünde, trigonometrik özdeşliklerin kullanılmasında, birim çemberin soru çözümlerinde kullanılmasında,

trigonometrik fonksiyonların değeri ile açının ölçüsünü ayırmada güçlükler yaşadıkları tespit edilmiştir. Benzer olarak Güntekin ve Akgün (2011) çalışmasının sonucunda öğrencilerin büyük çoğunluğunun trigonometrik kavramları öğrenmekte güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin verilen bir açının derece ile radyan cinsinden ifadesinde, trigonometrik fonksiyon değerleri arasında ilişki kurma ve yorum yapma konusunda, ilgili bölgede trigonometrik oranları verilen açıların sıralanışı konularında sorun yaşadıkları ve birim çember üzerinde işlem yapamadıkları görülmüştür (Güntekin & Akgün, 2011). Ayrıca Güntekin ve Akgün (2011) öğrencilerin çoğunluğunda; üçgenler, çokgenler, analitik düzlem, çemberin analitiği ve temel fonksiyon bilgilerinin eksikliği olduğu da ortaya çıkmıştır.

Özgen ve diğerleri (2017) ise çalışmalarında, 10. sınıf öğrencilerinin trigonometrik fonksiyonlarda grafik çizme becerilerini tespit etmeyi amaçlamışlardır. Çalışmanın verileri analiz edildiğinde ise öğrencilerin trigonometrik fonksiyonların grafik çizimlerinde grafiksel ilişkilendirme becerilerini yeterince kullanamadıkları ve grafik çiziminde sinx ve cosx fonksiyonları dışındaki trigonometrik fonksiyonların grafiklerini çizmekte güçlük yaşadıkları sonucuna varılmıştır (Özgen vd., 2017). Buna ek olarak Kültür ve diğerleri (2008) çalışmalarının sonucunda ise öğrencilerin trigonometri konularını kavramsal değil ezbere dayalı olarak öğrendikleri görülmüştür (Kültür vd., 2008). Kültür ve diğerlerine (2008) benzer şekilde Gür (2009) öğrencilerin trigonometri ile ilgili bazı formül ya da bilgileri ezberlediklerini; ezberlenen ifadelerin unutulduğunu, yanlış hatırlandığını ya da başka bir duruma aktarılamadığını görmüştür. Ayrıca Gür (2009), çoğu trigonometri öğretiminin öğretmen merkezli olduğunu, bu nedenle öğrencilerin trigonometri ile ilgili yeni bilgiler oluşturmakta zorlandıklarını savunmuştur. Bununla birlikte öğrencilerin matematiksel bilgileri kavramsal olarak temellendirmeden ezberlemesi, trigonometri öğrenimini olumsuz etkilemektedir (Gür, 2009; Marchi, 2012).

Özet olarak trigonometri ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, öğrencilerin var olan trigonometri bilgilerinin öğretim yöntemi ile ilişkili olduğu ve öğrencilerin trigonometri ile ilgili çeşitli kavram yanılgılarına sahip olduğu görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin trigonometri öğreniminde ezber bilgilere yer verilmesi nedeniyle trigonometri ile ilgili bilgilerini unuttukları, yanlış hatırladıkları ve yeni bilgiler oluşturmakta sorun yaşadıkları tespit edilmiştir.

2.3.2. Öğretmen ve Öğretmen Adaylarının Trigonometri Konusundaki Bilgilerini İnceleyen Çalışmalar

Mevcut araştırmalar, öğretmen ve öğretmen adaylarının da trigonometri ile ilgili yeterli anlayışa sahip olmadıklarını göstermektedir. Örneğin Fi (2003) çalışmasında,

matematik öğretmen adaylarının radyan ölçü birimini tanımlarken ve radyan ile derece açısı arasında ilişki kurarken sorun yaşadıklarını ve ters trigonometrik fonksiyonlar, periyodiklik gibi alanlarda yeterli anlayışa sahip olmadıklarını ortaya koymuştur. Keser (2017) ise matematik öğretmen adaylarının trigonometri konusundaki bilişsel yapılarının ortaya çıkarılması amacı ile yürüttüğü çalışmada, öğretmen adaylarından bazılarının anlamlı öğrenme yerine ezbere öğrenmeyi tercih ettiğini, bazı kavramları ve bu kavramlar arası ilişkileri iyi kavrayamadıklarını görmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının birim çemberde sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarına göre daha iyi ifade edilebildiği, bazı öğretmen adaylarının tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafik çiziminde sorunlar yaşadıkları ve bazı öğretmen adaylarının ise trigonometrik fonksiyonların işaretlerini incelerken şifrelemeler yaptıkları tespit edilmiştir (Keser, 2017).

Yiğit (2014a) çalışmasında, ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının bir dik üçgende açılar ve kenar uzunlukları arasındaki ilişkileri ve bunların trigonometrik oran yapılarıyla ilişkilerini araştırmıştır. Yiğit (2014a) önceki çalışmalarla tutarlı olarak, bu çalışmada öğretmen adaylarının açı kavramı ve açı ölçümü hakkında sınırlı bilgiye sahip olduğuna dair kanıtlar sunmuştur. Yiğit (2014a) çalışmasına benzer şekilde Yiğit-Koyunkaya (2016) çalışmasında matematik eğitiminde yüksek lisans yapan öğrencilerin de açılar ve açı ölçümü konusunda sınırlı bilgileri olduğunu tespit etmiştir. Altıkardeş ve Yiğit-Koyunkaya (2022) çalışmalarında ise öğretmen adaylarının birim çember ve trigonometrik oranlar konularında geometrik alışkanlıklarını kullanma konusunda yeterli düzeyde olmadıkları görülmüştür.

Özet olarak trigonometri ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, öğretmen ve öğretmen adaylarının trigonometri ile ilgili bilgilerinde eksiklikler olduğu, ezber bilgilere yer verdikleri dolayısı ile trigonometri konusunda yeterli anlayışa sahip olmadıkları görülmüştür.

2.3.3. Trigonometri Konusunu Öğrenme ve Öğretme Sürecinde Teknoloji Kullanımı

Alan yazında teknoloji destekli trigonometri öğretiminin öğrencilerin öğrenmesine etkisini inceleyen çalışmalara da rastlanmıştır (Ağaç, 2009; Blacket, 1990; Emlek, 2007; İnan, 2009; Kaleli-Yılmaz vd., 2010; Kemp & Kissane, 2009; Sevgi, 2020; Zengin, 2011). Blackett (1990) tarafından yapılan araştırmada, üçgenin kenarlarının uzunluklarını ölçen dinamik bilgisayar grafiklerinin, geleneksel yaklaşıma göre öğrencilerin trigonometriyi daha iyi anlamalarını sağladığı tespit edilmiştir. Kemp ve Kissane (2009) ise çalışmalarında öğretme ve öğrenmenin değişebileceğine dair birçok yol olduğu iddiasını göstermek amacıyla, öğrencilerin veya öğretmenlerin trigonometri öğretmek ve öğrenmek için erişebilecekleri mevcut teknolojilerden örnekler paylaşmıştır. Kemp ve Kissane (2009), teknolojinin

öğrencilerin kağıt kalem kullanmaya göre daha aktif olmasını sağladığını ve trigonometrik kavramlarla meşgul olmalarını sağladığını ifade etmiştir. Ayrıca sınıfta kullanılan teknolojiye göre durumlar değişse de en az gelişmiş teknoloji olan GHM'nin kullanımından bile çok fazla fayda sağlanacağını göstermiştir (Kemp & Kissane, 2009). Kemp ve Kissane'in (2009) söylemine uygun olarak Ağaç (2009) çalışmasında, lise öğrencilerinin matematik derslerinde trigonometri öğrenme alanında GHM kullanmalarının akademik başarıya ve problem çözme becerisine etkisi araştırmıştır. Yarı deneysel olan bu çalışmada 10. Sınıf öğrencilerinden oluşan deney ve kontrol grupları oluşturulduktan sonra deney grubunda GHM kullanılarak, kontrol grubunda GHM kullanılmadan ortaöğretim matematik programında yer alan trigonometri öğrenme alanı işlenerek çalışma yürütülmüştür. Çalışmanın verileri incelendiğinde trigonometri öğrenme alanında GHM kullanımının akademik başarıyı ve problem çözme becerisini arttırdığı sonuca ulaşılmıştır.

Moore (2009) çalışması ile öğrencilerin açı ölçüsü kavramlarını geliştirmeyi amaçlayan bir dersin hem tasarımı ve uygulamasında teknoloji destekli materyallerin yerini araştırmıştır. Bu amaçla Geometer Sketchpad uygulamalarını kullanmış ve dinamik görselleştirmenin trigonometri konularının daha iyi anlaşılmasına katkı sağladığı sonucuna varmıştır. Emlek (2007) ise çalışmasında, dinamik modelleme ile bilgisayar destekli trigonometri öğretiminin lise ve meslek yüksek okulu öğrencilerinin akademik başarılarına etkisi olup olmadığını incelemiştir. Emlek (2007) deneysel çalışmasında trigonometrinin temel kavramları deney grubuna dinamik modellerle, kontrol grubuna geleneksel yolla sunulmuştur. Çalışmanın sonunda dinamik modelleme ile bilgisayar destekli trigonometri öğretiminin öğrencilerin akademik başarılarının kontrol grubundan daha yüksek olduğu görülmüştür. Steckroth (2007) çalışmasında ise teknoloji destekli matematik öğretiminin öğrencilerin trigonometrideki radyan, esas ölçü ve birim çember kavramlarını anlamaları üzerindeki etkilerini tespit etmeyi amaçlamıştır. Çalışmanın sonucunda matematik öğretiminde teknolojinin uygun kullanımının öğrencilerin radyan, esas ölçü ve birim çember gibi önemli matematiksel kavramları anlamaları üzerinde olumlu bir etkiye sahip olabileceği görülmüştür.

Kaleli-Yılmaz ve diğerleri (2010) çalışmalarında, dinamik geometri yazılımı Cabri'nin 11.sınıf öğrencilerinin trigonometri konusundaki bilişsel öğrenmelerine etkisini saptamak amacıyla trigonometri özelindeki "trigonometrik fonksiyonların grafikleri, toplam fark formülleri, trigonometrik fonksiyonların değer aralığı" konularında, deney grubuna Cabri ile desteklenmiş bir eğitim, kontrol grubuna ise geleneksel yollarla bir eğitim verilmiştir. Çalışmanın verileri incelendiğinde ise Cabri yazılımının öğrencilerin farklı durumları

gözlemlemeleri ve genelleştirebilmelerine imkan sağlayarak trigonometri konusunda öğrencilerin kavram yanılgılarını giderdiği sonucuna ulaşılmıştır (Kaleli-Yılmaz vd., 2010). Zengin (2011) çalışmasında, 10. sınıf matematik dersinde trigonometri öğrenme alanı altında yer alan trigonometrik fonksiyonlar ve trigonometrik fonksiyonların grafikleri alt öğrenme alanlarının öğretiminde GeoGebra kullanımının öğrencilerin başarılarına ve tutumlarına etkisi olup olmadığını incelemiştir. Çalışmada deney ve kontrol grupları belirlendikten sonra kontrol grubunda yapılandırmacı öğrenme kuramı ile deney grubunda ise GeoGebra kullanılarak teknoloji destekli bir öğretim gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın sonucunda teknoloji destekli öğretimin uygulandığı sınıftaki öğrencilerin kontrol grubuna göre matematik başarılarının arttığı tespit edilmiştir. Zengin'e (2011) benzer şekilde Sevgi (2020) çalışmasında, "Trigonometrik Fonksiyonların Grafiklerini Yorumlama" konusunun dinamik yazılım GeoGebra ile tasarlanmış etkinlikler ile öğretiminin 11.sınıf öğrencilerinin akademik başarılarına ve bilgilerinin kalıcılığına etkisini araştırmıştır. Sevgi (2020), deney grubuna GeoGebra ile tasarlanmış etkinlikler ile kontrol grubunda MEB'in belirlediği programa uygun olarak öğretim gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın sonucunda teknoloji destekli gerçekleştirilen öğretimin öğrenci başarısını ve bilgilerin kalıcılığını arttırdığı görülmüştür (Sevgi, 2020).

Alan yazında teknolojinin öğretmen ve öğretmen adaylarının trigonometri bilgilerine etkisini inceleyen çalışmalara da rastlanmıştır. Örneğin Hertel ve Cullen (2011) çalışmalarında dinamik bir geometri ortamı kullanarak trigonometrik etkinliklerden oluşan bir öğretim dizisi geliştirerek bunun ortaöğretim öğretmen adaylarının trigonometrik fonksiyonları anlamaları üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Hertel ve Cullen'in (2011) geliştirdiği öğretim dizisinin, öğretmen adaylarının ön teste göre son testte trigonometrik fonksiyonlar hakkında akıl yürütmelerini geliştirerek zengin ve bağlantılı şemalar oluşturmalarını sağladığı görülmüştür. Bornstein (2020) ise çalışmasında matematik öğretmeni adaylarına teknoloji ile trigonometrik fonksiyonların dönüşümlerinin öğretimini incelemiştir. Çalışmada öğretmen adaylarının trigonometrik fonksiyon dönüşümlerinin özelliklerini ezberlemek yerine anlamalarına yardımcı olmak amacıyla TrigReps teknolojik aracı kullanılmıştır. Çalışmanın sonunda öğretmen adaylarının yedi öğrenme hedefinden en az beşini öğrendiği, çarpımsal dönüşümlerin ve toplamsal dönüşümlerin etkilerini anladıkları görülmüş ve trigonometrik fonksiyonların dönüşümlerini öğretmek için sorgulamayı ve yansıtmayı destekleyen sınıf etkinlikleriyle birlikte TrigReps kullanıldığında yararlı bir araç olabileceği sonucuna varılmıştır (Bornstein, 2020).

Karakuş (2019) ise çalışmasında trigonometri konusunda teknolojinin entegre edildiği ders imecesi yönteminin öğretmen adaylarının TPAB düzeylerinin gelişimlerine etkisini

araştırmıştır. Örneklemi lisans öğreniminin son dönemindeki 5 matematik öğretmen adayı olan nitel çalışmada müdahale öncesinde öğretmen adaylarının TPAB düzeyleri belirlenmiş ardından müdahale aşamasında teknoloji destekli ders imecesi uygulamaları yapılmıştır. Müdahale sonrasında çalışmanın verileri incelendiğinde ise öğretmen adaylarının öğretim programına ve konuya daha hakim oldukları, öğretimlerine teknolojiyi entegre ederek öğrenci merkezli öğretim gerçekleştirerek ders sürecini daha etkin yönettikleri dolayısı ile teknolojinin entegre edildiği ders imecesi döngülerinin trigonometri konusunda öğretmen adaylarının TPAB düzeylerini artırdığı görülmüştür (Karakuş, 2019).

Sonuç olarak alan yazında teknoloji ve trigonometri konulu çalışmalar incelendiğinde daha çok öğrencilerin trigonometri öğrenme sürecine odaklanıldığı görülmüş, öğretmen ya da öğretmen adayları ile ilgili az sayıda çalışmaya rastlanmıştır. Ancak trigonometri öğreniminin yanında öğretiminin de önemli olması sebebiyle geleceğin öğretmenlerinin trigonometri konusu özelinde var olan bilgilerinin araştırılması önem arz etmektedir. Ayrıca trigonometri konusu özelinde öğretmen adaylarının TPAB'larının incelendiği (Karakuş, 2019) sadece bir çalışma olduğu görülmüştür. Karakuş (2019) çalışmasında trigonometri konusunda belirli sayıda kazanıma odaklanarak, ders imecesi yönteminin öğretmen adaylarının TPAB'larının gelişimine olan etkisini, müdahalede bulunarak incelemiştir. Bu çalışmada Karakuş'un (2019) çalışmasından farklı olarak ise katılımcılara herhangi bir müdahalede bulunmadan, trigonometri konularını daha geniş bir şekide ele alarak lisansüstü öğrencilerin trigonometri konusunda TPAB'larının her bir bilgi türü açısından detaylı şekilde incelenmesi amaçlanmıştır. Öğrencilerin trigonometri konusunda yaşadıkları zorluklar göz önüne alındığında, bunu giderecek olan öğretmenlerin bilgilerinin ne düzeyde olduğunun incelenmesinin, bu konudaki eksikliklerinin belirlenmesinin ve giderilebilmesi açısından önemli olduğu düşünülmektedir. Bu doğrultuda bu çalışmada lisansüstü öğrencilerin trigonometri konusunda TPAB'larının incelenmesi amaçlanmıştır.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölüm içerisinde araştırmanın modeli, araştırma grubu, veri toplama araçları, veri toplama süreci ve veri analizi bölümlerine yer verilmektedir.

3.1. Araştırmanın Modeli / Deseni

Matematik öğretmenliği lisansüstü öğrencilerinin trigonometri konusunda (TPAB) incelendiği bu araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması deseni kullanılmıştır. Nitel araştırma, "gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama tekniklerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma" olarak tanımlanmaktadır (Yıldırım & Şimşek, 2008, s. 39). Nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması sınırlı bir sistemin derinlemesine betimlenmesi ve incelenmesini amaçlayan bir desendir (Chmiliar, 2010). Creswell'e (2007) göre durum çalışması ise; zaman içerisinde sınırlandırılmış bir veya birkaç durumun çeşitli veri toplama araçları (gözlemler, görüşmeler, görsel-işitseller, dokümanlar, raporlar) ile derinlemesine incelendiği, durumların ve duruma bağlı temaların tanımlandığı nitel bir araştırma yaklaşımıdır.

Durum çalışması ele aldığı durum ile ilgili nedenselliğe ilişkin bütüncül bakış açısının geliştirilmesini ve durumun sebep ve sonuç ilişkilerinin tespit edilmesini sağlar (Leylum vd., 2017). Durum çalışmasının gerçek ortamda birçok unsuru etkileşimi ile birlikte ele alıp resmetmesi sebebi ile de eğitim araştırmalarında kullanılabilirliği vardır (Leylum vd., 2017). Dolayısı ile Leylum ve diğerleri (2017) eğitimde çeşitli konuların, durum çalışmalarının yürütülmesi ile tanımlanıp ve açıklanabileceğini böylece elde edilen sonuçlar doğrultusunda eğitim araştırmacılarına, öğretmenlere ve yöneticilere öneriler verilebileceğini belirtmiştir. Durum çalışmasının özellikleri ve eğitim araştırmasındaki önemi göz önünde alınarak bu çalışmada, durum çalışması yöntemi kullanılarak benimsenen teorik çerçeve kapsamında, matematik öğretmenliği lisansüstü öğrencilerinin trigonometri konusundaki var olan TPAB bilgilerinin incelenmesi durumu ele alınmıştır.

Yapılan farklı araştırmalarda durum çalışmalarının çeşitlerine değinilmektedir. Yin'e (1984) göre durum çalışması 4 temel desen altında incelenebilir:

(1) Bütüncül tek durum deseni: Tek bir analiz biriminin olduğu, birim içindeki benzerlik ve farklılıkların araştırıldığı veya çok iyi formüle edilmiş bir teorinin test edilmesinde kullanılır;
(2) İç içe geçmiş tek durum deseni: Çoklu analiz birimlerinin yer aldığı tek bir durumun araştırılmasında kullanılır;
(3) Bütüncül çoklu durum deseni: Tek bir analiz biriminde birden fazla durumun olduğu ve her durumun kendi içinde bütüncül olarak ele alınıp karşılaştırılmasında kullanılır;
(4) İç içe geçmiş çoklu durum deseni: Çoklu analiz birimlerinin ve durumların yer aldığı ve her durumun kendi içinde alt birimlerinin olduğu çalışmalarda kullanılır.

Tek bir analiz birimi olan var olan durum çalışmalarında, benzer özelliklere sahip olan bir grup birim olarak kabul edilir ve süreçte meydana gelen benzerlikler ve farklılıklar araştırılarak durumun özellikleri detaylı şekilde açıklanabilir (Yin, 2018). Bu çalışmada da, matematik öğretmenliği lisansüstü öğrencileri bir birim olarak kabul edilmiş ve bu öğrencilerin trigonometri konusundaki var olan TPAB'larının incelenmesi durumu ele alınmıştır.

3.2. Katılımcılar

Çalışmanın katılımcıları 2020-2021 bahar döneminde bir devlet üniversitesindeki Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programında öğrenim gören 4 yüksek lisans öğrencisidir. Lisansüstü öğrencilerin seçilme sebebi ise lisans öğrenimlerini tamamlamış olmaları ve eğitimleri boyunca boyunca alan, pedagoji ve teknoloji ile ilgili tüm dersleri almış olmalarıdır. Ayrıca katılımcıların araştırma süresince gönüllü olmalarına dikkat edilmiş olup çalışma kapsamında yapılacak uygulamalar bu öğrencilerin teknoloji bilgiye sahip olmalarını gerektirdiğinden, çalışmanın katılımcı grubu seçilirken özellikle matematik eğitimi özelindeki teknolojik araçları kullanabilmeleri bir kriter olarak alınmıştır. Bu nedenle araştırmanın yapılacağı katılımcı grubu belirlenirken, derinlemesine araştırılması gereken durumlara dair detaylı bilgi veren amaçlı örnekleme kullanılmıştır (Yıldırım & Şimşek, 2008).

Çalışmada yer alan lisansüstü öğrencilere Ö1, Ö2, Ö3 ve Ö4 şeklinde kodlama yapılmıştır. Ö1, 24 yaşında ve matematik öğretmenliği programı yüksek lisans 1. Sınıf öğrencisidir. Ö1'in özel bir kurumda 1 senelik öğretmenlik tecrübesi bulunmaktadır. Ö1 lisans öğreniminde aldığı alan dersleri konusunda kendisini yeterli görmekte ve lisans öğrenimi boyunca trigonometri konusunda teknoloji destekli etkinlikler oluşturduğunu belirtmiştir.

Ayrıca Ö1 lisans eğitiminde farklı teknolojik araçları ve yazılımları kullanmayı öğrendiğini belirtmiştir. Bu araçların GeoGebra, Desmos, Sketchped olduğunu ayrıca az da olsa Cabri yazılımını kullanabildiğini söylemiştir. Lisans öğrenimi boyunca derslerde ve ödevlerde GeoGebra yazılımını çok fazla kullanması sebebiyle yazılıma genel olarak hakim olduğunu belirtmiştir.

Ö2, 23 yaşında ve matematik öğretmenliği programı yüksek lisans 1. Sınıf öğrencisidir. Ö2'nin herhangi bir öğretmenlik tecrübesi bulunmamaktadır. Ö2 lisans eğitiminde aldığı alan dersleri konusunda genel olarak kendisini yeterli görmemektedir. Bunun sebebi olarak Diferansiyel Denklemler, Cebir, Topoloji gibi derslerin vize ve final sınavlarını geçmeye yönelik çalıştığını belirtmiştir. Ö2, Geometri konusunda kendisini yeterli görmesine rağmen trigonometri konusunda kendisini yetersiz hissetmektedir. Bunun sebebinin ise konuya ilişkin hiç ders anlatmamış olması ve trigonometri konuları üzerinde fazla durmaması olduğunu belirtmiştir. Ayrıca Ö2 lisans eğitimi eğitiminde Desmos ve Cabri 3D dinamik matematik yazılımlarını yüzeysel olarak, GeoGebra yazılımını ise daha ayrıntılı olarak kullanmayı öğrendiğini söylemiştir. Buna ek olarak Ö2, lisans eğitimden mezun olduğundan beri dinamik matematik yazılımlarını kullanarak etkinlik geliştirmediğini ve yazılımları daha çok Geometri konularında kullanmasını eksiklik olarak gördüğünü söylemiştir. Bu nedenle matematik konularını yazılım üzerinde nasıl gösterebileceği konusunda kendisini geliştirmesi gerektiğini belirtmiştir.

Ö3, 26 yaşında ve matematik öğretmenliği programı yüksek lisans 1. Sınıf öğrencisidir. Ö3'ün özel bir kurumda 1 senelik öğretmenlik tecrübesi bulunmaktadır. Ö3, lisans eğitimi süresince aldığı alan dersler konusunda kendisini yeterli görmektedir. Trigonometri konuları özelinde ise konunun sorularını çözebildiğini ancak konuyu kavramsal olarak biraz daha iyi bilmesi gerektiğini ifade etmiştir. Ayrıca Ö3 lisans eğitiminde GeoGebra, Desmos ve Cabri yazılımlarını kullanmayı öğrendiğini bunlar arasından ise en rahat kullandığı yazılımın GeoGebra olduğunu belirtmiştir. Buna ek olarak Ö3, teknolojik yazılımları kullanma konusunda kendisini yetersiz görmediğini ancak yeterli olabilmesi için de kendisini geliştirmesi gerektiğini ifade etmiştir.

Ö4, 23 yaşında ve matematik öğretmenliği programı yüksek lisans 1. Sınıf öğrencisidir. Ö4 devlet okulunda çok kısa süreli olmak üzere öğretmenlik yapmıştır. Ö4, lisans eğitimi süresince aldığı alan dersleri konusunda kendisini yeterli görmemektedir. Bunun sebebinin ise lisans eğitimi süresince öğrendiklerinin kalıcılığını korumak için yeterli çalışmada bulunmaması olduğunu belirtmiştir. Ayrıca Ö4 lisans eğitiminde GeoGebra ve

Cabri yazılımlarını kullanmayı öğrendiğini belirtmiştir. Bu ek olarak Ö4, lisans eğitimi süresince teknolojiyi daha sık kullandığını, kendisini teknoloji kullanma konusunda yeterli bulduğunu ancak bunu geliştirmesi gerektiğini ifade etmiştir.

3.3. Veri Toplama Süreci ve Araçları

Çalışmanın başında matematik öğretmenliği lisansüstü öğrencilerinden trigonometri konusundaki alan bilgilerini ölçmek amaçlı hazırlanmış olan 15 soruya cevap vermeleri istenmiştir. Ardından lisansüstü öğrencilerinin trigonometri konusundaki TPAB düzeylerini incelemek için çevrimiçi bir ortamda klinik görüşmeler gerçekleştirilmiş ve görüşmeler kayıt altına alınmıştır. Klinik görüşmelerde öğrencilerden 11 soru ve alt sorularından oluşan TPAB sorularına GeoGebra yazılımını kullanarak cevap vermeleri istenmiş ve tüm süreç boyunca gözlem notları da alınmıştır. GeoGebra yazılımının tercih edilme sebebi ise tüm katılımcıların lisans öğrenimi süresince GeoGebra yazılımını kullanmayı öğrenmiş olması, yazılımın ücretsiz olması ve Türkçe dil seçeneğinin olmasıdır

3.3.1. Soruların Hazırlanma Süreci

Klinik görüşme soruları hazırlanırken, trigonometrik fonksiyonların temeli olan fonksiyon ve özellikleri, açı çeşitleri, birim çember ve trigonometrik fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonların işaretleri, sıralanması, trigonometrik özdeşlikler, trigonometrik fonksiyonların periyot ve grafikleri konuları özelinde lisansüstü öğrencilerin var olan TPAB'larını incelemeye yönelik soruların oluşturulması amaçlanmıştır. Bu kapsamda öncelikle ortaöğretim matematik dersi öğretim programlarında trigonometri ile ilişkili kazanımlar ve MEB (2018) tarafından önerilen matematik ders kitapları incelenerek trigonometri konularının nasıl ve hangi sırada ele alındığına dikkat edilmiştir. Ardından katılımcıların trigonometri konusunda TPAB düzeylerini belirlemek amacı ile TPAB kavramsal çerçevesi ele alınarak sorular hazırlanmıştır.

3.3.2. Uzman Görüşü

Klinik görüşme soruları hazırlandıktan sonra çalışmanın soruları matematik eğitimi alanında çalışan bir öğretim üyesi tarafından incelemiştir. Uzman görüşü alındıktan sonra lisansüstü öğrencilerin trigonometri konusunda alan bilgisi ölçmek amaçlı hazırlanmış sorulara trigonometri konusu özelinde çalışmaya katkısı olacağı düşünülen 2 soru eklenmiştir. Eklenen sorular "Trigonometride geçen derece, radyan, esas ölçü kavramlarını tanımlayınız. Örnek vererek açıklayınız." ve "Trigonometrik özdeşlikler nelerdir? Örnek veriniz." şeklindedir.

Ayrıca benzer konu özelinde sorular 4 soru açık ve anlaşılır olmaması sebebiyle düzenlenmiştir. Düzenlenen sorulardan birinin ilk hali "Birim çember çiziniz. $90^o < x < 180^o$ olacak şekilde bir x açısı alarak trigonometrik oranları gösteriniz. x açısının 1. bölgeye nasıl taşınacağını şekil üzerinden gösterip, açıklayınız." şeklindeydi. Son hali ise "Birim çember çiziniz. $90º < x < 180º$ olacak şekilde bir x açısı oluşturunuz. Bu açının bitiş kenarının çemberi kestiği nokta A(x,y) noktası olsun. A noktasının koordinatlarını trigonometrik oranlar cinsinden nasıl ifade edersiniz? Gösterip, açıklayınız." şeklindedir. Düzenlenen diğer sorular benzer şekilde olmak üzere sadece x açısının aralığı $0º < x < 90º$, $180º < x < 270º$ ve $270º < x < 360º$ olarak değiştirilmiştir.

Lisansüstü öğrencilerin trigonometri konusundaki TPAB düzeylerini incelemek amaçlı sorulan TPAB sorularına trigonometri konusu özelinde çalışmaya katkısı olacağı düşünülen 2 soru eklenmiştir. Eklenen sorular "GeoGebrayı kullanarak bir çember çiziniz. Çizdiğiniz çemberde derece, radyan, esas ölçü kavramlarını nasıl gösterirsiniz? Açıklayınız." ve "GeoGebrayı kullanarak trigonometrik özdeşliklerin öğretimi ile ilgili bir etkinlik oluşturunuz." şeklindedir. Bu sayede lisansüstü öğrencilerin var olan TPAB'larına ait daha fazla veri elde edilmesi sağlamıştır. Lisansüstü öğrencilerin TPAB'larını daha detaylı inceleyebilmek için alt sorular eklenmiştir.

3.3.3. Pilot Çalışma

Uzman görüşü alındıktan sonra (araştırmanın başlangıcından yaklaşık 4 ay önce), yapılacak çalışmanın şekillendirilebilmesi amacıyla pilot çalışma yapılmıştır. Pilot çalışma, katılımcılarla aynı Eğitim Bilimleri Enstitüsü'nde matematik öğretmenliği yüksek lisans programında öğrenim gören ve matematik eğitmi özelindeki teknolojik araçları kullanmayı bilen 1 öğrenci ile yürütülmüştür. Pilot çalışma, lisansüstü öğrencisi için uygun zaman belirlenerek gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışma her biri yaklaşık 1'er saat olmak üzere toplamda 5 oturumda gerçekleştirilmiştir. Bu oturumlar süresince yapılan görüşmeler video kaydına alınmıştır. Bu video kayıtları incelendikten sonra çalışmanın sorularda bazı değişikliklere ihtiyaç duyulmuştur. Bu değişikler aşağıda belirtilmiştir.

Pilot çalışma sonrası katılımcıların TPAB bilgilerine detaylı şekilde oluşmak için görüşmenin bazı TPAB sorularının alt soruları detaylandırılmıştır. Bu sorular GeoGebra yazılımı kullanılarak trigonometri konuları özelinde etkinlik geliştirme sorularıdır. Örnek olarak "Birim çemberi oluşturunuz. Birim çemberi kullanarak trigonometrik oranların öğretimi için bir etkinlik geliştiriniz." sorusunun var olan 10 alt sorusuna 2 alt soru daha eklenmiştir. Eklenen sorular "Etkinliği oluştururken dikkat ettiğiniz kısımlar neler oldu?" ve

“Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?” şeklindedir. Bu alt sorular trigonometrik fonksiyonların işaretleri, karşılaştırılması, trigonometrik özdeşlikler, trigonometrik fonksiyonların grafikleri ve periyotları konuları özelindeki etkinlik geliştirme sorularına da eklenerek klinik görüşme soruları revize edilmiştir.

Son hali verilen klinik görüşme soruları aşağıda sırasıyla verilmiştir. Çalışmada katılımcıların TPAB’larını incelemek amacıyla her bir bilgi türünü ölçmeye yönelik sorular sorulmuştur.

Alan Bilgisini Ölçmeye Yönelik Sorulan Sorular

Katılımcıların trigonometri konusunda AB’lerini ortaya çıkarmak amacıyla trigonometrik fonksiyonların temelinde fonksiyonlar konusu yer aldığı için ilk olarak aşağıdaki 2 soru sorulmuştur (Bknz. Tablo 1). Katılımcıların fonksiyonun formal tanımını yaparak fonksiyon çeşitlerini örnek vererek açıklayabilmeleri, özel olarak trigonometrik fonksiyonları tanımlayarak açıklayabilmeleri durumunda AB'leri yeterli düzeyde ele alınacaktır.

Tablo 1

AB Soru 1-2

1	Fonksiyon nedir? Örnek vererek açıklayınız.
2	Trigonometrik fonksiyon ne demektir? Örnek vererek açıklayınız.

Ardından katılımcıların trigonometri konusunun içerisinde yer alan açı çeşitlerine ait AB’lerini ortaya çıkarmak amacı ile aşağıda verilen 1 soru sorulmuştur (Bknz. Tablo 2). Bu soru ile katılımcıların derece, radyan, esas ölçü kavramlarına ait bilgilerinin ne düzeyde olduğu incelenmek istenmiştir. Katılımcıların trigonometride geçen açı çeşitlerini matematiksel olarak tanımlayabilmeleri ve örnek vererek açıklabilmeleri durumunda AB'leri yeterli düzeyde ele alınmıştır.

Tablo 2

AB Soru 3

3	Trigonometride geçen derece, radyan, esas ölçü kavramlarını tanımlayınız. Örnek vererek açıklayınız.

Katılımcıların birim çember ve trigonometrik fonksiyonlar konusuna ait AB'lerini ortaya çıkarmak amacı ile aşağıda verilen 1 soru sorulmuştur. Katılımcıların birim çember üzerinde bir x açısı olarak açının six, cosx, tanx, cotx trigonometrik oranlarını çizerek gösterebilmesi, bu değerlerin tanım ve görüntü kümelerini birim çember ile ilişkilendirerek açıklayabilmeleri durumunda AB'leri yeterli düzeyde ele alınmıştır.

Tablo 3

AB Soru 4

4	Bir birim çember çiziniz. $0^o < x < 90^o$ olacak şekilde bir x açısı alarak trigonometrik oranları ve tanım aralıklarını gösterip, açıklayınız.

Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların işaretleri konusuna ait AB'lerini ortaya çıkarmak amacı ile aşağıda verilen 1 soru sorulmuştur. Katılımcıların birim çember üzerinde koordinat düzeleminin farklı bölgelerinde x açısı oluşturarak açının six, cosx, tanx, cotx trigonometrik değerlerinin işaretlerini; trigonometrik oranların birim çember üzerindeki tanımlarını kullanarak her bir bölge için inceleyebilmeleri durumunda durumunda AB'leri yeterli düzeyde ele alınmıştır.

Tablo 4

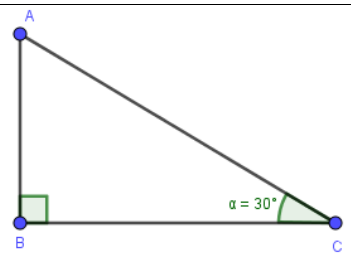
AB Soru 5

5	Birim çember çiziniz. $0^o < x < 90^o$, $90^o < x < 180^o$, $180^o < x < 270^o$, $270^o < x < 360^o$ olduğunda trigonometrik fonksiyonların işaretleri nasıldır? Gösterip, açıklayınız.

Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması konusuna ait AB'lerini ortaya çıkarmak amacı ile aşağıda verilen 6 soru sorulmuştur (Bknz. Tablo 5). Bu sorular ile ilk olarak katılımcıların verilen dik üçgendeki bir açının değiştirilmesi durumunda trigonometrik oranların değişimini dik üçgen üzerindeki tanımlarını kullanarak nasıl inceledikleri araştırılmıştır. Ardından katılımcıların trigonometrik oranların birim çember üzerindeki tanımlarını kullanarak trigonometrik oranları nasıl kıyasladıkları incelenmiştir. Katılımcıların dik üçgen ve birim çember üzerinde açının değiştirilmesi ile trigonometrik oranların değişimini; trigonometrik oranların tanımlarını kullanarak ve birbirleri ile ilişkilendirerek inceleyebilmeleri durumunda durumunda AB'leri yeterli düzeyde ele alınmıştır.

Tablo 5

AB Soru 6-11

6	 ABC dik üçgeninde α=30º açısı 35º olduğunda trigonometrik oranlar nasıl değişir? Açıklayınız.
7	Birim çember çiziniz. 0º < x < 90º olmak üzere x açısı artırıldığında trigonometrik oranlar nasıl değişir? Açıklayınız.
8	Birim çember çiziniz. 0º < x < 90º olacak şekilde bir x açısı oluşturunuz. Bu açının bitiş kenarının çemberi kestiği nokta A noktası olsun. A noktasının koordinatlarını trigonometrik oranlar cinsinden nasıl ifade edersiniz? Gösterip, açıklayınız.
9	Birim çember çiziniz. 90º < x < 180º olacak şekilde bir x açısı oluşturunuz. Bu açının bitiş kenarının çemberi kestiği nokta A noktası olsun. A noktasının koordinatlarını trigonometrik oranlar cinsinden nasıl ifade edersiniz? Gösterip, açıklayınız.
10	Birim çember çiziniz. 180º < x < 270º olacak şekilde bir x açısı oluşturunuz. Bu açının bitiş kenarının çemberi kestiği nokta A(x,y) noktası olsun. A noktasının koordinatlarını trigonometrik oranlar cinsinden nasıl ifade edersiniz? Gösterip, açıklayınız.
11	Birim çember çiziniz. 270º < x < 360º o olacak şekilde bir x açısı oluşturunuz. Bu açının bitiş kenarının çemberi kestiği nokta A noktası olsun. A noktasının koordinatlarını trigonometrik oranlar cinsinden nasıl ifade edersiniz? Gösterip, açıklayınız.

Katılımcıların trigonometrik özdeşlikler konusuna ait AB'lerini ortaya çıkarmak amacı ile aşağıda verilen 1 soru sorulmuştur (Bknz. Tablo 6). Katılımcıların trigonometrik özdeşliklere örnek verip özdeşlikleri açıklayabilmeleri durumunda AB'leri yeterli düzeyde ele alınmıştır.

Tablo 6

AB Soru 12

12	Trigonometrik özdeşlikler nelerdir? Örnek veriniz.

Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların periyot ve grafikleri konusuna ait AB'lerini ortaya çıkarmak amacı ile aşağıda verilen 3 soru sorulmuştur (Bknz. Tablo 7). Bu sorularda ilk olarak katılımcıların trigonometrik fonksiyonların periyodik olma durumunu örnek vererek nasıl açıkladıkları incelenmiş ve trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin oluşturulmasında periyodikliği ve fonksiyonun denkleminde geçen katsayıların grafiğe

etkisini nasıl ele aldıkları araştırılmıştır. Katılımcıların verdikleri örnek trigonometrik fonksiyonların periyot ve grafiklerini inceleyebilmeleri durumunda AB'leri yeterli düzeyde ele alınmıştır.

Tablo 7

AB Soru 13-15

13	Trigonometrik fonksiyonlarda periyodiklik ne demektir? Örnek vererek açıklayınız.
14	Bir trigonometrik fonksiyon belirleyiniz. Belirlediğiniz trigonometrik fonksiyonun grafiğini çizerken nasıl bir yol izlersiniz?
15	y=asin(bx+c)+k şeklindeki trigonometrik fonksiyonda a,b,c,k değişkenleri ne ifade etmektedir? Açıklayınız.

Diğer Bilgi Türlerini Ölçmeye Yönelik Sorulan Sorular

Katılımcıların TPAB'larını ortaya çıkarmak amacı ile hazırlanan sorular aşağıda verilmiştir. İlk olarak katılımcıların trigonometrinin içerisinde yer alan açı çeşitlerine ait TAB'larını belirlemek amacıyla aşağıdaki 1 soru sorulmuştur. Katılımcıların derece, radyan, esas ölçü kavramlarına ait var olan AB'lerini, GeoGebra yazılımını kullanarak sunabilmeleri durumunda TAB'ları yeterli düzeyde ele alınmıştır.

Tablo 8

TPAB Soru 1

1	GeoGebrayı kullanarak bir çember çiziniz. Çizdiğiniz çemberde derece, radyan, esas ölçü kavramlarını nasıl gösterirsiniz? Açıklayınız.

Katılımcıların dik üçgen ve trigonometri konularına ait TPAB'larını ortaya çıkarmak amacıyla aşağıda verilen alt sorulardan oluşan 2 soru sorulmuştur (Bknz. Tablo 9). 2-a, 2-b, 2-c, 3-a, 3-b alt soruları GeoGebra yazılımının kullanımına yönelik sorular sorularak katılımcıların AB, TB ve TAB bilgi türlerine ait detaylı bilgi elde etmek amaçlanmıştır. 3-c, 3-d, 3-e, 3-f, 3-g, 3-h alt soruları ile öğretime yönelik sorular sorularak katılımcıların TPAB'larına ait bilgilere ulaşılmaya çalışılmıştır. 3-i, 3-j alt soruları ile de teknoloji ve pedagojiye yönelik sorular sorularak katılımcıların TPB'lerine bakılmıştır. Katılımcıların GeoGebra yazılımının araç çubuklarını kullanabilmeleri durumunda TB'leri; dik üçgen ve trigonometri konusunda var olan AB'lerini ve GeoGebra yazılımını kullanarak dik üçgen ve trigonometrik oranlarla ilgili matematiksel bilgileri sunmaları durumunda TAB'ları;

GeoGebra yazılımının dik üçgen ve trigonometri konusunun öğrenimini nasıl etkileyeceğini bilmeleri durumunda TPB'leri; TAB ile pedagojik teknikleri kullanarak dik üçgen ve trigonometri konusunun nasıl öğretileceğini planlayabilmeleri durumunda TPAB'ları yeterli düzeyde ele alınmıştır.

Tablo 9

TPAB Soru 2-3

2	GeoGebrayı kullanarak bir dik üçgen çiziniz. Çizdiğiniz üçgenin kenar uzunluklarını ve açılarını ölçünüz. a. Dik üçgenin bir iç açısını değiştiriniz. Açıyı değiştirdiğinizde kenar uzunlukları nasıl değişti? Gösterip açıklayınız. b. Açıyı değiştirdiğinizde başka neler değişti? c. Dik üçgenin kenar uzunluklarını değiştiriniz. Kenar uzunluklarını değiştirdiğinizde neler değişti? Gösterip açıklayınız.
3	Çizdiğiniz dik üçgende herhangi bir açının trigonometrik oranlarını GeoGebrayı kullanarak nasıl hesaplarsınız? a. Açıyı değiştirdiğinizde trigonometrik oranlar nasıl değişir? Gösterip açıklayınız. b. Kenar uzunlukları değiştirdiğinizde trigonometrik oranlar nasıl değişir? Gösterip açıklayınız. c. Çizdiğiniz dik üçgeni kullanarak trigonometrik oranların öğretimini nasıl yaparsınız? Açıklayınız. d. Trigonometrik oranlar konusunda öğrencilerin zorlanacağını düşündüğünüz yerler var mı? Varsa nelerdir? e. Öğrencilerin zorlanacağını düşündüğünüz kısımlar için ne yapmayı planlıyorsunuz? f. Bu kısımlar için öğrencilere hangi soruları sormayı düşünürsünüz? g. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir? h. GeoGebrayı kullanarak trigonometrik oranların öğretimini başka bir şekilde yapabilir misiniz? Çalışmalarınızı gösterip açıklayınız. i. Bu öğretimin beyaz tahta ile yapılan öğretimden farkı nedir? j. Sizce GeoGebrayı kullanarak trigonometrik oranları öğretmenin ne gibi bir faydası olabilir?

Katılımcıların birim çember ve trigonometri konusundaki TPAB'larını belirlemek amacıyla aşağıdaki sorular sorulmuştur (Bknz. Tablo 10). Yukarıda verilen alt sorulara benzer şekilde trigonometrinin konuları özelinde benzer alt sorular sorularak AB, PB, TB, PAB, TAB, TPB ve TPAB bilgi türlerine ait detaylı bilgiye ulaşılmaya çalışılmıştır. Katılımcıların GeoGebra yazılımının araç çubuklarını kullanabilmeleri durumunda TB'leri; birim çember ve trigonometri konusunda var olan AB'lerini ve GeoGebra yazılımını kullanarak birim çember

ve trigonometrik oranlarla ilgili matematiksel bilgileri sunmaları durumunda TAB'ları; GeoGebra yazılımının birim çember ve trigonometri konusunun öğrenimini nasıl etkileyeceğini bilmeleri durumunda TPB'leri; TAB ile pedagojik teknikleri kullanarak birim çember ve trigonometri konusunun nasıl öğretileceğini planlayabilmeleri durumunda TPAB'ları yeterli düzeyde ele alınmıştır.

Tablo 10

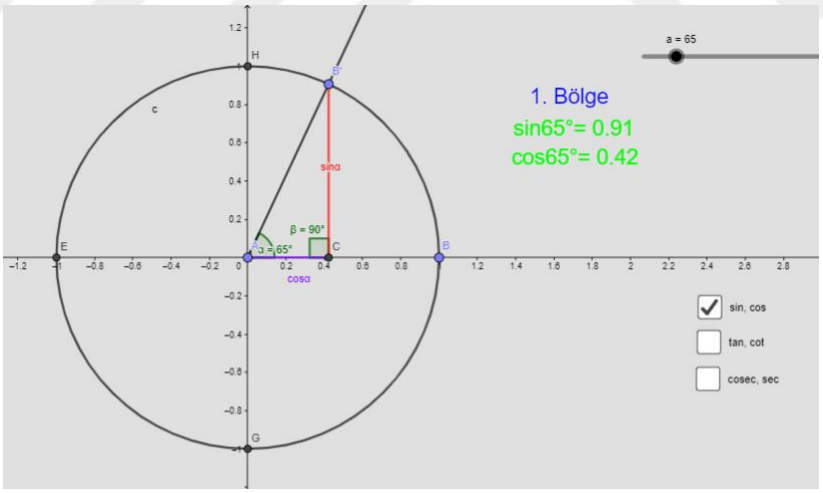
TPAB Soru 4

4	Birim çemberi oluşturunuz. Birim çemberi kullanarak trigonometrik oranların öğretimi için bir etkinlik geliştiriniz. a. Etkinliği oluştururken zorlandığınız yerler oldu mu? b. Etkinliği oluştururken dikkat ettiğiniz kısımlar neler oldu? c. Neden böyle bir etkinlik oluşturmayı seçtiniz? d. Bu etkinlikle daha önce karşılaşmış mıydınız? e. Hazırladığınız bu etkinliği derslerinizde kullanır mısınız? Neden? Açıklayınız. f. Bu etkinliği derslerinizde nasıl kullanmayı düşünüyorsunuz? Açıklayınız. g. Birim çember konusunda öğrencilerin zorlandığını düşündüğünüz kısımlar var mı? Varsa nelerdir? h. Öğrencilerin zorlanacağını düşündüğünüz kısımlar için ne yapmayı planlıyorsunuz? i. Bu kısımlar için öğrencilere hangi soruları sormayı düşünürsünüz j. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir? k. Oluşturduğunuz bu etkinliğin sizce kağıt kalem kullanmaktan farkı nedir? l. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?

Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların işaretleri konusundaki TPAB'larını belirlemek amacıyla aşağıdaki sorular sorulmuştur (Bknz. Tablo 11). Katılımcıların GeoGebra yazılımının araç çubuklarını kullanabilmeleri durumunda TB'leri; trigonometrik fonksiyonların işaretleri konusunda var olan AB'lerini ve GeoGebra yazılımını kullanarak trigonometrik fonksiyonların işaretleri ile ilgili matematiksel bilgileri sunmaları durumunda TAB'ları; GeoGebra yazılımının trigonometrik fonksiyonların işaretlerinin öğrenimini nasıl etkileyeceğini bilmeleri durumunda TPB'leri; TAB ile pedagojik teknikleri kullanarak trigonometrik fonksiyonların işaretleri konusunun nasıl öğretileceğini planlayabilmeleri durumunda TPAB'ları yeterli düzeyde ele alınmıştır.

Tablo 11

TPAB Soru 5-6

5	GeoGebrayı kullanarak trigonometrik oranların pozitif ve negatif olma durumları ile ilgili bir etkinlik oluşturunuz. a. Etkinliği oluştururken zorlandığınız yerler oldu mu? b. Etkinliği oluştururken dikkat ettiğiniz kısımlar neler oldu? c. Neden böyle bir etkinlik oluşturmayı seçtiniz? d. Bu etkinlikle daha önce karşılaşmış mıydınız? e. Hazırladığınız bu etkinliği derslerinizde kullanır mısınız? Neden? Açıklayınız. f. Bu etkinliği derslerinizde nasıl kullanmayı düşünüyorsunuz? Açıklayınız. g. Birim çember konusunda öğrencilerin zorlandığını düşündüğünüz kısımlar var mı? Varsa nelerdir? h. Öğrencilerin zorlanacağını düşündüğünüz kısımlar için ne yapmayı planlıyorsunuz? i. Bu kısımlar için öğrencilere hangi soruları sormayı düşünürsünüz? j. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir? k. Oluşturduğunuz bu etkinliğin sizce kağıt kalem kullanmaktan farkı nedir? l. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?
6	Etkinlik 1'i açınız. Sürgüyü kullanarak $0^o < x < 90^o$ olacak şekilde bir x açısı oluşturunuz.  a. Oluşturduğunuz açıya göre trigonometrik oranların işaretleri nasıldır? Gösterip, açıklayınız. b. Açıyı $90^o < x < 180^o$ olacak şekilde değiştiriniz. Bu bölgede trigonometrik oranların işaretleri nasıldır? Gösterip, açıklayınız. c. Açıyı $180^o < x < 270^o$ olacak şekilde değiştiriniz. Bu bölgede trigonometrik oranların işaretleri nasıldır? Gösterip, açıklayınız. d. Açıyı $270^o < x < 360^o$ olacak şekilde değiştiriniz. Bu bölgede trigonometrik oranların işaretleri nasıldır? Gösterip, açıklayınız. e. Bu etkinliği derslerinizde kullanır mıydınız? Neden? Açıklayınız.

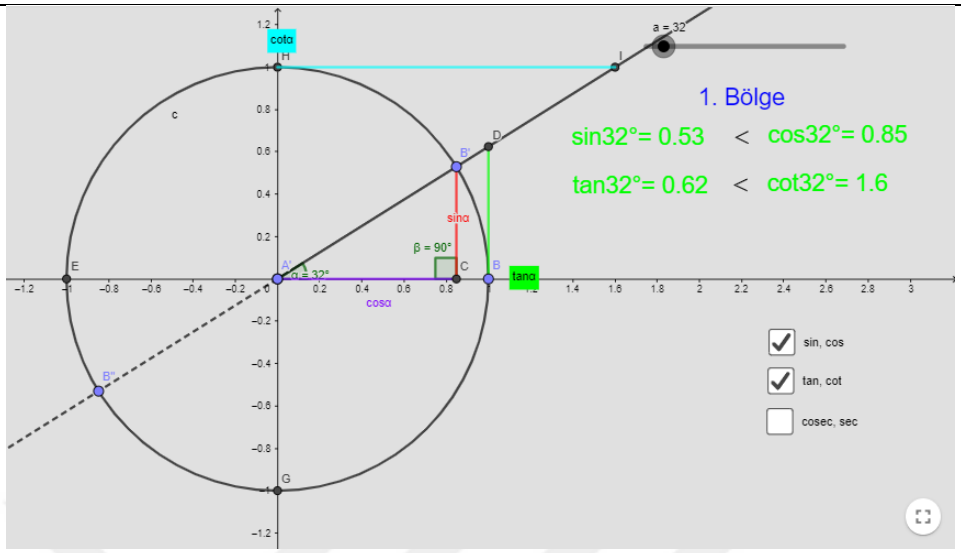
	f. Bu etkinliği derslerinizde kullanırken öğrencilere farklı olarak hangi soruları sormayı düşünürsünüz? g. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir? h. Bu etkinliğin kağıt kalem kullanmaktan farkı nedir? i. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?

Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması konusunda TPAB'larını belirlemek amacıyla aşağıdaki sorular sorulmuştur (Bknz. Tablo 12). Katılımcıların GeoGebra yazılımının araç çubuklarını kullanabilmeleri durumunda TB'leri; trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması konusunda var olan AB'lerini ve GeoGebra yazılımını kullanarak trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması ile ilgili matematiksel bilgileri sunmaları durumunda TAB'ları; GeoGebra yazılımının trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılmasının öğrenimini nasıl etkileyeceğini bilmeleri durumunda TPB'leri; TAB ile pedagojik teknikleri kullanarak trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması konusunun nasıl öğretileceğini planlayabilmeleri durumunda TPAB'ları yeterli düzeyde ele alınmıştır.

Tablo 12

TPAB Soru 7-8

7	GeoGebrayı kullanarak trigonometrik oranların kıyaslanması ile ilgili bir etkinlik oluşturunuz. a. Etkinliği oluştururken zorlandığınız yerler oldu mu? b. Etkinliği oluştururken dikkat ettiğiniz kısımlar neler oldu? c. Neden böyle bir etkinlik oluşturmayı seçtiniz? d. Bu etkinlikle daha önce karşılaşmış mıydınız? e. Hazırladığınız bu etkinliği derslerinizde kullanır mısınız? Neden? Açıklayınız. f. Bu etkinliği derslerinizde nasıl kullanmayı düşünüyorsunuz? Açıklayınız. g. Birim çember konusunda öğrencilerin zorlandığını düşündüğünüz kısımlar var mı? Varsa nelerdir? h. Öğrencilerin zorlanacağını düşündüğünüz kısımlar için ne yapmayı planlıyorsunuz? i. Bu kısımlar için öğrencilere hangi soruları sormayı düşünürsünüz j. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir? k. Oluşturduğunuz bu etkinliğin sizce kağıt kalem kullanmaktan farkı nedir? l. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?
8	Etkinlik 2'yi açınız. Sürgüyü kullanarak $0^o < x < 90^o$ olacak şekilde bir x açısı oluşturunuz.



a. Oluşturduğunuz açıya göre trigonometrik oranları GeoGebrayı kullanarak kıyaslayıp açıklayınız.
b. Açıyı artırdığınızda trigonometrik oranlar nasıl değişir? Gösterip açıklayınız.
c. Açıyı azalttığınızda trigonometrik oranlar nasıl değişir? Gösterip açıklayınız.
d. Kosinüs fonksiyonunun sinüs fonksiyonundan büyük değerler aldığı açılar nelerdir? Gösterip açıklayınız.
e. Sinüs fonksiyonunun kosinüs fonksiyonundan büyük değerler aldığı açılar nelerdir? Gösterip açıklayınız.
f. Tanjant fonksiyonunun kotanjant fonksiyonundan büyük değerler aldığı açılar nelerdir? Gösterip açıklayınız.
g. Kotanjant fonksiyonunun tanjant fonksiyonundan büyük değerler aldığı açılar nelerdir? Gösterip açıklayınız.
h. Etkinliği kullanarak sinüs fonksiyonu ile tanjant fonksiyonunu, kosinüs fonksiyonu ile kotanjant fonksiyonunu kıyaslayınız. Gösterip açıklayınız.
i. Bu etkinliği derslerinizde kullanır mıydınız? Neden? Açıklayınız.
j. Bu etkinliği derslerinizde nasıl kullanmayı düşünüyorsunuz. Açıklayınız.
k. Bu etkinliği derslerinizde kullanırken öğrencilere farklı olarak hangi soruları sormayı düşünürsünüz?
l. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir?
m. Bu etkinliğin kalem kağıt kullanmaktan farkı nedir?
n. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?

Katılımcıların trigonometrik özdeşlikler konusundaki TPAB'larını belirlemek amacıyla aşağıdaki sorular sorulmuştur (Bknz. Tablo 13). Katılımcıların GeoGebra yazılımının araç çubuklarını kullanabilmeleri TB'lerinin; trigonometrik özdeşlikler konusunda var olan AB'lerini ve GeoGebra yazılımını kullanarak trigonometrik özdeşlikler ile ilgili matematiksel bilgileri sunmaları durumunda TAB'ları; GeoGebra yazılımının trigonometrik özdeşlikler öğrenimini nasıl etkileyeceğini bilmeleri durumunda TPB'leri; TAB ile pedagojik

teknikleri kullanarak trigonometrik özdeşlikler konusunun nasıl öğretileceğini planlayabilmeleri durumunda TPAB'ları yeterli düzeyde ele alınmıştır.

Tablo 13

TPAB Soru 9

9	GeoGebrayı kullanarak trigonometrik özdeşliklerin öğretimi ile ilgili bir etkinlik oluşturunuz. a. Etkinliği oluştururken zorlandığınız yerler oldu mu? b. Etkinliği oluştururken dikkat ettiğiniz kısımlar neler oldu? c. Neden böyle bir etkinlik oluşturmayı seçtiniz? d. Bu etkinlikle daha önce karşılaşmış mıydınız? e. Hazırladığınız bu etkinliği derslerinizde kullanır mısınız? Neden? Açıklayınız. f. Bu etkinliği derslerinizde nasıl kullanmayı düşünüyorsunuz? Açıklayınız. g. Birim çember konusunda öğrencilerin zorlandığını düşündüğünüz kısımlar var mı? Varsa nelerdir? h. Öğrencilerin zorlanacağını düşündüğünüz kısımlar için ne yapmayı planlıyorsunuz? i. Bu kısımlar için öğrencilere hangi soruları sormayı düşünürsünüz j. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir? k. Oluşturduğunuz bu etkinliğin sizce kağıt kalem kullanmaktan farkı nedir? l. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?

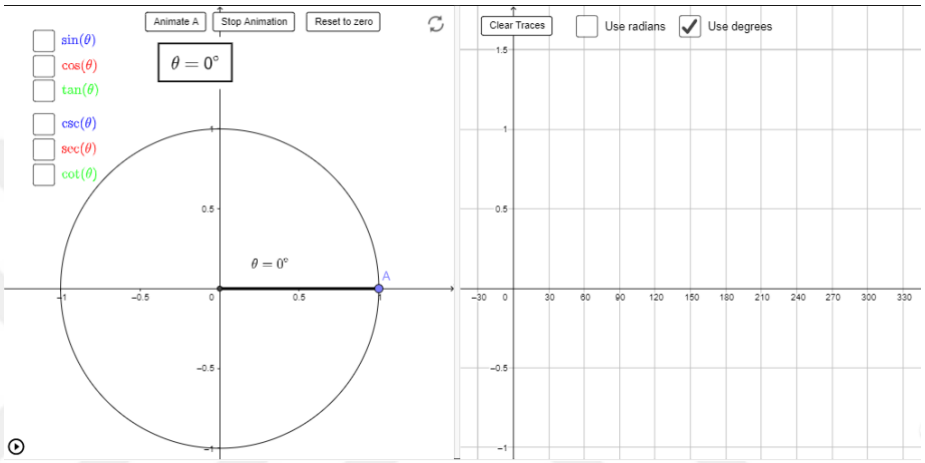
Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların periyot ve grafikleri konusundaki TPAB'larını belirlemek amacıyla aşağıdaki sorular sorulmuştur (Bknz. Tablo 14). Katılımcıların GeoGebra yazılımının araç çubuklarını kullanabilmeleri durumunda TB'leri; trigonometrik fonksiyonların periyot ve grafikleri konusunda var olan AB'lerini ve GeoGebra yazılımını kullanarak trigonometrik fonksiyonların periyot ve grafikleri ile ilgili matematiksel bilgileri sunmaları durumunda TAB'ları; GeoGebra yazılımının trigonometrik fonksiyonların periyot ve grafiklerinin öğrenimini nasıl etkileyeceğini bilmeleri durumunda TPB'leri; TAB ile pedagojik teknikleri kullanarak trigonometrik fonksiyonların periyot ve grafikleri konusunun nasıl öğretileceğini planlayabilmeleri durumunda TPAB'ları yeterli düzeyde ele alınmıştır.

Tablo 14

TPAB Soru 10-11

10	Geograbrayı kullanarak aşağıdaki adımları uygulayınız.

		a. Sinüs fonksiyonunun grafiğini çiziniz. b. Çizdiğiniz fonksiyonun tanım ve değer kümeleri nelerdir? c. Periyodu nedir? a. Kosinüs fonksiyonunun grafiğini çiziniz. b. Çizdiğiniz fonksiyonun tanım ve değer kümeleri nelerdir? c. Periyodu nedir? a. Tanjant fonksiyonunun grafiğini çiziniz. b. Çizdiğiniz fonksiyonun tanım ve değer kümeleri nelerdir? c. Periyodu nedir? a. Kotanjant fonksiyonunun grafiğini çiziniz. b. Çizdiğiniz fonksiyonun tanım ve değer kümeleri nelerdir? c. Periyodu nedir?
	10.1	GeoGebrayı kullanarak trigonometrik fonksiyonların grafikleri ile ilgili bir etkinlik geliştiriniz. a. Etkinliği oluştururken zorlandığınız yerler oldu mu? b. Etkinliği oluştururken dikkat ettiğiniz kısımlar neler oldu? c. Neden böyle bir etkinlik oluşturmayı seçtiniz? d. Bu etkinlikle daha önce karşılaşmış mıydınız? e. Hazırladığınız bu etkinliği derslerinizde kullanır mısınız? Neden? Açıklayınız. f. Bu etkinliği derslerinizde nasıl kullanmayı düşünüyorsunuz? Açıklayınız.Birim çember konusunda öğrencilerin zorlandığını düşündüğünüz kısımlar var mı? Varsa nelerdir? g. Öğrencilerin zorlanacağını düşündüğünüz kısımlar için ne yapmayı planlıyorsunuz? h. Bu kısımlar için öğrencilere hangi soruları sormayı düşünürsünüz i. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir? j. Oluşturduğunuz bu etkinliğin sizce kağıt kalem kullanmaktan farkı nedir? k. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?
	10.2	GeoGebrayı kullanarak trigonometrik fonksiyonların periyotlarını öğretebileceğiniz bir etkinlik geliştiriniz. a. Etkinliği oluştururken zorlandığınız yerler oldu mu? b. Etkinliği oluştururken dikkat ettiğiniz kısımlar neler oldu? c. Neden böyle bir etkinlik oluşturmayı seçtiniz? d. Bu etkinlikle daha önce karşılaşmış mıydınız? e. Hazırladığınız bu etkinliği derslerinizde kullanır mısınız? Neden? Açıklayınız. f. Bu etkinliği derslerinizde nasıl kullanmayı düşünüyorsunuz? Açıklayınız.Birim çember konusunda öğrencilerin zorlandığını düşündüğünüz kısımlar var mı? Varsa nelerdir?

		g. Öğrencilerin zorlanacağını düşündüğünüz kısımlar için ne yapmayı planlıyorsunuz? h. Bu kısımlar için öğrencilere hangi soruları sormayı düşünürsünüz i. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir? j. Oluşturduğunuz bu etkinliğin sizce kağıt kalem kullanmaktan farkı nedir? k. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?
11	Aşağıdaki soruları etkinliği kullanarak cevaplayınız.  a. Trigonometrik fonksiyonların grafiklerini etkinlik yardımı ile çizdirip, inceleyin. b. Bu etkinliği derslerinizde kullanır mıydınız? Neden? Açıklayınız. c. Bu etkinliği derslerinizde nasıl kullanmayı düşünüyorsunuz? Açıklayınız. d. Bu etkinliği derslerinizde kullanırken öğrencilere farklı olarak hangi soruları sormayı düşünürsünüz? e. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir? f. Bu etkinliğin kağıt kalem kullanmaktan farkı nedir? g. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?

3.3.4. Veri Toplama Süreci

Lisansüstü öğrencilerinin trigonometri konusundaki alan bilgilerini ölçmek amaçlı hazırlanan sorulara cevapları alındıktan sonra klinik görüşmelere geçilmiştir. Her bir lisansüstü öğrencisinin müsait olma zamanına göre her bir oturumu 30 dk ile 90 dk arasında süren görüşmeler yapılmıştır. Tüm oturumların ilk yarısında katılımcıların trigonometri konuları özelinde alan bilgilerini belirlemek diğer oturumlarda ise katılımcıların TPAB'larını belirlemek amaçlanmıştır. Klinik görüşmeler Covid-19 Pandemisi nedeniyle çevrimiçi ortamda online olarak gerçekleştirilmiş ve kayıt altına alınmıştır. Klinik görüşme sorularının her biri ayrı sayfalarda olacak şekilde katılımcılara verilmiştir (Bknz. EK-1). Bu sorular

katılımcılarla görüşme esnasında sırasıyla ekrana yansıtılmıştır. Katılımcılara, sorulan soruları cevaplandırmaları için yeterli süre verilmiştir.

Katılımcılardan GeoGebrayı ve çalışma kağıtlarını kullanarak bu sorulara yanıtlar vermeleri istenmiştir. Katılımcı Ö1 ve Ö3 görüşmelerin online olması sebebiyle diğer katılımcılardan farklı olarak kendsi kişisel Grafik tabletlerini kullanarak sorulara cevap vermişlerdir. Katılımcılardan Ö1 ile 6, Ö2 ile 7, Ö3 ile 9 ve Ö4 ile 5 oturum olacak şekilde toplamda 27 oturumda görüşmeler tamamlanmıştır. Her bir oturumun ne kadar sürdüğü Tablo 15'de verilmektedir. Bu sürelerin toplamı kadar video kayıtları çalışmanın bir veri grubunu oluşturmaktadır.

Tablo 15

Çalışmadaki oturumlar ve süreleri

Katılımcılar	**Ö1**	**Ö2**	**Ö3**	**Ö4**
1.OTURUM	75 dk	65 dk	86 dk	77 dk
2.OTURUM	60 dk	67 dk	70 dk	88 dk
3.OTURUM	69 dk	64 dk	67 dk	32 dk
4.OTURUM	40 dk	45 dk	80 dk	42 dk
5.OTURUM	68 dk	32 dk	49 dk	50 dk
6.OTURUM	46 dk	51 dk	70 dk	-
7.OTURUM	-	49 dk	88 dk	-
8.OTURUM	-	-	75 dk	-

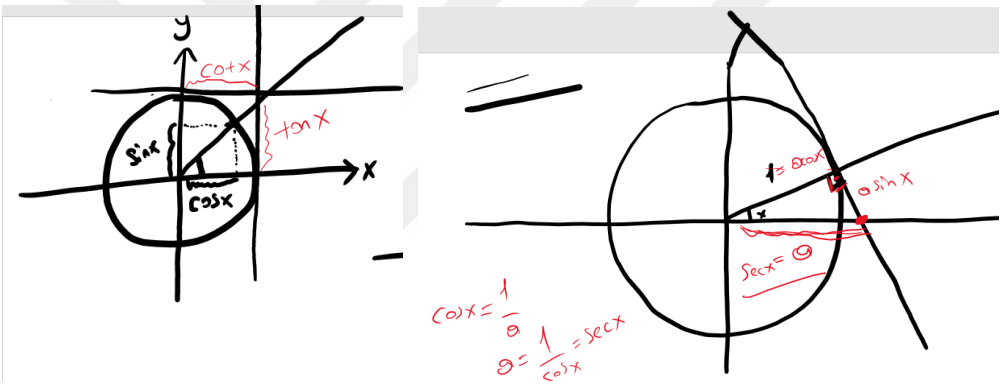
3.4. Verilerin Analizi

Verilerin analizi kısmında ise klinik görüşmelerin video kayıtları transkript edilmiş ardından transkript edilen metinler ile katılımcıların çalışma kağıtları içerik analizine tabi tutulmuştur. İçerik analizi, birbirine benzeyen verileri belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirerek ve bunları okuyucunun anlayabileceği bir biçimde organize ederek yorumlama tekniğidir (Yıldırım & Şimşek, 2008). İçerik analizi ile katılımcıların TPAB'larına yönelik kanıt sundukları cümleler detaylı incelenmiştir. Gözlem notları ise öğrencilerin çalışma kağıtlarını ve yapılan klinik görüşmeleri desteklemek amacıyla kullanılmıştır.

Katılımcıların sorulara verdikleri yanıtlar analiz edilirken renkli kodlamalar yapılmıştır. Bu süreçte, AB sarı renk, PB ve PAB gri renk, TB yeşil renk, TAB mavi renk, TPB pembe renk ve TPAB kırmızı renk ile gösterilmiştir. Aşağıda katılımcı Ö1'in AB 4. Soru olan "Bir birim çember çiziniz. $0^o < x < 90^o$ olacak şekilde bir x açısı alarak trigonometrik

oranları ve tanım aralıklarını gösterip, açıklayınız.” sorusu ile TPAB 4. Soru olan “Birim çemberi oluşturunuz. Birim çemberi kullanarak trigonometrik oranların öğretimi için bir etkinlik geliştiriniz.” sorusuna verdiği cevaplar üzerinden veri analizinin nasıl yapıldığı gösterilmiştir.

Şekil 2 ve Şekil 3’de verilen veri analizi örneği ile metnine bakıldığında Ö1 birim çember üzerinde sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarını çizerek tanımlamış ayrıca secant ve kosekant fonksiyonlarını da üçgende benzerlik özelliklerini kullanarak göstermiştir. Ö1’in trigonometrik fonksiyonların birim çember üzerinde tanımlanmasına dair bu bilgileri; Mishra ve Koehler’in (2006) AB tanımında ifade ettiği gibi öğretmenin öğreteceği konu ile ilgili bilgisi olması nedeniyle AB olarak kodlanmıştır. Ö1’in AB’sine örnek olan cevapları Şekil 3’te gösterildiği gibi sarı renk ile işaretlenmiştir.



Şekil 2. Veri analizi örneği-1

T: Bir birim çember çiziniz. 0°< x< 90° olacak şekilde bir x açısı alarak trigonometrik oranları ve tanım aralıklarını gösterip, açıklayınız.

Ö1: Tabi şöyle yapalım o zaman, birim çemberi çizdim eksenleri belirttim. 0|ila 90° arasında bir açı aldım. Mesela şöyle 45'e yakın bir şey olsun bunu sayı olarak vermiyorum. Şuradan bu doğru bu ışının çemberi kestiği noktadan x eksenine olan izdüşümünün uzunluğu bana cosx'i ifade ediyor. Aynı şekilde y eksenine yaptığımız izdüşümü, şu doğru parçası, bana sinx'i ifade ediyor. Şu kısım bana tanx'i söylüyor. Şu kısımda şöyle farklı renkle yapayım. Buradaki uzunlukta bana cotx'i belirtiyor.

Ö1: Secant, cosecantı göstermemi ister misin? Ezberimde yok ama göstermeye çalışayım. Şimdi secant ve cosecant yazalım. $cosecx = \frac{1}{sinx}$ oluyordu. Şimdi şöyle düşünelim... Bir tane doğru ışını çektim yine. Şöyle bir şey çeksek diyeceğim ama çok ezbere olacak. Şu kısmın cosinüs olduğunu biliyorum. Burası dik oluyor bana $\frac{1}{sinx}$ lazım. Şuranın 1 olduğunu biliyorum yani şuan gelmeyecek gibi biraz fazla uğraşacağım. Yani getiririm de uğraşmam gerekiyor. Süremiz varsa uğraşayım.

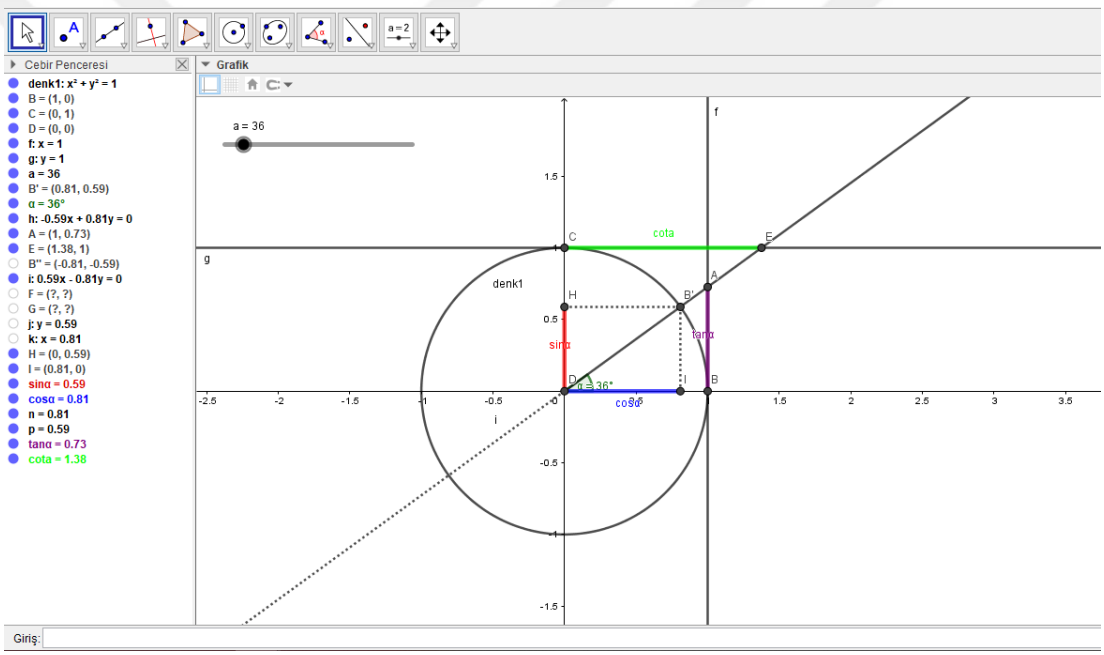
T: Evet vaktimiz var devam edebilirsin.

Ö1: Benzerlik yapmaya çalışacağım. Mesela şöyle bir teğet çektiğimizi düşünelim. Burası x derece burası 1 birim. Orada bir dikliğimiz var. Şimdi x'in komşu kenarı bir birim ise eğer buraya ben mesela a diyeyim o zaman bu aslında a=cosx olur. Dolayısıyla $cosx = \frac{1}{a}$ 'ya eşit olur. Yine aynı şekilde burası da a.sinx olur. Eğer $cosx = \frac{1}{a}$ ise a nedir $\frac{1}{cosx} = secx$. Yani dedim ki benim çemberimin yarıçapı bir birim. Öncelikli şu parçanın bir birim olduğunu belirttim sonra eğer burası x açısıysa ben buraya a birim uzunluğundadır derim bu çizdiğim dik üçgende. Eğer burası a birim burası x derece ise o 1'in karşılığı a=cosx olduğunu gördüm. Burada a'yı tek bıraktığımda secx olduğunu gördüm.

Ö1: O zaman benzer mantıkla şuraya geçersek şimdi burası da yine bir birim burada yine bir dik üçgenin var eğer ben bu kısma bir dersem atıyorum şu 1'in olduğu yer şurası x derece olacağı için sinüs b.sinx 1'e eşit olmuş oluyor. O halde 1= b.sinx oluyorsa eğer b buradan cosecx oluyor dolayısıyla hani şu ilk başta taradığım kısım yani cosecx olur diyorum.

Şekil 3. Veri analizi metni-1

Katılımcı Ö1'den GeoGebra yazılımını kullanarak birim çember üzerinde trigonometrik oranların öğretimi ile ilgili etkinlik geliştirmesi istenmiştir. Ö1 giriş çubuğunu kullanarak birim çember oluşturmuş ve sürgü, dik doğru, doğru parçası gibi araç çubukları ile dik üçgen içerisinde trigonometrik oranları tanımlamıştır (Bknz. Şekil 4). Ö1'in gerçekleştirdiği bu teknolojik eylemler; Mishra ve Koehler'in (2006) TB tanımında ifade ettiği gibi standart teknolojiler (kitap, tebeşir ve yazı tahtası gibi) ve internet, dijital video gibi daha ileri teknolojiler hakkındaki bilgisi olması nedeniyle TB olarak kodlanmıştır. Ö1'in TB'sine örnek olan cevapları Şekil 5'te gösterildiği gibi yeşil renk ile ifade edilmiştir (Bknz. Şekil 5).



Şekil 4. Veri analizi örneği-2

T: Birim çemberi oluşturunuz. Birim çemberi kullanarak trigonometrik oranların öğretimi için bir etkinlik geliştiriniz.

Ö1: Sanırım radyan için yaptığım 30-60-90 onları gösteren bir birim çember oluşturup ardından o birim çember üzerinde dik üçgen oluşturup oradan o dik üçgenin kenarlarını tanjant ve cotanjant ile ilişkilendirebileceğim bir etkinlik şu an geldi aklıma. Şimdi şöyle yapacağım. Yine bir sürgü tanımlayacağım açıya bağlı olarak. Bu sefer şöyle yapacağım ama minimum maksimum 360, artış değerlerini de 15 yapmak istiyorum. Aslında 15 mi yapsam 30 mu yapsam kararsızım ama 15 yapmak daha mantıklı sanırım.

T: Neden?

Ö1: Çünkü 45'i falan gösteremeyeceğim 30 yaparsam. Hani göstermekte kararsız kalma sebebim de 75 ve 15 gibi kullanmayacağım açıların olması. Ama şimdilik dursun bunlar. Şöyle bir şey yapabilirim. Burada bir doğru parçası oluştururum x eksenine dik olacak şekilde. Yine y eksenine dik olacak şekilde bir doğru daha. Sonra bunları doğru parçasına çevireceğim ve bunları renklendireceğim.

Ö1: Şöyle ben bu uzunlukların daha doğrusu bu oynayan A' noktasının apsisi ve ordinatının hangi açı ise onun kosinüs ve sinüsüne eşit olduğunu biliyorum. Şimdi bunu belirtecek bir şey yapmam gerekiyor. Şöyle bir kod yazdım aşağıya. x(A') şeklinde bu bana A' şeyini veriyor neyini veriyor. Apsisini veriyor. Apsisinin değeri yukarıda b olarak yazılı. Şimdi ben o b'yi şöyle kullanacağım. Şuraya bir metin oluşturacağım diyeceğim ki cos(α)=b değerine. Yine benzer bir mantıkla sinüsü göstereceğim y(A') yazarsam. Bana o A' noktasının ordinatını verecek. Onu da sin(α)=c dersem yine benzer bir mantıkta bir şey çıkacak. Hani böyle bir şey geldi aklıma açıkçası. Sinüs ve kosinüs değerlerinin öğretimi için.

Ö1: Hani burada şeyi de görüyorlar işaretleri görmüş oluyorlar. O yönden güzel oldu. Sinüs ve kosinüsün birbirleri ile olan değerlerini görüyorlar. Mesela 30°'de iken kosinüs, sinüsten daha büyük hem görsel olarak hem cebirsel olarak yukarıda görünüyor. Hatta renkleri ben ilk başta bu yüzden koymuştum. Hani o doğru parçalarının boyları ve renkleri daha ilişki kurmada rahat olacak renkler sayesinde. Böyle hem kıyaslayabilirler hem de bir değerlere az buçuk aşina olurlar diye düşünüyorum. Bir uygulama üzerinde göstermemi ister misin?

T: Olur.

Şekil 5. Veri analizi metni-2

Şekil 6'da katılımcı Ö1 oluşturduğu etkinlik ile sürgü aracının dinamiklik özelliği sayesinde öğrencilerin trigonometrik oranların aldığı değerleri rahatlıkla görebileceklerini, ayrıca kullandığı renkler ile de açı değiştikçe trigonometrik fonksiyonlar arasında ilişki kurabileceklerini belirtmiştir. Ö1'in bu ifadeleri; Mishra ve Koehler'in (2006) TPB tanımında belirttiği gibi öğretimin belirli teknolojilerin kullanılması sonucu nasıl değişebileceğinin farkında olduğunu göstermiş dolayısı ile TPB olarak kodlanmıştır. Ö1'in TPB'sine örnek olan cümeleri Şekil 6'da gösterildiği gibi pembe renk ile işaretlenmiştir.

T: Tamamdır. Bir de araç çubuklarında aradığın şeyleri çok çabuk bulabiliyorsun. Bunun sebebi sence ne? Ara ara bakıyor musun yoksa ilgin mi var, nedir bunun sebebi?

Ö1: Yani ikisi de. Hem ilgim var hem de ara ara bakıyorum. Gerçi son birkaç aydır düzenli kullandığım söylenemez ama bunların eğitimini lisansta alırken hoca mesela bir ödev veriyordu ders içinde yapmamız için onu yapıyordum ve sonrasında başka şeyler kurcalamaya devam ediyordum. Hani buraları hep kurcalıyordum tek tek özelliklerini deneyip neler yaptık yapabiliyoruz bakıyordum. Hem bu hem de kendi yaptığım ders planlarındaki Geogebrayı kullanmaya çalışıyorum. Kullanmaya çalıştığım için de hani doğru yanlış bir şekilde geliştiriyorsun kendini. Lisanstan sonra da kullanmaya devam ettim. Aklıma bir şey geldiği zaman geogebra üzerinde göstermeye çalışıyorum. Aklıma bir şey geldi, mesela çözemediğim geometri sorularını Geogebraya aktarmaya çalışıyorum. Sonra geogebra üzerinde oynamalar yaparak soruyu daha iyi anlamaya çalışıyorum.

T: Peki bunu kendin için mi yapıyorsun yoksa derslerde de kullanıyor musun?

Ö1: Kendim için de yapıyorum derslerde kullandığım da oluyor. Basit bir şeyse hemen gösterebiliyorum. Ya da elimde hazır materyal varsa hemen açıp gösteriyorum tabi online eğitimden bahsediyorum yüz yüzeyken değil.

T: Tamam anladım. Daha önce böyle bir etkinlik oluşturmuş muydun lisansta? Ya da karşılaşmış mıydın?

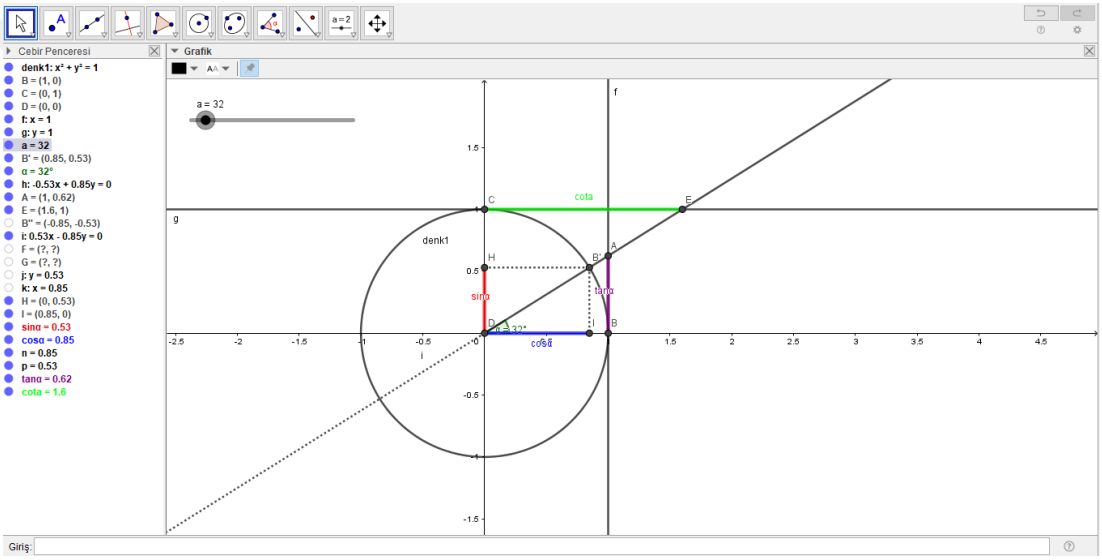
Ö1: Oluşturdum. Aslında bu yaptığım benim lisansta oluşturduğum bir etkinliğe benzer bir şey. Daha doğrusu diyeyim. Düzenlenmiş ve daha doğrusu olmuş hali diyelim.

T: Peki, sürgü kullandığını görüyorum bir de. Sürgü kullanmanın sebebi ne, nasıl bir faydası olduğunu düşünüyorsun?

Ö: Bence Geogebranın en büyük özelliği sürgü. Bu gördüğümüz etkinliğe dinamiklik katıyor. Hani ben şu anda sabit kalmış şekli tahtayı çizebilirim ya da şu şekilde bir 150° açı alıp çizebilirim. Yani herhangi bir açıyı alıp seçip çizebilirim. Ama ben tahtada bu şekilde bir döndürme işlemini yapamam. Yani Geogebranın en büyük katkısı bu. O yüzden tasarladığım etkinliklerde genelde sürgü vardır.

Şekil 6. Veri analizi metni-3

Şekil 7'de katılımcı Ö1 sürgüyü sürükleyerek 1. bölgede x=32º açısını oluşturtan sonra birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonların her birinin x=32º için tanımlı oldukları yerleri göstermiş ve fonksiyonların aldıkları değerlerin işaretlerini eksenler yardımı ile açıklamıştır. Ardından çizdiği x=1 ve y=1 doğrularını kullanarak cotx fonksiyonunun 1'den büyük, tanx fonksiyonunun ise 1'den küçük bir değer aldığını da GeoGebra yazılımı üzerinde göstererek AB'si ile TB'sini birleştirmiştir. Ö1'in bu eylemleri; Mishra ve Koehler'in (2006) TAB tanımında ifade ettiği gibi AB ile TB'nin birbiri ile etkileşiminden doğan bilgi olması nedeni ile TAB olarak kodlanmıştır. Ö1'in TAB'ına örnek olan cümleleri Şekil 8'de gösterildiği gibi mavi renk ile işaretlenmiştir (Bknz. Şekil 8).



Şekil 7. Veri analizi örneği-3

Ö1: Evet şöyle ki, burada trigonometrik fonksiyonların birim çember üzerindeki gösterimi var. Sinüs, kosinüs, tanjant ve cotanjantın. Sonraki iki etkinliğin de temelini oluşturuyor bu. Nasıl bir şey, mesela α=32°'lik bir açı olarak alalım. Tanjant bu boyda cotanjant bu boyda sinüs, kosinüs hepsi pozitif. Yani burada fonksiyonları gösteriyorum. Öğrenciler bu açı ile cotanjantın böyle olduğunu hatta 1'den büyük bir değer aldığını görebilir. Çünkü şu tanx doğrusu, aslında x=1 doğrusu ve cotanjant x=1'i geçmiş durumda. Dolayısıyla cotanjantın 1'den büyük olduğu görülür. Tanjantın da cotanjant doğrusun altında kaldığı için 1'den küçük olduğu görülebilir.

Ö1: İkinci bölgede mesela cotanjant artık negatif yönde ilerlemiş yani eksi değer alıyor kosinüs yine eksi değer alıyor. Tanjant aşağıya doğru eksi değeri alıyor ki burada geçen görüşmelerde bahsettiğim ışının arkasında kalan kısımla kesişiyor tanjant eğrisi. Oradaki kesişim noktasının ordinatının tanjant olduğunu ifade etmeye çalışmıştım. Yine şu şekilde tam 180° olduğu zaman mesela kosinüsün -1, tanjantın ve sinüsün bir uzunluğa sahip olmadıklarını ve cotanjantın da sonsuza doğru gittiğini görüyoruz. cotanjantın belli bir şeyi yok uzunluğu yok. Hani böyle tek tek bütün bölgeler için fonksiyonlar gözüküyorlar.

T: Mesela bu etkinliği oluştururken nelere dikkat ettin, senin için önemli olan noktalar nelerdir?

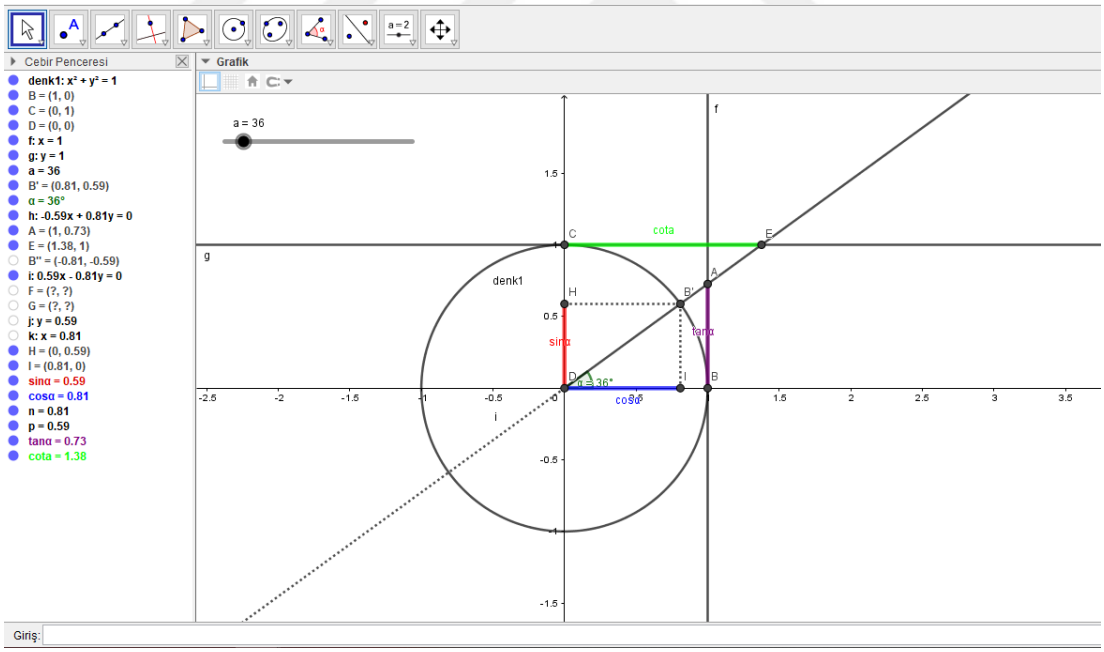
Ö1: Yani cotanjant, tanjant, sinüs ve kosinüsün birim çember üzerinde doğru gözükmesini istedim. Ayrıca renklendirmeye dikkat ettim dikkat çeksin diye. Sonra şu nokta noktalar var. Şu B noktasının B' noktasının izdüşümü oldu havasını vermek istedim. Onu bilerek yaptım. Ardından yine şöyle ikinci bölgede mesela tanjantla bu ışının arkasından gelen nokta noktalarla onu göstermek istedim benim için onlar önemliydi. Yine benzer şekilde cotanjantta da hani ışın bu tarafa doğru ama arkasında o ters yönde doğru olan ışın yine cotanjantla kesişiyor. Yani genel olarak bu şekilde.

T: Peki, etkinliği hazırlarken zorlandığın yerler oldu mu?

Ö1: Bunda pek zorlandığım bir şey olmadı açıkçası. Çünkü hani doğru parçası oluşturdum, çemberi oluşturdum. Işınlar, renkler, boyamalar falan çok öyle bir geogebra özelinde bir kodlama gerektirmiyordu. Bir sıkıntı yaşamadım.

Şekil 8. Veri analizi metni-4

Katılımcı Ö1'e oluşturduğu etkinliği nasıl kullanmayı planladığı sorulmuştur. Ö1 sınıf içerisinde etkinliğin farklı şekilde kullanımına değinerek, etkinliği kendi uygulayacaksa farklı öğrenci kullanacaksa farklı yorumlarda bulunmuştur. Örnek olarak Ö1 etkinliği kendisi uygularken yukarıda bahsedildiği gib TAB'ını kullanarak Şekil 9'da bulunan sürgüyü sürüklemiş, açı değiştikçe trigonometrik fonksiyonların birim çember üzerindeki tanımlı olan yerleri, işaretlerini ve hareketlerini göstermiş ve trigonometrik fonksiyonların hareketlerindeki değişimi öğrenciye not ettirmeyi planladığını söylemiştir. Ayrıca Ö1 etkinliğe metin kutuları ekleyerek dersi öğrenci merkezli hale getirerek de uygulayabileceğini ifade etmiştir. Ö1'in not ettirme stratejine ve etkinliğin farklı uygulamalarına değinmesi TAB'ını pedagojik tekniklerle birleştirdiğini göstermiştir. Ö1'in bu eylemleri; Mishra ve Koehler'in (2006) TPAB tanımında ifade ettiği gibi TB, PB ve AB'nin birleşiminden doğan, teknolojiyi konu alanına uygun yöntemler ile birleştirerek öğrenme faaliyetini gerçekleştirmeyi sağlayan bilgi olması nedeniyle TPAB olarak kodlanmıştır. Ö1'in TPAB'ına örnek olan bu cümleleri Şekil 10'da gösterildiği gibi kırmızı renk ile işaretlenmiştir (Bknz. Şekil 10).



Şekil 9. Veri analizi örneği-4

T: Peki bu hazırladığın etkinliği derslerde kullanmayı tercih eder misin?

Ö: Evet kullanırım.

T: Nasıl kullanırsın kısa bir öğretim uygulaması yapabilir misin?

Ö: İlk önce tanjant, cotanjant, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını birim çember üzerinde tahtada gösteririm. Yani bu sinüstür. Hani bir tane nokta veririm mesela bir çizim yaparım. Temel şeyleri verdikten sonra artık fonksiyonların yaptıkları hareketleri öğrencilere hissettirmek için mesela bunu kullanmak isteyebilirim. Örneğin 0 ile 90 arasında α açısı artarken, tanjant büyüyor, cotanjant küçülüyor, kosinüs küçülüyor, sinüs büyüyor. Öğrenci bunu çok güzel bir şekilde görebilir bunu. Ya da işte ikinci bölgede açım arttıkça tanjant artıyor, cotanjant azalıyor, sinüs azalıyor, kosinüs azalıyor. Bunları görebilir. Hani sadece tahtada benim açıp oynamamdan ziyade bunu öğrencilerle paylaşabilirim. Öğrenciler bunu kendileri de oynayabilirler. Tabi biraz daha etkileşimli hale getirilebilir. Mesela yan tarafa sinüs kosinüs tanjant ve cotanjant işaret kutucukları konur işte. Onu yaptıktan sonra öğrenci sinüse tıklar sadece ekranda sinüsle ilgili şeyler olur. Sadece sinüsü inceler. Bakar şöyle bir nerede artıyor, nerede azalıyor nerede pozitif nerede negatif. Ya da işte cotanjant ve tanjantı tıklar aynı anda ikisini birden inceler. İşte biri büyürken biri her zaman küçülür yorumu yapar mesela. Ya da ikisi de hep aynı işarette olduğuna dair bir yorum yapabilir. Hani bu tarz şeyler için bence çok faydalı olacağını düşünüyorum. Öğrencilere de tahtada eğer kendim açıp uygulayacaksam sürgüyü oynattıkça nelerin değiştiğini not almalarını isterim. Burada alınabilecek bayağı bir sonuç var. Belki bu eğlenceli bir şeye de dönüşebilir, öğrencilerin verdiği cevaplarla puan kazanılabilir mesela o tarz bir oyun bile oynanabilir.

T: Peki mesela şu anda mı aklına geldi işaret kutusu konulabilir şöyle yapılabilir diye? Kendin neden bu tarz bir şey oluşturmadın?

Ö: Evet şu an aklıma geldi işaret kutularını oluşturmak. Aklıma ilk defa geldiği için değil daha önce yaptığım etkinliklerde işaret kutusunu kullandım. Ben bunu tasarlarken hani tahtada kendim nasıl kullanacaksam diye düşünüp hazırladım. Ama eğer öğrencilere verecek olsaydım kesinlikle bir işaret kutusu koyup bu fonksiyonları tek tek o işaret kutularına bağlardım. Hani onların daha odaklı bilmelerini sağlarım. Ama ben tahtadayken yönerge vereceğim için çok da ihtiyaç duymadım.

Şekil 10. Veri analizi metni-5

Şekil 11'de katılımcı Ö1'e, trigonometrik oranların öğrenimi konusunda öğrencilerin anlamakta güçlük yaşayacaklarını düşündüğü herhangi bir bölüm olup olmadığı sorulmuştur. Ö1 konunun öğreniminin gerçekleşmesi için öğrencilerin ön bilgilerinin önemi ile ilgili açıklamada bulunmuştur. Ö1'in öğretime yönelik bu söylemleri; Shulman'ın (1987) PB tanımında "öğrenme ve öğretme süreci hakkındaki bilgi" ve PAB tanımınında "öğretim için gerekli olan alan bilgisine" örnek niteliğinde olması nedeniyle PB ve PAB olarak kodlanmış, Şekil 11'de görüldüğü gibi gri renk ile işaretlenmiştir.

T: Anladım tamam. Peki, öğrencilere soracağın sorulardan bahsettin az önce açıyı değiştirdiğimde neler değişir gibi. Öğrencilerden ne tarz cevaplar bekliyorsun? Bunlara cevap verebilecekler mi?

Ö: Evet, cevap verebilecekler. Mesela şey yorumu yaptım tanjant artarken cotanjant her zaman azalıyor. Ya da cotx artarken tanx her zaman azalıyor. Bu bence komplike bir cevap bunu her zaman göremeyebilirler. Ama şeyi görürler mesela. Açı arttıkça birinci bölgede mesela kosinüs azalıyor sinüs artıyor. Üçüncü bölgeye geldiği zaman sinüs, kosinüs negatif tanjant ve cotanjant pozitif. Birinci bölgede hepsi pozitif hani böyle biraz daha basit cevaplar kesinlikle alabileceğimi düşünüyorum. Ama hani şey değil ötekilerini de alamayacağımı düşünemiyorum. Bence trigonometride ilerledikçe mesela trigonometrinin sonuna doğru bir daha gösterirsem bunu o tarz komplike cevaplar da gelmeye başlayacaktır diye düşünüyorum.

T: Peki bu etkinliği kullanırken öğrencilerin anlamakta zorluk yaşayabileceğini düşündüğün kısımlar var mı?

Ö: Eğer sinüs kosinüs tanjant ve cotanjantı tam olarak anlamlandıramadıysa bu etkinlikten çok da bir şey anlayacağını düşünmüyorum. Çünkü tanjant neden burada cotanjant neden burada bir anlam ifade etmez ona. Ama eğer ona hâkim olduysa herhalde bir zorluk yaşamazlar diye düşünüyorum. Bir zorluk ön göremedim açıkçası.

T: Bu oluşturduğun etkinliğin kâğıt ve kalem kullanmaktan farkı ne peki?

Ö: Kâğıt ve kalem kullanmaktan farkı kâğıt kalemde tek tek bunları göstermem gerekiyor. Defalarca birim çember çizmem gerekiyor burada tek bir çizim üzerinde bütün durumları eşzamanlı olarak gösterebiliyor. Faydası o. Yani zamandan tasarruf etmemi de sağlıyor diyebilirim.

Şekil 11. Veri analizi metni-6

3.5. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Çalışmanın geçerliliğini arttırmak için çalışma kağıtları, klinik görüşme kayıtları, gözlem notları gibi farklı veri toplama araçları (Patton., 2014) kullanılarak veri çeşitlemesi

yapılmıştır. Böylece araştırma hakkında zengin bir veri tabanı oluşturulup sonuçlara daha geniş bir bakış açısıyla bakılmaya çalışmıştır.

Çalışmanın güvenirliği için de yukarıdaki bölümde detaylı anlatıldığı gibi klinik görüşme soruları oluşturulduktan sonra sorulara son halini vermek için uzman bir matematik eğitimcisinden görüş alınmış ve pilot çalışma yapılmıştır. Analiz aşamasında, tüm veri grubu araştırmacı ve danışman öğretim üyesi tarafından ele alınarak video kayıtları birebir transkript edilmiş ve cevap kağıtları incelenmiştir. Analiz sürecinde, araştırmacı ve danışman öğretim üyesinin farklı görüşlerinin ve kodlamalarının olduğu durumlar tartışılarak fikir birliğine varılmıştır. Aynı zamanda lisansüstü öğrenciler ise bu çalışmaya gönüllü olarak katılmışlardır. Katılımcılara çalışma süresince istedikleri zaman çalışmayı bırakma konusunda özgür oldukları çalışma öncesinde belirtilmiş ve katılımcıların rahat hissetmesi sağlanarak güvenilir veriler toplanmıştır.

3.6. Araştırmacının Rolü

Bu çalışmada klinik görüşmeler gerçekleştirilirken araştırmacı, katılımcıların trigonometri konusunda TPAB'larını ortaya çıkarmaya yönelik belirlenen soruları herhangi bir müdahalede bulunmadan katılımcılara yöneltmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşmeler sırasında katılımcılardan yeterli veri elde edilemediği durumlarda katılımcıların TPAB'larını detaylandırmaya yönelik ek sorular sormuştur. Katılımcıların farklı bilgi türlerine ait verilere ulaşıldığında ise her bir bilgi türü, TPAB çerçevesini ele alarak detaylı incelenmiştir.

BÖLÜM IV

BULGULAR

Bu bölümde katılımcıların AB, PB ve PAB, TB, TAB, TPB ve TPAB'larına ait bulgular sunulmuştur.

4.1. Alan Bilgisi (AB)

Bu bilgi türü özelinde katılımcıların trigonometri konusu özelinde alan bilgileri incelenmiştir. Bu bağlamda katılımcıların trigonometrik fonksiyonların temeli olan fonksiyon ve özellikleri, açı çeşitleri, birim çember ve trigonometrik fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonların işaretleri, sıralanması, trigonometrik özdeşlikler, trigonometrik fonksiyonların periyot ve grafikleri konuları özelinde alan bilgileri detaylı olarak incelenmiştir.

4.1.1. Katılımcıların Fonksiyon Kavramına Dair Alan Bilgileri

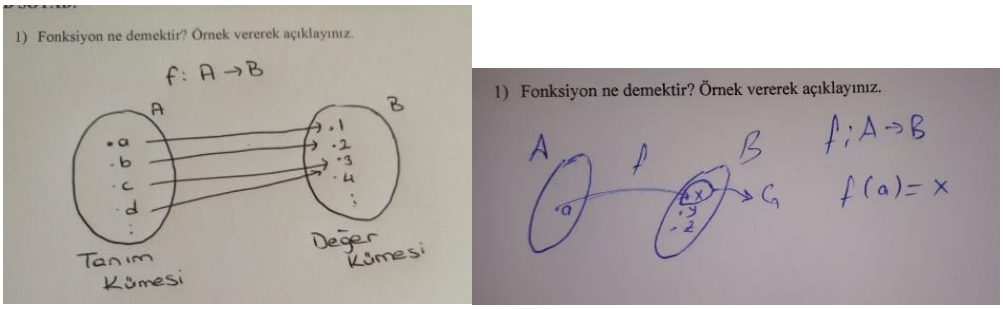
İlk olarak katılımcıların fonksiyon konusundaki bilgileri ele alındığında, katılımcıların fonksiyon tanımı yaparken Tablo 16'dan da görüldüğü gibi fonksiyonun var olan formal tanımını yapabildikleri ve örnek vererek gösterebildikleri belirlenmiştir. Bu bağlamda fonksiyon tanımında 'iki taneyi kümeyi' temel alarak 'bir A kümesindeki elemanların farklı bir B kümesindeki elemanlar ile belli bir kural çerçevesinde eşleşmesini' kullanmışlardır. Özel olarak bu kümeleri isimlendirirken fonksiyon kavramının temeli olan tanım aralığındaki tanım kümesi, değer kümesi ve görüntü kümesi gibi kavramları da kullandıkları belirlenmiştir. Bunun yanı sıra, tüm katılımcılar Şekil 12'deki örneklerde görüldüğü gibi iki kümenin bir fonksiyon bağlamında nasıl eşleşebileceğini küme şekilleri kullanarak da tanımlamışlardır. Katılımcıların fonksiyon tanım ve örnekleri detaylı incelendiğinde, Ö1'in fonksiyon tanımına farklı bir yaklaşım sunarak formal tanımın yanı sıra eş zamanlı değişim fikri olarak nitelendirerek açıkladığı görülürken, Ö4 fonksiyonu işlem, eşleme, bağıntı ve fonksiyon makinesi kelimeleriyle özetlemiş, Ö2 ve Ö3 ise fonksiyonu tanımlarken bağıntı kavramını kullanmışlardır (Bknz. Tablo 16).

Tablo 16

Katılımcıların fonksiyon kavramına ait tanımları

Katılımcılar	
Ö1	*"Fonksiyon, iki küme arasında bir ilişki kurabileceğimiz araçtır. Yani bir A kümesi vardır bir de B kümesi vardır. Belli bir kural ile o A kümesindeki elemanlarla B*

	kümesindeki elemanlarla eşleştirdiği bütün yapıyı fonksiyon olarak ifade edebiliriz. Yani bu kuralı açıkçası fonksiyonu üreten kişi belirler. Hani illa bir sistematik kural olmasına da gerek yok. Bunun dışında fonksiyon, eşzamanlı değişim fikri olarak ifade edilebilir. Yani bir bağımlı değişken var bir de bağımsız değişken var. Bağımsız değişkende oynama yaptığın zaman bağımlı değişken de ona bağlı olarak değişiyor." *"Fonksiyonu göstermek için öncelikle iki küme tanımlarım, A ve B kümeleri. A kümesi tanım kümesidir, B kümesi değer kümesidir. A'dan B'ye bir f tanımlarım. A'daki bütün elemanları açıkta kalmayacak şekilde B'de ki bir elemana götürürüm yani B'deki elemanlarla birer birer eşleştiririm. A'daki elemanlar yalnızca B'den bir elemana gidecek şekilde bir tanım yaparım."*
Ö2	*"Öncelikle fonksiyon bir bağıntıdır. İki küme arasındaki ilişki diyebilirim en kısa ifadeyle. A kümesinden B kümesine bir bağıntıdır diyebilirim. Burada tabi A kümesi tanım kümesi, B kümesi değer kümesi. Yine tanım kümesinde hiçbir elemanın açıkta kalmaması ve değer kümesinden bir ve yalnız bir elemana eşlenmesi gerekiyor diyebilirim fonksiyon için."*
Ö3	*"Fonksiyon denilince aklıma ilk gelen bize lisede öğretilen iki tane küme geliyor. Tanım kümesi ve değer kümesi. Tanım kümesindeki her bir elemanın değer kümesine olan bağıntılarının oluşturduğu kümeye fonksiyon diyoruz. Tanım kümesinden değer kümesine tanımlanmış her bir elemanın yalnız bir elemanla eşleştiği veya bağıntı oluşturduğu şekilde. Fonksiyon benim için bu şekilde tanımlanıyor."*
Ö4	*"Kelime olarak düşünüyorum. İşlem, eşleme, bağıntı, fonksiyon makinesi. Milli eğitim kitabındaki tanım şöyleydi herhalde A ve B boş kümeden farklı iki küme A kümesindeki her elemanı B kümesinden bir yalnız bir elemana eşleyen ilişkiye A dan B ye fonksiyon denir olması lazım kitaptaki."*



Şekil 12. Katılımcıların fonksiyon tanımına ilişkin çizimleri

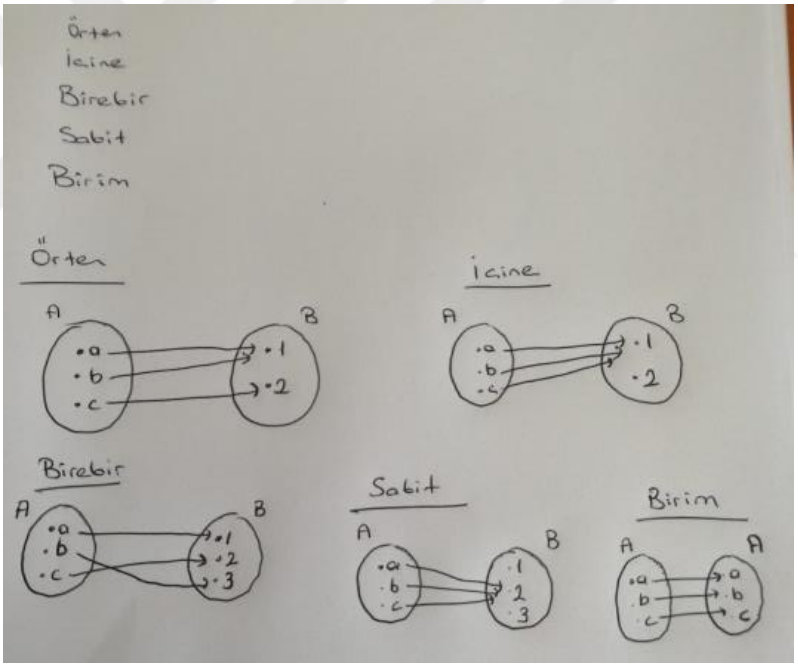
Fonksiyon tanımının yanı sıra, katılımcılardan fonksiyon çeşitleri denilince akıllarına gelen fonksiyonları açıklamaları istenmiştir. Tablo 17'den de görüldüğü gibi, katılımcılar 'örten, içine, birebir, sabit, birim fonksiyonlarını' fonksiyon çeşidi olarak örneklendirirken, Ö3 farklı bir şekilde birebirlik ve örtenlik durumlarının fonksiyonun özellikleri olarak ele almıştır. Şekil 13'ten de görüldüğü gibi Ö2 fonksiyon çeşitlerini tanımlarken verdiği fonksiyon tanımına bağlı olarak farklı 2 küme çizerek bahsettiği tüm fonksiyon çeşitlerini tanımlamıştır. Benzer şekilde diğer katılımcılar da kümeleri çizerek fonksiyon çeşitlerini örneklendirmişlerdir. Bu bağlamda, Ö3'ün fonksiyon çeşitleri ile fonksiyonunun özelliklerine dair alan bilgisine dair yanılgılarının olabileceği saptanmıştır. Ö1 ve Ö4 ise fonksiyon çeşitlerine dair örneklerini geniş tutmuşlar ve trigonometrik fonksiyon, logaritmik fonksiyon ve üstel fonksiyonu da fonksiyon çeşitleri olarak örneklendirmişlerdir. Genel olarak bakıldığında katılımcıların fonksiyon tanımı ve fonksiyon çeşitlerine dair alan bilgilerinin yeterli olduğu fakat Ö3'ün bu anlamda bilgi türünde eksiklikleri veya hataları olduğu saptanmıştır (Bknz. Tablo 17).

Tablo 17

Katılımcıların fonksiyon çeşitlerine ilişkin cevapları

Katılımcılar	
Ö1	*"Yani iki farklı şekilde algılıyorum sen hangisini istiyorsun bilemedim şu anda ama. Trigonometrik fonksiyon, logaritmik fonksiyon, üstel fonksiyon gibi fonksiyon çeşitleri geliyor. Şey de olabilir içine fonksiyon, örten fonksiyon, birebir fonksiyon sonra birim fonksiyon, sabit fonksiyon, tek ve çift fonksiyon başka da aklıma gelen yok açıkçası."*

Ö2	*"Örten, içine, birebir, sabit, birim var. Ekstra bir sıfır fonksiyonu vardı galiba. Şimdi aklıma geldi ama o sabit fonksiyonun içinde alabiliriz. O yüzden ayrıca belirtmiyorum."*
Ö3	*"Fonksiyonun çeşitleri ya da türleri dediğimizde sabit fonksiyon, birim fonksiyon, sıfır fonksiyonu gibi ifadeler vardı. Bunlar benim için çeşit tür. Bence birebirlik ve örtenlik fonksiyonun özelliği. Çünkü mesela ters fonksiyon olması için birebir ve örten olma özelliğini sağlaması gerekiyor. Oradan aklıma özellik olarak geliyor."*
Ö4	*"Trigonometriden bahsettiğimiz için aklıma ilk trigonometrik fonksiyon geliyor. Logaritmik, üstel, birebir fonksiyon, örten fonksiyon, içine fonksiyon, birim fonksiyon. Aklıma gelenler bunlar."*



Şekil 13. Ö2'nin fonksiyon çeşitlerine ilişkin çizimi

4.1.2. Katılımcıların Trigonometrik Fonksiyona Dair Alan Bilgileri

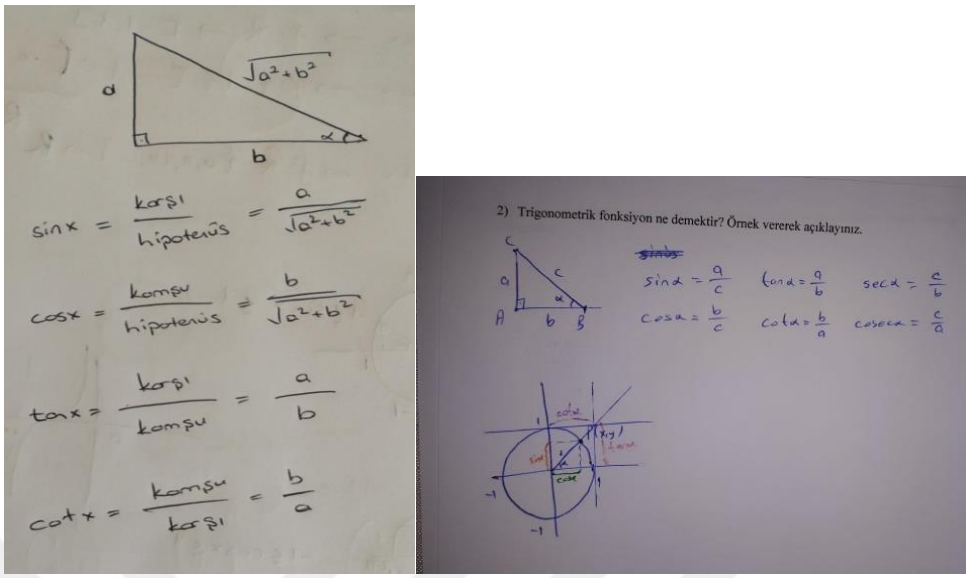
Katılımcıların trigonometrik fonksiyonlar konusundaki bilgileri incelenirken ilk olarak 'trigonometri' denilence akıllarına gelenleri söylemeleri istenmiştir. Tablo 18'den de görüldüğü gibi Ö1 ve Ö3'ün trigonometri denildiğinde akıllarına dik üçgen üzerindeki trigonometrik fonksiyonlar gelirken, Ö2 ve Ö4'ün trigonometri denildiğinde birim çember içeresine yerleştirilmiş bir açı ile oluşturulan dik üçgen kullanılarak tanımlanan trigonometrik fonksiyonlar çizdikleri görülmüştür. Bununla birlikte katılımcıların trigonometrik fonksiyon

tanımlarına bakıldığında Ö1'in 'dik üçgen üzerindeki oranlar' ifadesini kullandığı görülürken, Ö2'nin 'birim çemberde yönlü açının sonucu', Ö3'ün 'dik üçgendeki belli özellikler' ve Ö4'ün "x'leri cosx, sinx, tanx, cotx'e eşleyen fonksiyon" şeklinde trigonometrik fonksiyonu tanımladıkları görülmüştür. Bunun yanında Ö3 farklı olarak trigonometrik fonksiyonun zihninde 'cebirsel ve grafiksel' olarak iki farklı şekilde canlandığını söyleyerek bir dik üçgen üzerinde trigonometrik fonksiyonları tanımlayıp cebirsel olarak göstermiş, birim çember içerisine yerleştirdiği açı ile oluşturduğu dik üçgeni kullanarak trigonometrik fonksiyonları tanımlayarak grafiksel olarak açıklamıştır. Şekil 14'ten de görüldüğü gibi tüm katılımcılar bir dik üçgenin kenar uzunluklarını oranlayarak trigonometrik fonksiyonları açıklamışlardır. Genel olarak bakıldığında tüm katılımcıların bir dik üçgende trigonometrik fonksiyonların tanımlanmasına dair alan bilgilerinin kapsamlı olduğu görülmüştür (Bknz. Tablo 4).

Tablo 18

Katılımcıların trigonometrik fonksiyon tanımına ilişkin cevapları

Katılımcılar	**Cevapları**
Ö1	*"Trigonometrik dendiğinde dik üçgen üzerindeki oranlarla oluşturulmuş fonksiyonlar geliyor aklıma. Bir tanım yapmak gerekirse dik üçgen üzerindeki oranlarla oluşturulan fonksiyonlara trigonometrik fonksiyonlar denir diyebilirim sanırım."*
Ö2	*"Yani ilk etapta aklıma birim çember geliyor en basitinden. Çünkü trigonometrik ifadeler sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant gibi. Bu ifadeleri birim çemberde bir yönlü açının değerinin ifadesi olarak buluyoruz. Dolayısıyla trigonometrik fonksiyonu birim çemberde bir yönlü açının sonucu ya da değerinin ifadesi olarak söyleyebilirim."*
Ö3	*"Trigonometri denilince aklıma ilk dik üçgen üzerinde belli özelliklere göre tanımlanan birimler geliyor. Trigonometrik fonksiyon denilince fonksiyonun bir cebirsel ifadesi, bir de grafiksel ifadesi geliyor aklıma. Cebirsel ifadesi ilk söylediğim kısım grafiksel ifadesi ise birim çember üzerindeki gösterimleri.*
Ö4	*"Trigonometri denilince aklıma, Birim çember, sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant, 30, 60, 90 geliyor. Trigonometrik fonksiyonu tanım olarak söyleme çalışayım. X bir gerçek bir sayı olsun. Bu x'leri cosx, sinx, tanx, cotx gibi ifadelere eşleyen fonksiyon diyip çok kabaca bir tanım yapabilirim şuan."*



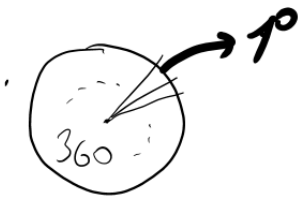
Şekil 14. Katılımcıların trigonometrik fonksiyon tanımlarına ilişkin çizimleri

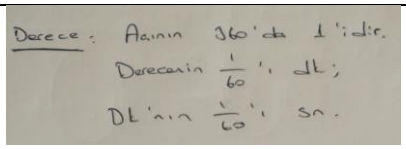
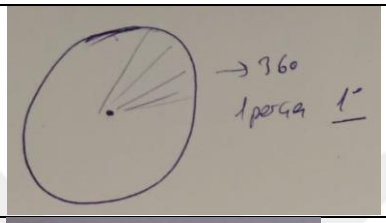
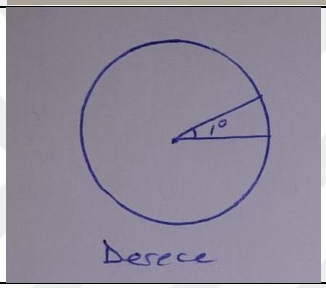
4.1.2.1. Açı Kavramı

Katılımcıların açı kavramına dair var olan alan bilgilerini incelemek amacıyla katılımcılardan trigonometri konusu ile doğrudan ilişkili olması nedeniyle derece, radyan ve esas ölçü kavramlarını tanımlayarak açıklamaları istenmiştir. İlk olarak Tablo 19'dan da görüldüğü gibi derece kavramınıÖ1, Ö3 ve Ö4 birim çember çizerek açıklarken, Ö2 birim çember çizmemiş sadece sözel olarak açıklamıştır. Bunun yanında Ö1, Ö3 ve Ö4 derece kavramının tanımını 'bir çemberin 360'ta birine karşılık gelen açı birimi' şeklinde yaparken, Ö2 derecenin tanımını tam olarak yapamasa da derece, dakika, saniye arasındaki ilişkiyi bildiğini ek olarak göstermiştir.

Tablo 19

Katılımcıların derece kavramına ilişkin cevapları

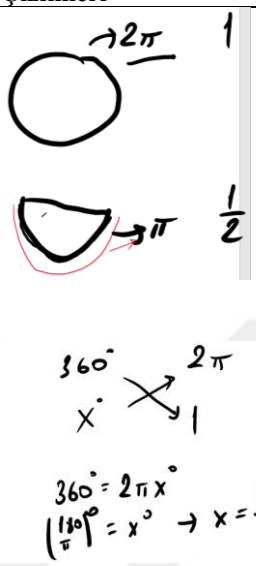
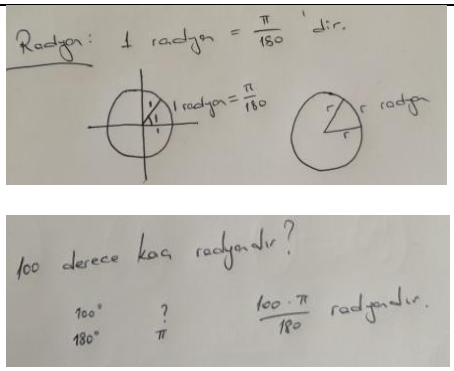
Katılımcılar	**Çizimleri**	**Cevapları**
Ö1		*"Şimdi derece denildiği zaman bir açı birimi aklıma geliyor. Derece bir dairenin 360°'lik birim parçalara ayrılması sonucunda o elde edilen her bir birim parçanın derece olarak isimlendirilmesiyle ortaya çıkan açı birimi."*

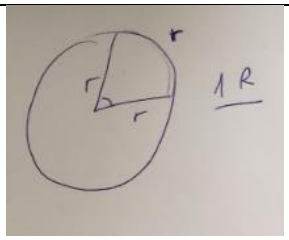
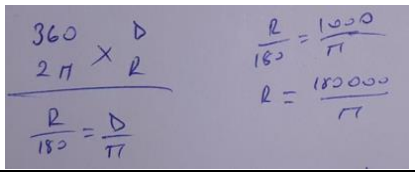
Ö2		*"Derece nedir, açının 360'ta 1'idir. En basit ifadeyle bunu söyleyebilirim. Çemberde bir tam açı oluşturacağı için derece için açının 360'ta biri olarak yazıyorum. Bunun yanı sıra derecenin 60'ta 1'i dakika, dakikanın 60'ta 1'i de saniye olarak matematikte belirtiliyor."*
Ö3		*"Bir tam daire çiziyorum. Bu tam dairenin işte merkezden 360 tane eşit parçaya böldüğümde, bu 360 parçanın her bir parçası 1°'ye eşit oluyor. Derece budur."*
Ö4		*"Çember yayını 360 eş parçaya böldüğümüzde bu parçalardan birini gören merkez açıya 1° diyoruz. Böyle bir tanımı olması lazım."*

Katılımcıların radyan kavramını nasıl tanımladıkları incelendiğinde, Tablo 20'den de görüldüğü gibi Ö2, Ö3 ve Ö4 1 radyanı 'birim çemberin yarıçap uzunluğuna eşit yay uzunluğu' şeklinde tanımlamış ve birim çember üzerinde çizerek göstermişlerdir. Diğer katılımcılardan farklı olarak Ö1'in radyanı, çemberin çevresi ile oranlama yöntemini kullanarak örneklerle çizerek açıkladığı görülmüştür. Ö1'in cevabı daha detaylı şekilde ele alınırsa, Ö1 radyanda oranlama yaptığını söylemiş ve bir tam çember çizerek çemberin çevresinin 2π olduğunu belirttikten sonra yarım çember çizerek çevresinin de 2π'nin yarısı yani π olacağını söylemiştir. Katılımcılar derece ile radyan arasındaki ilişkiye de değinmiş ve Ö1, Ö2 ve Ö4 orantı kurarak derece cinsinden verilen bir açıyı radyana, radyan cinsinden verilen bir açıyı dereceye çevirmişlerdir. Örneğin tablodan da görüldüğü gibi Ö2, 100º'nin radyan cinsinden karşılığını bulurken orantı kurarak işlem yapmıştır. Diğer katılımcılardan farklı olarak Ö3 ise derece ile radyan arasındaki ilişkinin formülünü ezberinden yazmış ve örnekte görüldüğü gibi 60º'nin radyan cinsinden karşılığını bulmak için formül kullanmıştır. Katılımcılardan Ö4 ise derece ile radyan ilişkisini veren formülü oluştururken işlemlerinde hata yaparak orantıyı yanlış kurmuş ve buna bağlı olarak örnek verdiği 1000º'nin radyan olarak karşılığını yanlış hesapladığı görülmüştür (Bknz. Tablo 20).

Tablo 20

Katılımcıların radyan kavramına ilişkin cevapları

Katılımcılar	Çizimleri	Cevapları
Ö1		*"Radyan da aynı şekilde bir açı birimidir. Yani bu çemberin çevresi 2π. Yani burada bir birimlere ayırma yok. Direkt olarak bu 2π'yi oranlayarak yapıyoruz. Mesela ben çemberin, dairenin 2π'lik parçası dediğim zaman tamamını almış olurum. Ama eğer ben dairenin mesela π'lik parçası dediğim zaman tamamı 2π ise işte bunun yarısı π kadarlık bir dilimdir şeklinde yorum yapabilirim. Aslında burada π ve 2π'den kastedilen şu; yarıçapı 1 birim olan bir çemberin π kadar uzunluktaki çevreye sahip kısmı. Radyan da bunu kullanarak oluşturulmuş bir açı birimi şeklinde ifade edebilirim."*
Ö2		*"Birim çemberde yarıçap uzunluğuna eşit yay uzunluğunu gören açı olarak geçiyor. 360°, 2π radyandır. Dolayısıyla 2π/360 sadeleştiğinde π/180 geliyor. Bu da 1 radyan olarak açıklanabilir. 1 radyan eşittir π/180. Mesela 100° kaç radyan bunu bulalım. Yine bir oran orantıdan, 180 bölü derece eşittir π bölü radyan olduğuna göre 100° ne olur? 100.π/180 radyan olarak ifade edilir. Bu şekilde yani bir oran orantı kurarak aralarındaki ilişkiyi bulabilirim diyebilirim."*

Ö3		*"Radyan dediğimiz ifade de, radyanı şey diye hatırlıyorum. Normalde hani derece bölü 180 eşittir radyan bölü π deyip, oradan radyanı hesaplıyorduk. Ama radyanın tanımında, bir çember çiziyorum yine. Bu çemberin yarıçapı r olsun, öyle bir açı seçiyorum ki yani öyle bir aralık seçiyorum ki, yine karşı tarafı da yani karşısında gördüğü yay da yarıçapına eşit oluyor. Eşkenar üçgen gibi bir şey çıkıyor ama bir kenarı yay oluyor. O gördüğü açı, o da bir radyan oluyor işte…Radyanda da bir eşlik durumu vardı. Çemberin yarıçapı kadar yayı gören açı 1 radyandı diye hatırlıyorum."*
Ö4	 	*"Doğru orantı yapsak. 360'ta 2π'de miydi? Dereceyi D ile ifade edelim. 360'ta D ise 2π'de R diyorduk. Buradan da sadeleşir R/180 eşittir D/π gibi bir ilişki."*

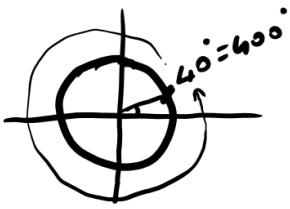
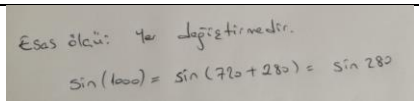
Tablo 21 incelendiğinde katılımcılar esas ölçü kavramını tanımlarken derece kavramında olduğu gibi Ö1, Ö3 ve Ö4'ün birim çember çizerek açıklama yaptığı, Ö2'nin ise esas ölçüyü sözel olarak açıklama yaparak tanımladığı görülmüştür. Katılımcılardan sadece Ö4 esas ölçünün matematiksel olarak karşılığı olan $\beta = \alpha + k.360$ formülünü yazarak esas ölçüyü açıklarken, diğer katılımcılar esas ölçüyü sayısal örnekler vererek 'birim çember üzerinde farklı açı değerlerinde aynı yere gelme' durumu olarak açıklamışlardır. Örneğin tablodan da görüldüğü gibi Ö1, 400º'nin esas ölçüsünün 40º olduğunu gösterirken iki açıyı da birim çember üzerinde çizmiş ve açıların aynı yere geldiğini göstermiştir. Benzer şekilde Ö3, 390º esas ölçüsünün 30º olduğunu gösterirken iki açının da birim çember üzerinde aynı yere

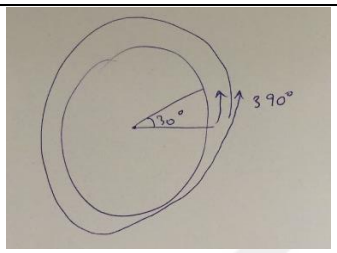
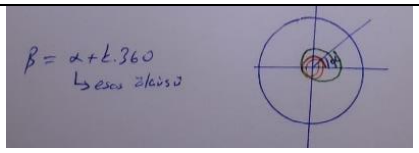
karşılık geldiğini çizerek göstermiştir. Bunun yanında Ö1 esas ölçünün, çember etrafında bir tam tur attıktan sonra başa dönmesinden dolayı periyot kavramı ile benzerliğinden bahsederken, Ö2 ise esas ölçüyü fizikteki yer değiştirme kavramı ile ilişkilendirerek açıklamıştır (Bknz. Tablo 21).

Genel olarak bakıldığında katılımcıların derece, radyan ve esas ölçü kavramlarını çizerek, sözel olarak ve örnek vererek açıklayabilmeleri ve açı birimlerinin birbiri ile ilişkilerine değinmeleri sebebiyle tüm katılımcıların trigonometri ile doğrudan ilişkili olan derece, radyan ve esas ölçü kavramlarının tanımlanmasına dair AB'lerinin kapsamlı olduğu görülmüştür. Bunun yanı sıra Ö3'ün derece ile radyan açı birimleri arasındaki ilişkiyi ezberinden yazması ve bu konudaki söylemleri sonucunda da alan bilgisinde formüllere ve ezber bilgilere yer verdiği görülmüştür. Ayrıca Tablo 21'de görüldüğü gibi Ö4'ün derece, radyan ve esas ölçü kavramlarını tanımlayıp açıklamasına rağmen derece ile radyan açı birimi arasındaki ilişkiyi veren orantıyı yanlış kurarak hatalı işlem yaptığı tespit edilmiştir.

Tablo 21

Katılımcıların esas ölçü kavramına ilişkin cevapları

Katılımcılar	**Çizimleri**	**Cevapları**
Ö1		*"Esas ölçü bu periyot kavramında bahsettiğim mantık aslında. Şöyle eksen üzerinde çizeyim. Mesela 40°'lik bir açı aldım diyelim. Bu 40°'lik açı ben tekrar bir tur attım diyelim çember etrafında tekrar buraya geldim. Yani 400°'lik bir açı yaptım başlangıçtan itibaren. Aslında aynı yere gelmiş oluyorum esas ölçü mantığıyla düşünürsem. Esas ölçü benim için budur."*
Ö2		*"Esas ölçü fizikten düşündüğümüzde hani bir alınan yol bir de yer değiştirme vardı. Esas ölçüyü de ben yer değiştirme olarak söyleyebilirim. Daha çok neyde kullanıyoruz, hani sin1000° diye bir ifade olsa bunun esas ölçüsü nedir? Birim çember üzerinde işlem yaptığımız için*

		birim çemberde tam açı yani çemberin tamamı 2π yani 360°. 360'ları içinden çektiğimizde bizde en son elimizde kalan açı, kalan değer olarak belirtebilirim esas ölçüyü de."
Ö3		*"1° üzerinden örnek vereyim, atıyorum şuraya bir 30° çizdim. Şu benim için 30°, sonra geliyorum buradan bir tur daha atıyorum. 360+30'dan bir de 390° oluyor. Nasıl diyeyim? Çemberin tamamı 360° olduğu için bir tur daha üstünden geçtiğimde yine aynı noktaya geliyorum. Hatta orayı isimlendireyim B noktası diye ben. Yine B noktasına geliyorum, A noktasından B noktasına gidiyorum diğerinde de A noktasından B noktasına gelip geçiyorum, bir daha gidiyorum. Yine aynı yere geliyorum. O zaman 30° ve 390° birbirine eşit olmuş oluyor. Bu eşitlik için de işte esas ölçüsü hani. 0° ile 360° arasında belirttiğim kısım benim için esas ölçü oluyor."*
Ö4		*"Şimdi bu yine çemberde 360° ama her seferinde 360, 360 devam ediyor. Yani 0° ile 90° arasında bir α açısı olduğunu düşünelim. 360+α, 720+α hepsi bunların α'ya denk aslında. Bu yüzden bu nasıl ifade edelim? Hmm…Bir açı şey olsun ne olsun. İşte β açısı α+k.360 diyelim. Böyle bir açının esas ölçüsü α'dır. α+k.360 tarzı açıların esas ölçüsü alfadır diye hatırlıyorum."*

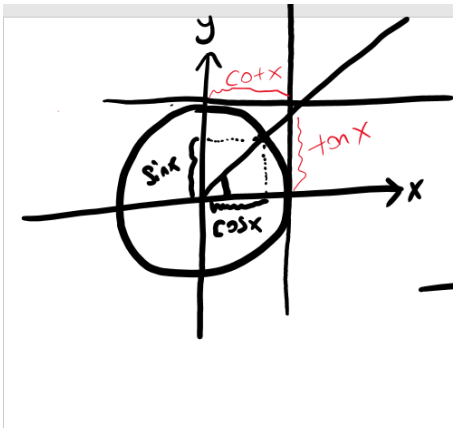
4.1.2.2. Birim Çember ve Trigonometrik Fonksiyonlar

Katılımcıların birim çember ve trigonometrik fonksiyonlar başlığı altında; birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonların tanımlanması, işaretleri, değişimi, karşılaştırılması ve bir açının trigonometrik fonksiyon değerinin dar açı cinsinden yazılması ile ilgili bilgileri incelenmiştir.

4.1.2.2.1. Trigonometrik Fonksiyonların Tanımları

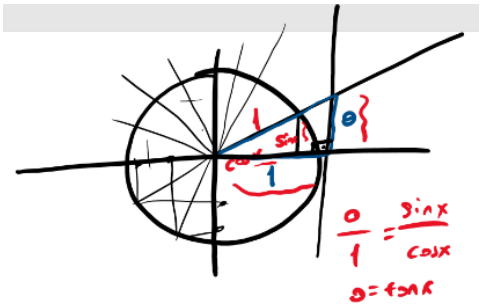
Katılımcıların birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonların tanımlanması ile ilgili alan bilgilerine bakıldığında Ö1, Ö2 ve Ö3'ün sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant trigonometrik fonksiyonlarını birim çembere bağlı olarak tanımlayarak çizdikleri görülmüştür. Ö4 ise sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını birim çember üzerinde tanımlayarak çizebilmiş ancak tanjant ve kotanjant fonksiyonlarını çizse de birim çembere teğet doğrular yardımı ile çizilmesinin nedenini açıklayamamıştır.

Şekil 15'te verilen Ö1'in çizimi incelendiğinde, Ö2 ve Ö3 ile benzer şekilde Ö1, ilk olarak bir birim çember çizmiş ve 1. bölgede x ekseni ile arasında pozitif yönde x açısı olan bir ışın oluşturmuştur. Bu ışının çemberi kestiği noktanın dik izdüşümlerinin karşılığı olarak cosx ve sinx fonksiyonlarını birim çember üzerinde tanımlayarak çizmiştir. Ardından (1,0) ve (0,1) noktalarından eksenlere dik doğrular çizmiş ve ışın ile bu doğruların kesişim noktalarının izdüşümlerinin karşılığı olan tanx ve cotx fonksiyonlarını birim çember üzerinde tanımlayarak çizmiştir.

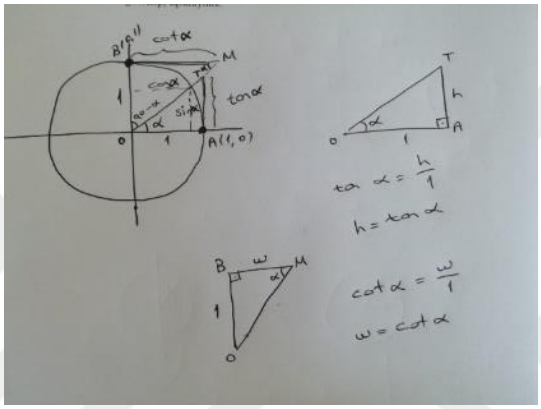


Şekil 15. Ö1'in birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonları gösterimi

Ö1, tanx ve cotx fonksiyonlarını birim çember üzerinde üçgende benzerlik yöntemi ile tanımlayarak çizerken (Bknz. Şekil 16), Ö2 dik üçgenler yardımı ile tanımlayarak çizmiştir (Bknz. Şekil 17).



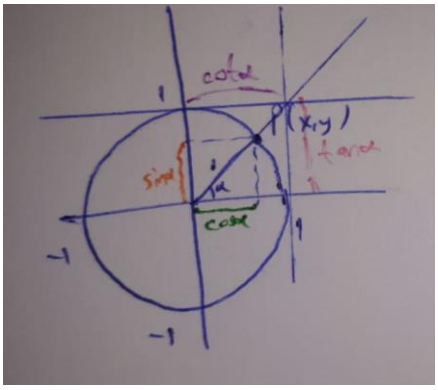
Şekil 16. Ö1'in birim çember üzerinde tanx fonksiyonunu çizimi ve ispatı



Şekil 17. Ö2'nin birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonları tanımladığı çizimi ve tanx, cotx fonksiyonlarının ispatı

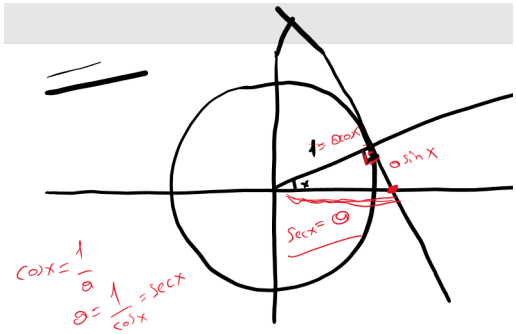
Katılımcı Ö4 ise Şekil 18'de verilen birim çember üzerinde sinx ve cosx trigonometrik fonksiyonlarını tanımlayıp çizmiş ancak tanx ve cotx trigonometrik fonksiyonlarını ezbere çizerek çizimini açıklayamamıştır. Ö4'ün birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonların tanımlanması ile ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Tanjant ve kotanjantın birim çemberdeki gösterimine çok hakim değilim. Neden böyle çizildiğini açıklayamam şuan. Sinüs ve kosinüsü açıklayabilirim ama. Dik üçgenden dolayı. Hipotenüs zaten 1 iken komşu bölü hipotenüsten hipotenüs işte 1, çarpma ve bölmede değersiz, x değeri cosx'i, y değeri sinx'i veriyor."*

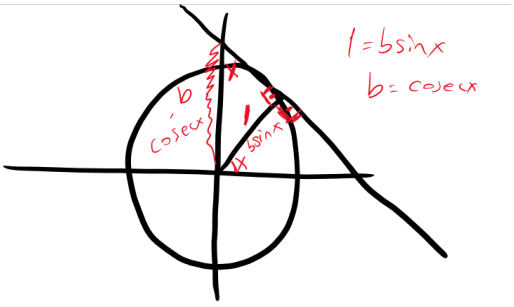


Şekil 18. Ö4'ün birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonları gösterimi

Bunun yanısıra Ö1, diğer katılımcılara ek olarak secant ve kosekant fonksiyonlarını da birim çember üzerinde tanımlayarak çizmiştir (Bknz. Şekil 19). Bu bağlamda Ö1 birim çember ve x ekseni ile pozitif yönlü x açısı yapan ışını çizdikten sonra ışının çemberi kestiği noktadan geçen çembere teğet bir doğru çizmiştir. Kırmızı ile işaretlediği kenarı a olarak ifade ettikten sonra $cosx = \frac{1}{a}$ eşitliğinde yer değişikliği yaparak a olarak isimlendirdiği ifadenin secx'e karşılık geldiğini göstermiştir. Benzer şekilde Şekil 20'de cscx'i de birim çember üzerinde tanımlayarak çizmiştir.



Şekil 19. Ö1'in birim çember üzerinde secx fonksiyonu çizimi ve ispatı

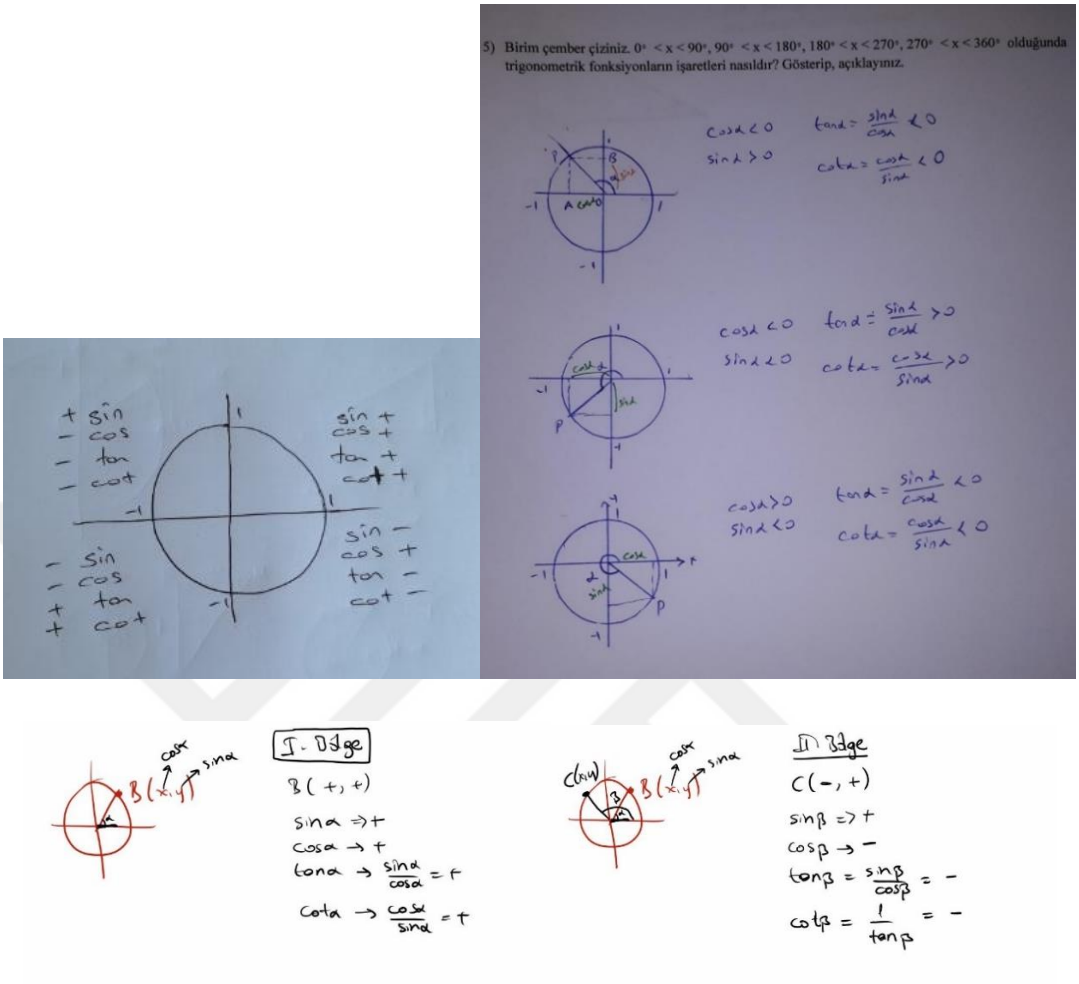


Şekil 20. Ö1'in birim çember üzerinde cscx fonksiyonu çizimi ve ispatı

Genel olarak bakıldığında Ö1, Ö2 ve Ö3'ün birim çember üzerinde sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarını tanımlayarak çizmeleri ve açıklamaları AB'lerinin yeterli olduğunu göstermektedir. Ö1'in ise buna ek olarak secant ve kosekant fonksiyonlarını da birim çember üzerinde tanımlayarak çizmesi ve açıklaması sebebiyle Ö2 ve Ö3'e kıyasla daha kapsamlı AB'ne sahip olduğu görülmüştür. Ancak katılımcı Ö4'ün tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının birim çember üzerinde tanımlanmasını ezberinden çizmesi ve bu çizimi açıklayamaması nedeniyle AB'sinde eksiklikler olduğu tespit edilmiştir. Sonuç olarak birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonların tanımlanması konusunda Ö2 ve Ö3 kapsamlı bilgiye sahipken Ö1'in Ö2 ve Ö3'e göre daha kapsamlı bilgiye sahip olduğu, Ö4'ün ise AB'sinde eksiklikler olduğu görülmüştür.

4.1.2.2.2. Trigonometrik Fonksiyonların İşaretleri

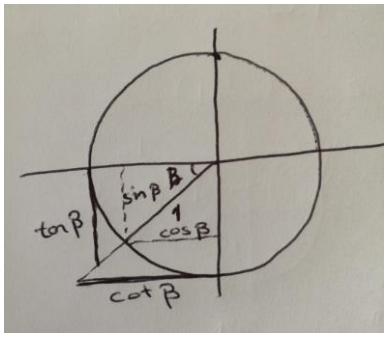
Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların işaretleri konusundaki bilgileri incelendiğinde, tüm katılımcıların trigonometrik fonksiyonların işaretlerini bölgelere göre belirleyebildikleri görülmüştür. Katılımcılar trigonometrik fonksiyonların işaretlerini belirlerken eksenler ile tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının sinüs ve kosinüs türünden eşitini kullanmışlardır. Örneğin Şekil 21'de de görüldüğü gibi tüm katılımcılar x ekseninin (cosx ekseninin) pozitif olduğu 1. ve 4. bölgelerde, cosx fonksiyonunu pozitif; x ekseninin (cosx ekseninin) negatif olduğu 2. ve 3. bölgelerde, cosx fonksiyonunun negatif olduğunu çizerek göstermişlerdir. Benzer şekilde y ekseninin (sinx ekseninin) pozitif olduğu 1. ve 2. bölgelerde, sinx fonksiyonunun pozitif; y ekseninin (sinx ekseninin) negatif olduğu 3. ve 4. bölgelerde, sinx fonksiyonunun negatif olduğunu çizerek göstermişlerdir. Katılımcılar $tanx = \frac{sinx}{cosx}$ ve $cotx = \frac{cosx}{sinx}$ eşitliğini kullanarak da sinx ve cosx fonksiyonunun bölgelerdeki işaretlerine göre tanx ve cotx fonksiyonunun işaretlerini belirlemişlerdir (Bknz. Şekil 21).



Şekil 21. Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların işaretleri ile ilgili çizimleri

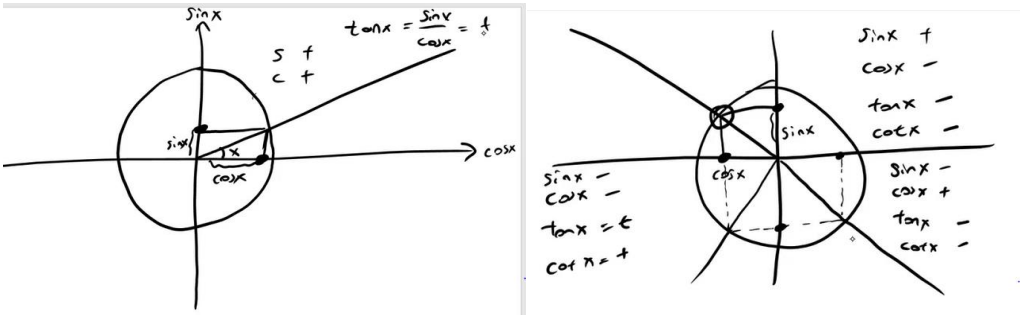
Ö2 trigonometrik fonksiyonların bölgelere göre işaretlerini incelerken örnek olarak birim çemberde 3. bölge üzerinde bir β açısı alarak açının trigonometrik fonksiyon değerlerini çizerek göstermiştir (Bknz. Şekil 22). Ö2, sinβ ve cosβ değerlerinin negatif, tanβ ve cotβ değerlerinin pozitif olduğunu söylemiş ancak tanβ ve cotβ'nın işaretlerini belirlerken sinβ ve cosβ'yı oranlayarak bulduğu için şekil üzerinde sadece sinβ ve cosβ fonksiyonlarını inceleyebilmiştir. Ö2'nin bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Yani grafik üzerinde tanjant ve kotanjantın negatif olduğunu gösteremedim. Bunu ancak sinüs negatif, kosinüs de negatif; tanjant ve kotanjant, sinüs ve kosinüsün birbirine oranı olduğundan yola çıkarak pozitif olduğunu söyleyebilirim. Çünkü şu anda yaptığım çizime bakıldığında bu çizim üzerinde bunların pozitif olduğu gözükmüyor açıkçası."*

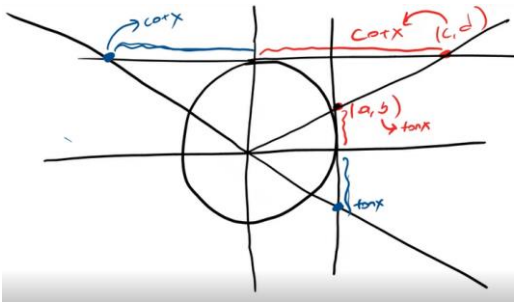


Şekil 22. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların işaretleri ile ilgili çizimi

Ö1 Şekil 23'te görüldüğü gibi diğer katılımcılara benzer şekilde sinüs ve kosinüsün işaretlerini eksenleri kullanarak belirlerken tanjant ve kotanjantın işaretlerini sinüs ve kosinüse oranlayarak belirlemiştir. Bunun yanında farklı olarak katılımcı Ö1, tanjant ve kotanjant trigonometrik fonksiyonların işaretlerini belirlerken birim çember üzerinde bu fonksiyonların gösterimlerinin olduğu ışını uzatarak da işaretlerin belirlenebileceğini göstermiştir (Bknz. Şekil 24). Örneğin Ö1 Şekil 24'te ilk olarak 1. bölgede bir x açısı almış ve tanx ile cotx fonksiyonlarını çizerek 1. bölgede ikisinin de pozitif olduğunu şekil üzerinden göstermiştir. 2. bölgede bir açı alarak da bu açının cotx'inin negatif olduğunu ve ışını uzatarak tanx'inin negatif olduğunu göstermiştir.



Şekil 23. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların işaretleri ile ilgili çizimi



Şekil 24. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların işaretleri ile ilgili çizimi-2

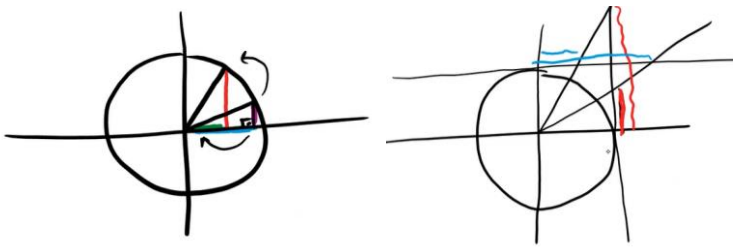
Genel olarak bakıldığında, tüm katılımcıların trigonometrik fonksiyonların işaretlerini, birim çemberi çizerek eksenler ile tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının sinüs ve kosinüs türünden eşitini kullanarak belirlemeleri trigonometrik fonksiyonların işaretlerine dair AB'lerinin yeterli olduğunu ortaya koymaktadır. Buna ek olarak, Ö1'in tanx ve cotx trigonometrik fonksiyonların işaretlerini, birim çember üzerinde bu fonksiyonların gösterimlerinin olduğu ışını uzatarak da belirleyebilmesi, trigonometrik fonksiyonların işaretlerine dair Ö1'in AB'sinin diğer katılımcılara göre daha kapsamlı olduğu olduğunu göstermektedir.

4.1.2.2.3. Trigonometrik Fonksiyonların Açı Değerlerine Göre Değişimi ve Karşılaştırılması

Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların açı değerlerine göre değişimi ve karşılaştırılması konusundaki bilgileri incelendiğinde Ö1, Ö2 ve Ö3 birim çember üzerinde alınan bir açının değiştirilmesi sonucu trigonometrik fonksiyonların değerlerinin değişimini açıklayıp karşılaştırdığı görülmüştür. Katılımcı Ö4 ise bu soruyu teknoloji kullanarak açıkladığı için Ö4'ün cevabı TAB başlığı altında detaylı olarak incelenmiştir.

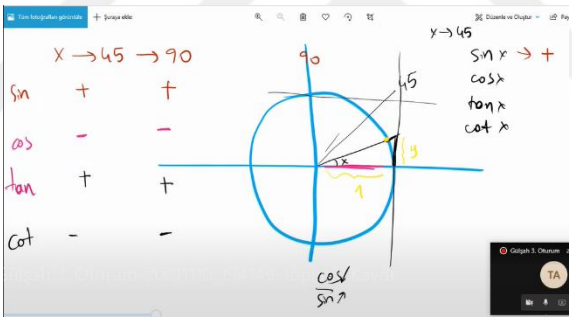
Örneğin katılımcı Ö2 ve Ö3 ile benzer şekilde olan katılımcı Ö1'in Şekil 25'te verilen çizimleri detaylı incelendiğinde Ö1 ilk olarak birim çember üzerinde 0º ile 45º arasında bir x açısı alarak bu açının sinx, cosx, tanx ve cotx değerlerini farklı renklerle çizerek göstermiştir. Bu açıyı artırdığında oluşan yeni açının trigonometrik fonksiyon değerlerini de şekil üzerinde çizdikten sonra sinx ve tanx fonksiyonlarının değerlerinin arttığını, cosx ve cotx fonksiyonlarının değerlerinin azaldığını şekil üzerinde göstererek açıklamıştır. Ö1'in bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Benim x açım arttığı zaman sinüsüm mordan kırmızıya geçiyor. Zaten uzunluk olarak net bir şekilde gözüküyor. X açım yine arttığı zaman kosinüsün de maviden yeşile düşüyor yani azalıyor."*



Şekil 25. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların değişimini incelediği çizimleri

Katılımcı Ö3 ise tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının değerlerinin değişimini 2 farklı şekilde incelediğini belirtmiştir. Bunlardan ilki birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonların tanımlarını kullanarak tanjant ve kotanjant değerlerinin değişiminin incelenmesidir. İkincisi ise diğer katılımcılardan farklı olarak $tanx = \frac{sinx}{cosx}$ ile $cotx = \frac{cosx}{sinx}$ eşitliklerini ve trigonometrik özdeşlikleri kullanarak sinüs ve kosinüse bağlı olarak tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının değerlerinin değişiminin incelenmesidir (Bknz. Şekil 26).



Şekil 26. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların değişimini incelediği çizimi

Örnek olarak Ö3'ün, Şekil 26'da da görüldüğü gibi birim çember üzerinde tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının tanımlarını kullanarak bu değerlerin değişimini incelediği açıklaması aşağıdaki şekildedir:

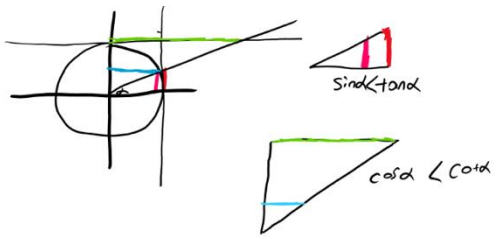
> *"Sinüs ve kosinüsü birim çember üzerinde doğru parçalarıyla gösteriyorduk ya onu gösterdiğim gibi şöyle tanjant ve kotanjantı da çizerim, Tanjant ve kotanjant doğruları, onları hareket ettirdikçe şöyle yukarı doğru gittikçe mesela açı şöyle olacağı için diğerinin değeri hep büyüyecek, büyüyeceği için tanjant büyüyecek derim kotanjantta da tam tersi şöyle geleceği için bu tarafa doğru gidecek azalacak."*

Katılımcı Ö3, ikinci yol olarak ise $tanx = \frac{sinx}{cosx}$ ile $cotx = \frac{cosx}{sinx}$ eşitlikleri ile trigonometrik özdeşlikleri kullanarak tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının değerlerinin değişimini aşağıdaki şekilde incelemiştir:

"45º"ye giderken sinüs artıyordu kosinüs azalıyordu. O zaman tanjant da sinüs bölü kosinüstü ya. Sinüs artıyorsa kosinüs azalıyorsa o zaman tanjant artıyor diyeceğim. Kotanjantta da tam tersini yapıyorum. Kosinüs bölü sinüstü. Kosinüs azalıyordu sinüs artıyordu, yukarısı azaldı aşağısı arttı sayı o zaman küçülecek. Bir de zaten şöyle bir ifade var $sinx^2+cosx^2= 1$. Bu artıyorsa bu mecbur azalacak. Çünkü ikisinin denkleminde birinin artarken birinin azalması gerekiyor. Tanjant ve kotanjantta da ikisinin çarpımı 1 diyebilirim. Birisi artarken birisi azalıyor."

Bunun yanında Ö1, Ö2 ve Ö3 trigonometrik fonksiyonları açı değerlerine göre karşılaştırabilirken, Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların değerlerini nasıl karşılaştıracağını unuttuğu görülmüştür. Örneğin katılımcı Ö1'in Şekil 27'de verilen çizimi detaylı incelendiğinde, Ö1 trigonometrik fonksiyonların açı değerlerini karşılaştırırken birim çember içeresindeki benzer üçgenlerden yaralanmıştır. Ö1 ilk olarak birim çember üzerinde 0º ile 45º arasında bir α açısı alarak bu açının sinα, cosα, tanα ve cotα değerlerini farklı renklerle çizerek göstermiştir. Birim çember üzerinde oluşan benzer üçgenleri şeklin dışına taşıyarak tanα değerinin sinα'dan, cotα değerinin cosα'dan daima büyük olduğunu göstererek trigonometrik fonksiyonları karşılaştırmıştır. Ö1'in bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

"Mesela 0º ile 45º arası bir açı seçerim. Ya da 45º ile 90º arasından bir açı seçerim. İki parçaya bölmemin sebebi de şu 0º ile 45º arasında kotanjant 1'den büyük, 45º ile 90º arasında da tanjant 1'den büyük. Şöyle bir açı aldım diyelim, şimdi benim sinüsüm şu pembe ile çektiğim yer, şu kırmızı ile boyadığım yerde benim tanjantım. Buradaki α açısı için sinüsün tanjanttan küçük olduğu gözüküyor. Neden gözüküyor? Çünkü şöyle bir üçgenim var. Sonra bir de şunun dışında şöyle bir üçgenim daha var. Hani üçgende benzerlik yaptığımız zaman, şöyle kırmızının pembeden büyük olduğunu görebiliriz. O yüzden pozitif değerler için tanα büyüktür sinα şeklinde bir genelleme yapabiliriz. Benzer bir durum kosinüs ve tanjant arasında da var…Hemen şuraya kotanjantı da çizelim. Mesela şu mavi ile çektiğim yer kosinüs iken, yukarıdaki yeşil ile boyadığım yer kotanjantın değerini ifade ediyor bana. Yine bu sağdaki gibi bir üçgenin üzerine göstereyim size. Yine bu pozitif değerler için cotα, cosα'dan daha büyük oluyor. Neden pozitif değerler için diyorum, çünkü aslında pozitif değerler için değil de mutlak değer olarak daha büyük oluyor demem daha doğru olur."



Şekil 27. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması ile ilgili çizimi

Bunun yanı sıra katılımcı Ö1 diğer katılımcılardan farklı olarak, 1. bölgede trigonometrik fonksiyonları karşılaştırmasının ardından |tanα|≥|sinα| ve |cotα|≥|cosα| şeklinde genellemeye ulaşmıştır (Bknz. Şekil 28). Ö1'in bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Aslında hep çizerek yapmayacağım. Şöyle bir genellemeye ulaşırım |tanα|≥|sinα|, |cotα|≥|cosα| diyelim. Bölgeye göre işaretlere göre mutlak değersiz halleri farklı farklı yorumlanabilir."*

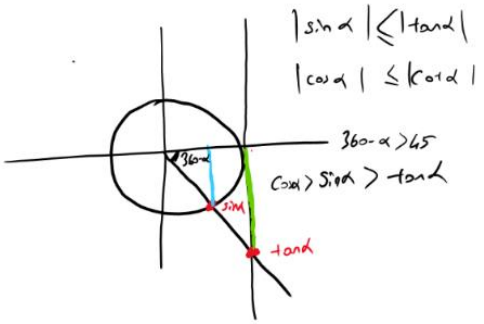


Şekil 28. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması ile ilgili genellemesi

Ö1, 2. 3. ve 4. bölgelerde de trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılmasından bahsederek genellemelere ulaşmıştır. Örneğin Şekil 29'da Ö1 koordinat düzleminde 4. bölgede birim çember içerisinde 45º'den büyük bir (360-α) açısı almış ve bu açının trigonometrik fonksiyon değerlerini göstermiştir. Dik üçgen ile ulaştığı genellemeyi kullanarak ve 4. bölgede sinα ve tanα'nın negatif değerli olduğunu göz önüne alarak sinα'nın tanα'dan büyük olduğu, cosα'nın pozitif olması nedeniyle de ikisinden de büyük olduğunu belirtmiştir. Ö1'in bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Mesela dördüncü bölge bunun için güzel bir örnek olabilir. Dördüncü bölgeden bir tane açı aldım, 360-α > 45° diyelim. Şimdi ben kosinüsün yine şu noktanın apsisi olduğunu biliyorum. Yani şuradaki uzunluğun değerine sahip. Şöyle tanjantını çizeyim, şu kısım bunun ordinatı tanα'yı veriyor bana. Şu kısmın ordinatı da bana sinα'yı veriyor. Yani şu mavi ile çizdiğim uzunluğun negatif değeri sinα'yı verirken, yeşil ile çizdiğim uzunluğun negatif değeri bana tanα'yı veriyor. Yine mutlak değer olarak baktığımızda tanα sinα'dan büyük, üçgendeki benzerlikten görebiliyoruz. Ama burada negatif değerler aldığı için artık sinα > tanα*

diyebiliriz. Şimdi şöyle ki burası zaten dördüncü bölge olduğu için sinα ve tanα negatif, cosα pozitif. Cosα pozitif olduğu için otomatikman sinα'dan da büyük olmuş oluyor."



Şekil 29. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması ile ilgili çizimi-2

Genel olarak bakıldığında, Ö1, Ö2 ve Ö3'ün birim çember üzerinde alınan bir açının değiştirilmesi sonucu trigonometrik fonksiyonların değerlerinin değişimini açıklayarak birbiri ile karşılaştırabildiği görülmüştür. Katılımcı Ö3'ün diğer katılımcılara ek olarak, trigonometrik fonksiyonların değişimi ve karşılaştırmasını incelerken, trigonometrik özdeşlikleri kullanarak yorumda bulunması Ö3'ün denklem ve eşitliklerden yararlandığını göstermektedir. Katılımcı Ö1'in ise trigonometrik fonksiyonların açı değerlerini karşılaştırırken birim çember içerisinde benzer üçgenleri şeklin dışına taşıyarak açıklamada bulunması, ardından koordinat sisteminde bölgelere göre trigonometrik fonksiyonların kıyaslanması ile ilgili genellemelere ulaşması, Ö1'in bu bağlamda AB'sinin diğer katılımcılara göre daha kapsamlı olduğunu göstermektedir. Ö4'ün ise trigonometrik fonksiyonları karşılaştırmayı hatırlamadığını ifade etmesi bu bağlamda AB'sinde eksiklikler olduğunu ortaya koymaktadır.

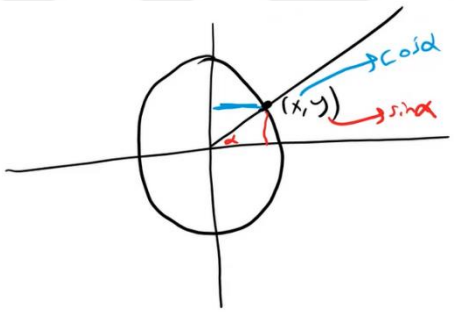
4.1.2.2.4. Bir Açının Trigonometrik Değerlerinin Dar Açı Cinsinden Yazılması

Katılımcıların bir açının trigonometrik değerlerinin dar açı cinsinden yazılması konusundaki alan bilgilerini incelemek amacıyla katılımcılardan, birim çember üzerinde 4 farklı bölgede aldıkları bir açının, çemberi kestiği noktaların x ve y bileşenlerinin, trigonometrik fonksiyonlar cinsinden ifadesini yazmaları istenmiştir. Bu bağlamda Ö1 ve Ö2 herhangi bir bölgede aldıkları açının çemberi kestiği noktanın x bileşeninin açının kosinüs değeri, y bileşeninin açının sinüs değeri olduğunu dik üçgen yardımıyla açıklarken, Ö3'ün sadece birinci bölge için bileşenleri açıklayabildiği, diğer bölgeler için ise ezber bilgisini kullanarak cevap verdiği görülmüştür. Ayrıca Ö1, Ö2 ve Ö3'ün verilen bir açının trigonometrik değerini dar açı cinsinden ifade ederken kullandıkları bir yöntemden

bahsetmişlerdir. Ö1 ve Ö2'nin uyguladıkları yöntemi pratik olması sebebiyle kullandıkları ve bu yöntemin nereden geldiğini bildikleri tespit edilirken katılımcı Ö3'ün ise bu yöntemi ezbere uyguladığı görülmüştür. Bunun yanı sıra katılımcı Ö4 birim çember üzerinde alınan bir açının çemberi kestiği noktanın koordinatlarının, trigonometrik fonksiyonlar cinsinden karşılığını nasıl belirleyeceğini unutmuş ve verilen bir trigonometrik fonksiyonun değerlerini dar açı cinsinden yazma konusunu özdeşlikler konusu ile karıştırmıştır.

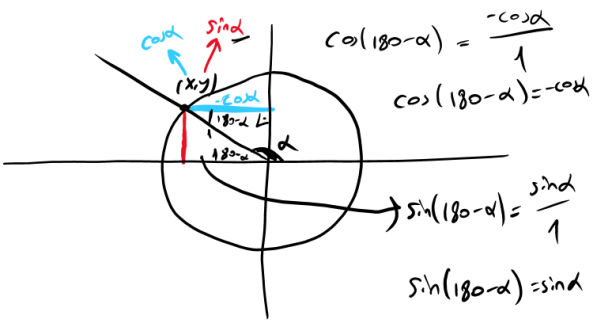
Katılımcı Ö1'in cevabı incelendiğinde Ö1, 1. bölgede birim çember üzerinde α açısı alarak bu açının çemberi kestiği noktanın x bileşenini cosα, y bileşenini sinα olarak belirtmiş ve şöyle bir söylemde bulunmuştur (Bknz. Şekil 30):

> *"Şöyle bir birim çember çiziyorum. Birinci bölgede bir açı alıyorum. Bu kestiği noktanın (x,y) olduğunu ifade ediyorum. Yani bunu şu şekilde ifade etmiştim, bu kırmızı uzunluğun sinüs olduğunu dolayısıyla bu ordinatı sinα diyelim. Aynı şekilde bu noktanın y eksenine olan uzaklığının da kosinüs olduğunu dolayısıyla apsisin de cosα olduğunu belirtirim."*



Şekil 30. Ö1'in birim çember üzerinde 1. bölgede aldığı noktanın koordinatlarını trigonometrik fonksiyonlar cinsinden gösterdiği çizimi

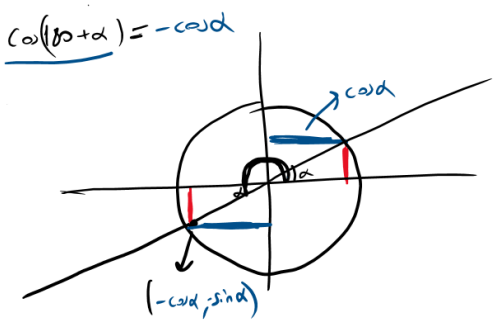
Ö1, 2. bölgede birim çember üzerinde α açısı almış ve bu açının çemberi kestiği noktanın bileşenlerinin dik izdüşüm uzunluklarını çizerek x bileşeninin (mavi ile çizilen) –cosα, y bileşeninin (kırmızı ile çizilen) sinα birim olduğunu belirtmiştir (Bknz. Şekil 31). Bunun yanında α açısının bütünleri olan (180-α) açısını dik üçgenlerde taşıdıktan sonra mavi kenarlı dik üçgende cos(180-α) trigonometrik değerinin dik üçgende kosinüsün tanımından $-\frac{cos\alpha}{1}$ 'e yani –cosα'ya eşit olduğunu göstermiştir. Benzer şekilde kırmızı kenarlı dik üçgende de sin(180-α) trigonometrik değerinin eşitinin sinx olduğunu göstermiştir.



Şekil 31. Ö1'in birim çember üzerinde cos(180- α)=-cosα ve sin(180-α)=sinα ispatı

Ö1 benzer şekilde diğer bölgelerde de noktanın x ve y bileşenlerini trigonometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edebilmiştir. Örneğin Şekil 32'de görüldüğü gibi ilk olarak 1. bölgede bir α açısı alarak bu açının çemberi kestiği noktanın x bileşenin cosα, y bileşenin sinα şeklinde tanımladıktan sonra α açısını uzatarak 3. bölgede bir (180+α) açısı oluşturmuştur. Bu açının çemberi kestiği noktadan eksene dik izdüşüm uzunluklarını çizerek 1. ve 3. bölgedeki üçgenlerde benzerlik kuralını uygulayarak noktanın x bileşenini –cosα, y bileşeni sinα şeklinde ifade etmiştir. Bu bağlamada cos(180+α)'in eşitinin –cosα, sin(180+α)'in eşitinin sinα olduğunu göstermiştir. Ö1'in bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

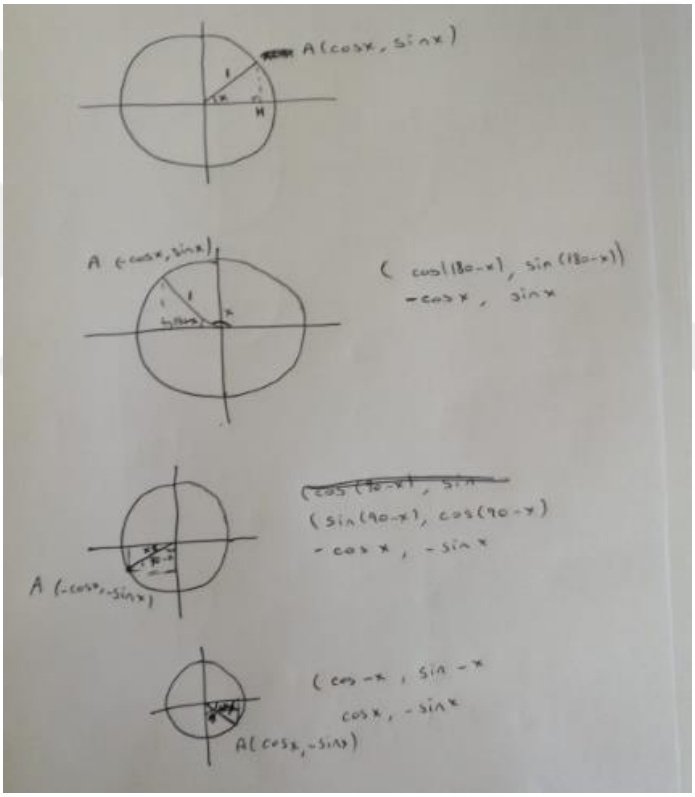
> *"Direkt benzerlikle şunu söyleyebilirim şu açı (180+α) açısı ve bunun kosinüsü buradaki ifadenin apsisi. Ve o apsis de y eksenine olan uzaklığın negatifidir. Yani bu mavi ile gösterdiğim yerin ben cosα olduğunu biliyorum. O zaman burası artık (–cosα,-sinα) noktasıdır diyerek bir gösterim yapabilirim. Bu ifade direk –cosα'ya eşittir diye söylerdim."*



Şekil 32. Ö1'in 3. bölgede birim çember üzerinde aldığı noktanın koordinatlarını trigonometrik fonksiyonlar cinsinden gösterdiği çizimi

Ö2, Ö1'e benzer şekilde Şekil 33'de görüldüğü gibi tüm bölgelerde noktanın bileşenlerini trigonometrik fonksiyonlar cinsinden ifade etmiştir. Örnek olarak Ö2'nin 2. bölge üzerinde aldığı bir açının çemberi kestiği noktanın bileşenlerini trigonometrik fonksiyonlar cinsinden ifade ederken ki söylemi aşağıdaki gibidir:

> *"2. bölgede aldığım açıyı x olarak aldım. Yani bu geniş açı onu belirteyim. Kalan 180°'ye tamamlama kısmına da (180-x) yazdım. Yine (180-x)'ten bir dik üçgen elde ettim. Aslında bunu ezber olarak koyabilirdik ama koymadım. Bu dik üçgende de benim A noktam (-cosx, sinx) geldi. Yani direkt kosinüs ve sinüsün işaretleriyle ilgili. Benim x'im yani apsisi cosx, ordinatı sinx ama apsis ve ordinat o bölgedeki x ve y nin işaretiyle yazılıyor."*

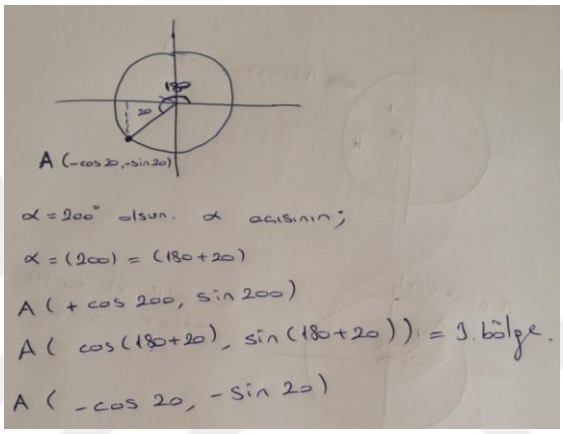


Şekil 33. Ö2'nin birim çember üzerinde aldığı noktanın koordinatlarını trigonometrik fonksiyonlar cinsinden gösterdiği çizimi

Ö2 örnek olarak Şekil 34'te görüldüğü gibi birim çember üzerinde 3. bölgede 200º'nin çemberi kestiği noktanın koordinatlarının trigonometrik fonksiyonlar cinsinden değerlerini dar açı cinsinden nasıl belirlediğini açıklamıştır. Ö2 ilk olarak 200º'nin çemberi kestiği noktayı A noktası olarak isimlendirerek x bileşenini cos200º, y bileşenini sin200º şeklinde trigonometrik fonksiyonlar cinsinden yazmıştır. Ardından Ö2, 200º'yi (180+20) şeklinde parçaladıktan sonra

3. bölgede kosinüs ve sinüs fonksiyonunun negatif işaretleri olduğunu belirlemiştir. Son olarak x bileşenini –cos20, y bileşeni –sin20 olarak dar açılı şekilde yazmıştır. Ö2'nin bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"(-cos20, -sin20) olarak 3. bölgeyi belirtebilirim. Ya da (cos200, sin200) olarak da belirtebilirim. Neden (-cos20, -sin20) dedim? Bunu geçen görüşmede de söylemiştim. A noktasının koordinatı bulunduğu bölgede kosinüs ve sinüsün işaretiyle ifade ediliyor. 200 nedir, cos(180+20)'dir. 3. bölgede cos20 eksi ve sin20 yine eksi olarak ifade edilir. Dolayısıyla -cos20 ve -sin20 olarak belirtebilirim."*

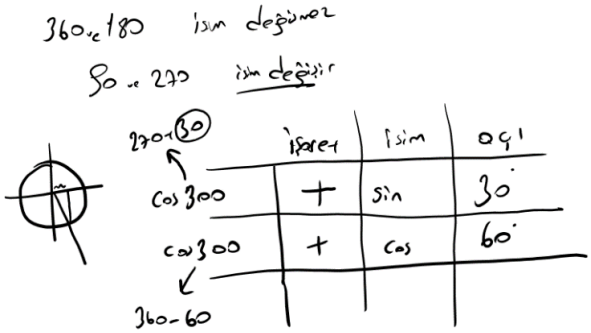


Şekil 34. Ö2'nin 200º'nin çemberi kestiği noktanın koordinatlarını trigonometrik fonksiyonlar cinsinden gösteren çizimi

Katılımcı Ö1, Ö2 ve Ö3 bir açının trigonometrik değerini dar açı cinsinden karşılığını bulurken pratik olması nedeniyle kullandıkları bir yöntemden bahsetmişlerdir. Şekil 35'te görüldüğü gibi Ö1 ve benzer şekilde diğer katılımcılar, bu yöntemde ilk olarak verilen açının 90º, 180º, 270º ve 360º kullanılarak iki derecenin toplamı şekilde yazılması gerektiğini belirtmiştir. Bu yazılımlarda 90º ve 270º kullanılırsa ayrı (trigonometrik fonksiyonunu ismi değişir), 180º ile 360º kullanılırsa ayrı (trigonometrik fonksiyonun ismi değişir) bir uygulama yapmışlardır. Aşağıda Ö1'in 300º için iki farklı şekilde trigonometrik değeri dar açı cinsinden yazdığı bir örnek verilmiştir (Bknz. Şekil 35). Ö1'in bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Mesela şöyle cos300'ün karşılığı nedir? İlk önce cos300 denen ifadenin sayısal değerinin işareti nedir? Yaklaşık 300°'lik bir açı çizip ondan sonra kosinüsün izdüşümü ne burada, yani x ekseninin pozitif tarafında kalıyor artı. O zaman bunun işaretinin artı oldu. İsmi de artık açıyı nasıl parçalamak istiyorsan, eğer (270+30) şeklinde parçalıyorsa isim değişiyor yani burası sinüs oluyor. Bu 30°'de buraya geliyor. Yani bu cos300'ün karşılığı sin30'muş.*

Ya da bu 300'ü eğer (360-60) şeklinde de ifade edebilirsin. İşte işaretim yine aynı, ismim değişmeyecek ve açımda 60°."



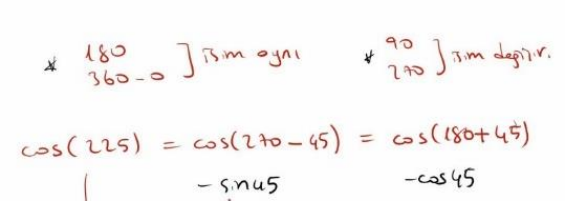
Şekil 35. Ö1'in bir açının trigonometrik değerini dar açı cinsinden karşılığını bulurken uyguladığı yöntemi

Benzer şekilde Ö3, Şekil 36'da görüldüğü gibi 225º için iki farklı şekilde açının trigonometrik değerini dar açı cinsinden oluşturmuştur. Ancak farklı olarak Ö3, kullandığı bu yöntemi ezberlediğini, uyguladığı kuralların nereden geldiğini bilmediğini ifade ederek tahminde bulunmuştur. Katılımcı Ö3 ile geçen diyalog aşağıdaki şekildedir:

Ö3: Mesela örnekliyorum, cos225'i şöyle yazıyorum; kosinüs diyorum 270'den çıkartabilirim. Çünkü 225 şurada ya, şurada 3. bölgede. Bir 180'den bu tarafa gidebilirim, bir de 270'den bu tarafa gidebilirim. Şuradan gideyim, 270-45 diyorum. Bir de cos(180+45) diyorum. Sonra şöyle diyorum bu ifade benim için bir kere şu bölgede mi? 3. bölge. 3. bölgede kosinüs benim için negatif. Şöyle yapıyorum, dar açı kısmını alıyorum. 270'de isim değişiyor diyorum, bu sin45 oluyor. Bu da 180'de isim aynı kalacak diyorum, cos45 oluyor. Ama 180'de neden isim değiştirmiyorum, 270'de neden isim değiştiriyorum bunu hiç düşünmedim.

Araştırmacı: Sebebini bilmiyorsun, ezberden söylediğin bir şey mi o zaman?

Ö3: Evet şu ana kadar ezberden söyledim. Şu iki bilgi bende ezber…Yani böyle bir bilgim yok. Neden 180'de ismi aynı tutuyorum ama bunda değiştiriyorum diye bir bilgi yok ama muhtemelen şeydendir, 180'den çıkardığımda...Üçgenden şöyle yapıyoruz ya, üçgenden şöyle çizdiğimde burası benim için α, şurası 90-α. Bir üçgen içerisinde düşündüğüm için mesela cosα = sin(90-α) aslında buradan geliyor bence.



Şekil 36. Ö3'ün bir açının trigonometrik değerini dar açı cinsinden karşılığını bulurken uyguladığı yöntemi

Ö4 ise herhangi bir açının trigonometrik değerini dar açı cinsinden yazılması konusunu tam olarak hatırlayamamış, trigonometrik özdeşlikler konusu ile karıştırmıştır. Aşağıdaki diyalogda da görüldüğü gibi Ö4'ten örnek olarak sin130º'yi 1. bölgeye taşıması istenmiş ve sin(180-x) = sinx eşitliğini hatırlayıp hatırlamadığı sorulmuştur. Ö4'ün AB'sinde var olan eksiklikler nedeni ile bu soruları cevaplandıramadığı görülmüştür. Bununla ilgili diyalog aşağıdaki gibidir:

> *Araştırmacı: 2. bölgede olan açıları, 1. bölgeye taşıma işlemini yapıyorduk. Bunu neden, nasıl yapıyorduk? Bu konu hakkında neler hatırlıyorsun?*
>
> *Ö4: Bunun sebebinin özel trigonometrik oranları öğrenciye verirken 0, 90, 180, 270, 360 gibi değerlerden bahsediyoruz. Genelde bu çevirme işlemleri de bu özel değerler cinsinden yazılabilecek açılar olması sebebi ile olabileceğini düşünüyorum. Bunun öğrencinin bilmediği kavramdan, bildiği kavrama yönlendirme amacıyla yapıldığını düşünüyorum.*
>
> *Araştırmacı: Tam olarak nasıl yapıldığını hatırlıyor musun?*
>
> *Ö4: Tam olarak özdeşlikleri hatırlamıyorum.*
>
> *Araştırmacı: Peki, sin130^{o} değerini 1. bölgeye taşıyabilir misin?*
>
> *Ö4: Sanırım bunu yapmak için toplam fark formüllerini kullanmam gerekebilir.*
>
> *Araştırmacı: Peki, sin(180-x)= sinx eşitliğini hatırlıyor musun?*
>
> *Ö4: Evet. Fakat özdeşlikleri şu an hatırlamıyorum. Bunu toplam fark üzerinden yorumlayabileceğimi düşünüyorum. Özdeşliğin tam olarak nasıl olduğunu hatırlamıyorum. Özdeşliği nerden bulabilirim diye düşündüğümde aklıma toplam fark geliyor. 360-40, 270+50 gibi değerler direkt 1. bölgeye çıkabiliyordu. Fakat bu problemin bahsettiğimiz özdeşliklerle çözülebileceğini düşünüyorum.*

Genel olarak bakıldığında, katılımcı Ö1 ve Ö2'nin herhangi bir bölgede aldıkları açının çemberi kestiği noktanın bileşenlerini trigonometrik fonksiyonlar cinsinden ifade

edebilmeleri, verilen bir açının trigonometrik değerini dar açı cinsinden ifade ederken uyguladıkları yöntemi açıklayabilmeleri Ö1 ve Ö2'nin bu bağlamda AB'lerinin kapsamlı olduğunu göstermektedir. Katılımcı Ö3'ün ise sadece birinci bölge için bileşenleri açıklayabilmesi, diğer bölgeler için ise ezber bilgisini kullanarak cevap vermesi ve verilen bir açının trigonometrik değerini dar açı cinsinden ifade ederken uyguladığı yöntemin nereden geldiğini bilmeden ezbere uygulaması Ö3'ün bu bağlamda AB'sine tam olarak hakim olmadığını ortaya koymaktadır. Katılımcı Ö4'ün ise birim çember üzerinde alınan bir açının çemberi kestiği noktanın koordinatlarının, trigonometrik fonksiyonlar cinsinden karşılığını nasıl belirleyeceğini unutması ve bir trigonometrik fonksiyonun değerlerini dar açı cinsinden yazma konusunu özdeşlikler konusu ile karıştırması nedeniyle Ö4'ün AB'sinde eksiklikler olduğu saptanmıştır.

4.1.2.2.5. Trigonometrik Özdeşlikler

Katılımcıların trigonometrik özdeşlikler konundaki bilgileri incelendiğinde katılımcılara ilk olarak özdeşlik denildiğinde akıllarına ne geldiği sorulmuştur. Katılımcıların cevapları incelendiğinde Ö1 özdeşliği 'denklemin özel bir formu, iki ifadenin birbirine özdeş olması' olarak tanımlayıp örnek vererek açıklarken Ö2 iki kare farkı, Ö3 ise tam kare özdeşliğinden hareketle özdeşliği Ö1'e benzer şekilde açıklamışlardır. Ö3 denklem ve özdeşlik açıklamasını detaylandırarak denklemde çözüm kümesi kavramının var olduğunu, özdeşlikte ise karşılıklı eşitlik sağlandığı için çözüm kümesinden bahsedilemeyeceğini ifade etmiştir. Ö4 ise özdeşlik kelimesini 'eş değer olma' şeklinde özetlemiş ve farklı bir disiplinden örnek vererek özdeşliklerin eşit olduğu ifadelerin yerine kullanılabilmesi nedeniyle eş anlamlı kelimelerle benzerliğinden bahsetmiştir (Bknz. Tablo 22).

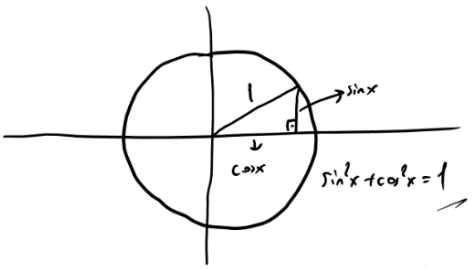
Tablo 22

Katılımcıların özdeşlik kavramına ilişkin cevapları

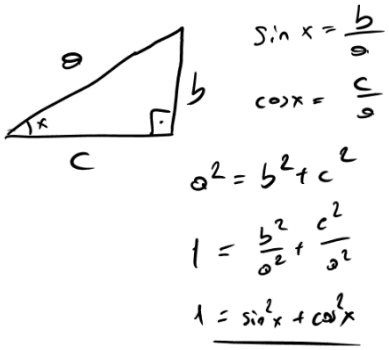
Katılımcılar	**Cevapları**
Ö1	*"Özdeşlik dendiğinde aklıma ilk olarak denklem geliyor, denklemin özel bir formu gibi bir şey geliyor aklıma. Özdeşlik şudur, iki ifadenin tamamen birbirine özdeş olması durumudur. İfadede verilen bağımsız değişkene ne değer verirsek verelim bu özdeşlik her zaman sağlar. Çünkü bu iki ifade birbirine denktir. Atıyorum, 2x= x+x gibi."*
Ö2	*"Örnek üzerinden yola çıkalım. Sonra tanıma geçelim.* $x^2 - 1 = (x - 1).(x + 1)$. *Yani nedir bu, iki kare farkı özdeşliğidir. Bir eşitlik nihayetinde. Bu eşitliğin*

	sağ ve sol tarafı yani eşitliğin iki tarafı da harf ya da sayılarla ifade ediliyor. Harf ya da sayısal değerlerle ifade edilen eşitlik, bu örnekten yola çıktığımızda özdeşlik olarak adlandırılıyor diyebiliriz."
Ö3	*"Eee özdeşlik denilince, açılımlar geliyor yani* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *gibi. Yani, a ve b değerlerine herhangi bir şekilde bir şey dediğimde asla denklemin değişmeyeceği şekil. Denklemde x diyelim değişkeninemdeğerler veriyorum ve her zaman bu değerleri sağlamayabiliyor. Mesela o yüzden denklemin çözüm kümesi nedir cümlesini kuruyoruz. Ama özdeşliğin çözüm kümesi nedir diye bir şey olmuyor. Özdeşlik ikisinin de eşliğini gösteriyor. Her zaman doğruluğunu gösteriyor."*
Ö4	*"Eş değer olma diyebilirim. Aslında aklıma direkt olarak trigonometrik özdeşlikler geliyor. Doğruluğunu tam olarak kestiremiyorum ama aklımda eş anlamlı kelimeler geldi. Yerine kullanabildiğimiz şeyler. Matematik dışı bir örnek olacak ama bunların bir özdeşlik olabileceğini düşünüyorum."*

Katılımcıların cevapları detaylı incelendiğinde Ö1'in $sin^2x + cos^2$x = 1 özdeşliğini, birim çember üzerinde ve dik üçgen üzerinde olmak üzere iki farklı şekilde oluşturduğu görülmüştür. İlk olarak Şekil 37 incelendiğinde, Ö1 birim çember içerisinde bir x açısı alarak sinx ve cosx fonksiyonlarını tanımladıktan sonra dik üçgende Pisagor teoremini uygulayarak $sin^2x + cos^2$x = 1 özdeşliğini oluşturmuştur. Ö1'in Şekil 38'de verilen $sin^2x + cos^2$x = 1 özdeşliği için oluşturduğu diğer gösterimi incelendiğinde ise öncelikle Ö1, farklı bir dik üçgen çizerek üçgenin bir dar açısını x, kenar uzunluklarını a, b ve c şeklinde isimlendirmiştir. Ö1, dik üçgenin kenar uzunlukları oranlayarak $sinx = \frac{b}{a}$ ve $cosx = \frac{c}{a}$ şeklinde fonksiyonlarını tanımladıktan sonra benzer şekilde Pisagor teoreminden hareketle $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini oluşturmuştur. Eşitliğin her tarafını a'ya bölmüş ve oluşan $\frac{b}{a}$ ifadesinin yerine sinx, $\frac{c}{a}$ ifadesinin yerine de cosx yazarak $sin^2x + cos^2$x = 1 özdeşliğinin birim çember ve dik üçgen üzerinde olmak üzere iki farklı şekilde gösterilmesini sağlamıştır.

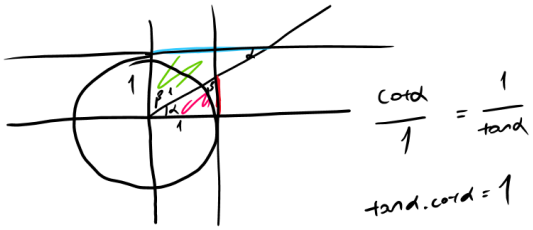


Şekil 37. Ö1'in birim çember üzerinde $sin^2x + cosx^2$=1 özdeşliğini gösterdiği çizimi

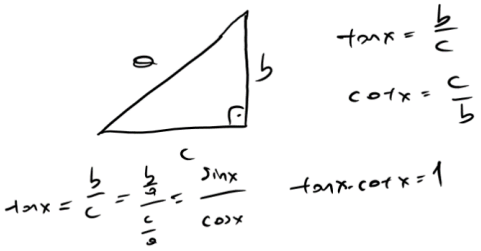


Şekil 38. Ö1'in dik üçgeni kullanarak $sin^2x + cosx^2$=1 özdeşliğini gösterdiği çizimi

Ö1, $sin^2x + cos^2$ x = 1 özdeşliğine benzer şekilde $tanx.cotx = 1$ özdeşliğini de birim çember ve dik üçgen üzerinde olmak üzere iki farklı şekilde oluşturmuştur. İlk olarak Şekil 39 incelendiğinde Ö1, birim çember içerisinde bir x açısı alarak tanx ve cotx fonksiyonlarını tanımladıktan sonra pembe üçgendeki x açısının tümlerini β şeklinde isimlendirmiş ve x açısının ters açısını yeşil üçgende x olarak belirtmiştir. Pembe ve yeşil üçgende benzerlik yaparak β açılarının karşısındaki kenarlar ile x açısının karşısındaki kenarları oranlayarak $tanx.cotx = 1$ özdeşliğini elde etmiştir. Ö1'in Şekil 40'ta verilen diğer gösterimi incelendiğinde ise öncelikle Ö1, farklı bir dik üçgen çizerek üçgenin bir dar açısını x, kenar uzunluklarını a, b ve c şeklinde isimlendirmiştir. Ö1, dik üçgenin kenar uzunlukları oranlayarak $tanx = \frac{b}{c}$ ve $cotx = \frac{c}{b}$ şeklinde fonksiyonlarını tanımladıktan sonra $tanx.cotx = 1$ olduğunu ifade etmiştir.



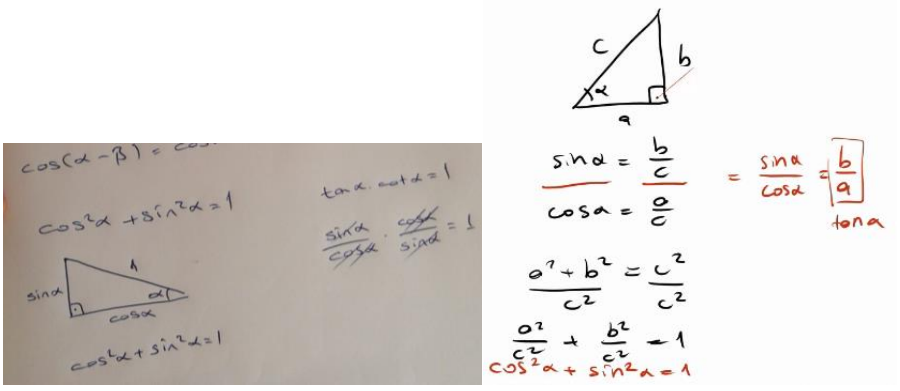
Şekil 39. Ö1'in birim çember üzerinde $tanx.cotx = 1$ özdeşliğini gösterdiği çizimi

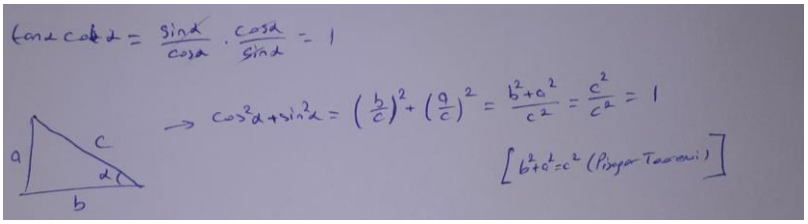


Şekil 40. Ö1'in dik üçgeni kullanarak $tanx.cotx = 1$ özdeşliğini gösterdiği çizimi

Katılımcı Ö2, Ö3 ve Ö4 de Ö1'e benzer şekilde $sin^2x + cos^2 = 1$ ve $tanx.cotx = 1$ özdeşliklerini dik üçgen yardımı ile oluşturarak göstermiştir (Bknz. Şekil 41). Örnek olarak Ö2'nin bununla ilgili açıklaması aşağıdaki gibidir:

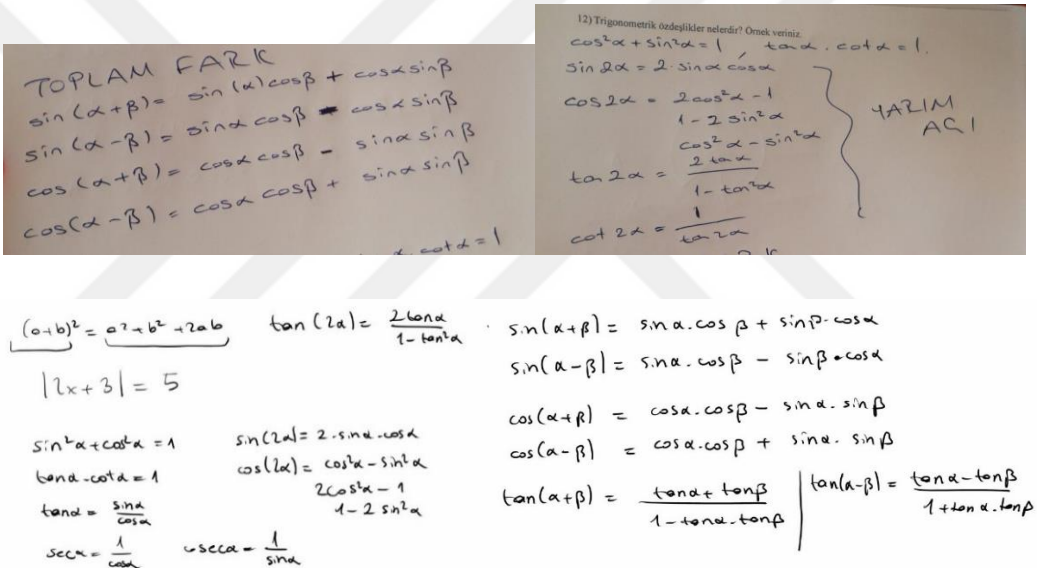
> *"Bir birim çemberdeki dik üçgenden bahsetmiştim geçen ders. Karşı kenarın sinüs, komşu kenarın kosinüs olduğundan bir alfa açısı için. Zaten birim çemberde hipotenüsün bir olduğunu biliyoruz. Hemen bir Pisagor yaptığımızda oradan* $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$ *gelecektir. Bu bir dik üçgende yine tan∝ ve cot∝'nın sin/cos, cos/sin olduğunu biliyoruz. Bu iki ifadenin çarpımının da 1 olduğunu biliyoruz. Bu ikisini gösterebilirim. Ama yarım açı, dönüşüm, toplam fark tabi biraz daha ezber durumda."*





Şekil 41. Katılımcıların trigonometrik özdeşlikler ispatları

Ek olarak görüşmelerde katılımcıların yarım açı ve toplam fark formüllerinin de birer özdeşlik olduğunu ifade etmeleri üzerine bu bağlamda katılımcı Ö1, Ö2 ve Ö3'ün yarım açı ve toplam fark formüllerini bildikleri görülmüştür (Bknz. Şekil 42).

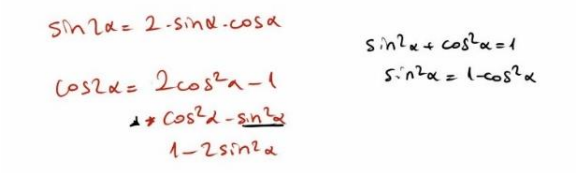


Şekil 42. Katılımcıların bildikleri yarım açı ile toplam fark formülleri

Ayrıca katılımcı Ö1, Ö2 ve Ö3'ün yarımaçı ve toplam fark formüllerinin, zihinlerinde birbirinin yerine yazarak oluşturulduklarının farkında oldukları görülmüştür. Örneğin katılımcı Ö3, sin2α yarım açı formülünü, sin(α+β) toplam fark formülünden elde edildiğini, cos2α yarımaçı formülünün karşılığının ise $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ özdeşliğinde sinx ve cosx ifadelerinin eşitinden oluşturulduğunu göstermiştir (Bknz. Şekil 43). Katılımcı Ö3'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Şimdi sin2α=2.sinα.cosα oluyor. Bu şeyden geliyor, α+β'dan. Aynı burada tanjant da yaptığım gibi sinüsün α+β açılımında yapıyorum, aynısı geliyor. Oradan aklımda kalıyor. Kosinüs de zihnimde hep şey olarak var; cos2α = 2cos²α -1, böyle aklımda kalmış. En çok bunu kullanıyorum ben galiba. Sin²α + cos²α = 1 ya, buradan sin²α'yı çekince 1-cos²α yazıyoruz.*

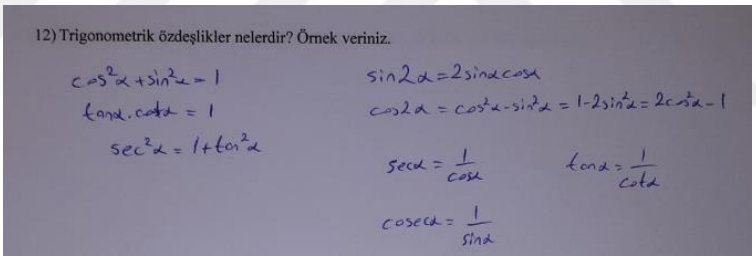
Mesela şuradaki sin²α'nın yerine, bunu yazdığımda şu denklemi oluşturuyorum, ya da cos²α'yı çekince, cos²α'nın yerine sinüs değerini yazdığımda bunu oluşturuyorum."



Şekil 43. Ö3'ün cos2α'nın eşitini gösterdiği örneği

Katılımcı Ö4'ün ise yarım açı formüllerini bildiği ancak diğer katılımcılardan farklı olarak toplam fark formüllerini hatırlamadığı görülmüştür (Bknz. Şekil 44). Bu nedenle Ö4'ün AB'sinde eksiklikler olduğu tespit edilmiştir. Ö4'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

"Yani çok gelmedi aklıma. Toplam farkları çok hatırlamıyorum o yüzden hiç girmicem oraya. Nerede pozitif nerede negatif aklımda değil."



Şekil 44. Ö4'ün bildiği trigonometrik özdeşlikler ve formüller

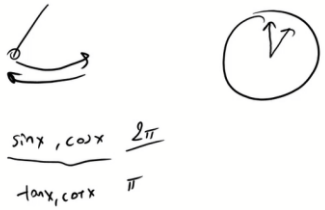
Genel olarak bakıldığında tüm katılımcıların $sin^2x + cos^2 = 1$, $tanx.cotx = 1$, $tanx = \frac{1}{cotx}$, $cotx = \frac{1}{tanx}$, $secx = \frac{1}{cosx}$, $cscx = \frac{1}{sinx}$ gibi trigonometrik özdeşlikleri bilmeleri ve dik üçgen üzerinde gösterebilmeleri AB'lerinin varlığına kanıt niteliğindedir. Buna ek olarak Ö1'in $sin^2x + cos^2 = 1$, $tanx.cotx = 1$ özdeşliklerini sadece dik üçgen üzerinde değil birim çember üzerindeki dik üçgenler yardımı ile de gösterebilmesi Ö1'in bu konu da daha derin ve geniş AB'sine sahip olduğunu göstermektedir. Bunun yanı sıra Ö1, Ö2 ve Ö3'ün yarım açı ve toplam fark formüllerini bildikleri ve zihinlerinde birbirinin yerine yazarak oluşturduklarının farkında oldukları görülmüştür. Ö4'ün ise yarım açı formüllerini bildiği ancak toplam fark formüllerini hatırlamadığı görülmüş bu nedenle Ö4'ün AB'sinde eksiklikler olduğu tespit edilmiştir.

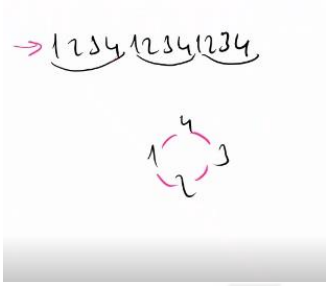
4.1.2.2.6. Trigonometrik Fonksiyonlarda Periyot

Katılımcıların periyot konusundaki bilgilerini incelemek amacıyla ilk olarak periyot denildiğinde akıllarına ne geldiği sorulmuştur. Genel olarak bakıldığında katılımcıların periyot kavramını 'tekrar etme' olarak tanımladıkları görülmüştür (Bknz. Tablo 23). Ö1 ve Ö4 periyodu 'ipin ucuna bağlı topun hareketi, saatin yelkovan hareket' gibi günlük hayattan tekrar eden örneklerle ve trigonometrik fonksiyonlarla açıklarken Ö2 periyodu farklı olarak 'bölüm, aralık' olarak nitelendirerek trigonometrik fonksiyonların tekrar ettiği aralıklardan örnekler vermiştir. Katılımcı Ö3 ise zihnindeki hatalı bilgisinden kaynaklı olarak periyodu sadece dairesel hareketi olan bir kavram olarak kabul ederek yanlış tanımlamıştır.

Tablo 23

Katılımcıların periyot kavramına ilişkin cevapları

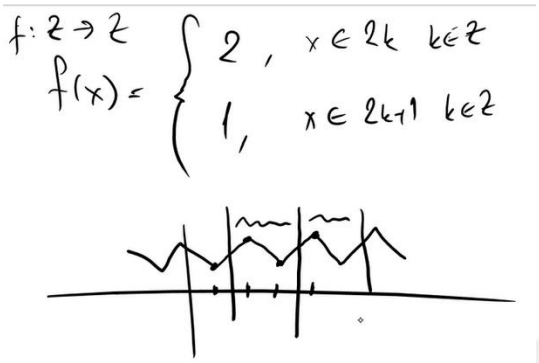
Katılımcılar	**Çizimleri**	**Cevapları**
Ö1		*"Periyot denince aklıma bir olayın belli bir zamanda veya ne ile tanımlanıyorsa belli bir uzunluk olabilir işte belli kiloda bir tekrar edebiliyor olması geliyor. Birimi söyleyen kişiye bağlı. Belli bir aralıkta bir şeyin tekrar etmesi durumuna periyot diyorum…Mesela fizikte kullanılan bir şey. Bir yer çekimsiz ortamda sürtünmesiz ortamda bir ipin ucundaki taşı bırakırız ve bu, şu şekilde bir hareket yapar. Bu hareket döngüsünde her bir bütününe bir periyot diyoruz. Ya da saatin mesela her 1 saatte 1 yelkovanının 12'nin üzerine gelmesi. Trigonometriden örnek verecek olursak mesela, sinx ve cosx'in her 2π'lik periyotta ya da 360°'lik periyotta bir kendi yaptıkları hareketleri tekrar etmesi. Tanjant ve kotanjantın her π ya da 180° periyotta bir kendini tekrar etmesi olarak ifade edebilirim."*
Ö2		*"Periyot bölüm demek aslında baktığımızda 1. Periyot, 2. Periyot. Bölüm anlamına geliyor asıl günlük tabirle. Periyodik fonksiyon belli aralıklarla belli bölümlerle fonksiyonun tekrar etmesi. Sinüs ve kosinüsün 0 ile 2π arasında,*

		tanjant ve kotanjantın 0 ile π arasında yani π aralık ve 2π aralık anlamına geldiğini düşünüyorum. Tekrar eden aralıklar anlamına geldiğini düşünüyorum periyodun."
Ö3		*"Periyot denince aklıma, belirli bir düzenli, tekrar eden, mod gibi. Modül aritmetikte mesela 1, 2, 3, 4 - 1, 2, 3, 4 diye gidiyor. Öğrenciye diyor ki: ''2526. Rakam nedir?'' gibisinden. Modda bu şekilde yan yana oluyor, doğrusal şekilde gidiyor. Ama periyotta daha dairesel bir şekilde devam ediyor. Zihnimde modüler aritmetik doğrusal, periyot dairesel gibi kalmış. 4 terimde bir sürekli başa geliyor. Periyot, eşit aralıkta eşit tekrarda aynı yere gelme durumu herhangi bir şey için."*
Ö4		*"Tekrarlama. Aslında konumuz trigonometri olduğu için aklıma direkt trigonometrik fonksiyonlar geliyor. Periyot diye baktığımızda her ayın aynı gününde maaşını alırsın, her gün aynı şeyleri yapan bir işin olduğunu düşünelim her gün aynı saatlerde aynı işi yaparsın. Veya fizikte tel sallama etkinliği vardır. Orda tel aynı hareketi tekrar eder gibi örnekler verilebilir."*

Periyot tanımının yanı sıra katılımcı Ö1 Şekil 45'te görüldüğü gibi bir fonksiyonun periyodik olmasını örnek vererek açıklamıştır. Ö1, tam sayılar kümesinden tam sayılar kümesine, x değeri çift tam sayılar için y değeri 2, x değeri tek tam sayılar y değeri 1 olan parçalı bir f fonksiyonu tanımlamış ve grafiğini çizerek göstermiştir. Ö1'in bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

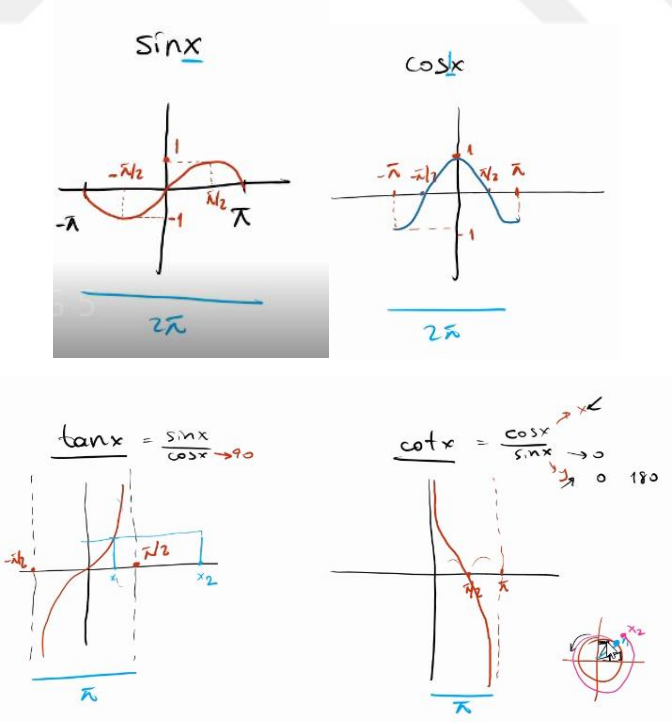
> *"...Burada anlatmak istediğim şey şu, eğer ben x'i çift seçersem fonksiyonum 2 çıktısını verecek, eğer tek seçersem fonksiyon bana 1 çıktısını verecek. Yani bu fonksiyon her iki tamsayı da bir kendi hareketini tekrarlayacak. Mesela bunu grafiğe dökersek şöyle bir şey olacak. X yerine 1 verdiğim zaman fonksiyonum 1 değerini alacak. 2 değerini verdiğimde 2'yi alacak, 3 verdiğimde 1 değerini, 4 verdiğimde 2 değerini verecek. Yani hep aynı hareketi*

bu şekilde devam ettiriyor olacak. Ne yapıyor bu, mesela herhangi bir yerden 2 birimlik kesit alalım. O aldığım kesitteki hareketi bundan sonraki 2 birimlik yerlerde de devam ettiriyor olacak."



Şekil 45. Ö1'in periyodik fonksiyon örneği

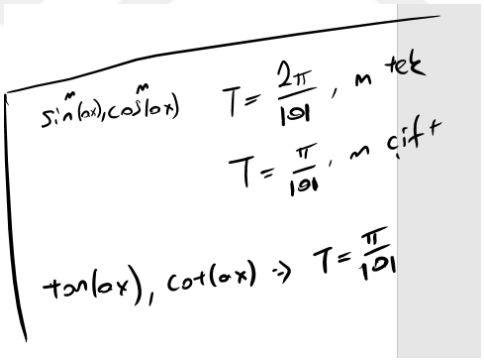
Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların periyotları ile ilgili bilgileri incelendiğinde ise sinx, cosx, tanx, cotx trigonometrik fonksiyonların periyotlarını bildikleri ve grafik üzerinden açıklayabildikleri görülmüştür (Bknz. Şekil 46).



Şekil 46. Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların periyotları ile ilgili çizimleri

Bunun yanında Ö1, Ö2 ve Ö3'ün sin(ax+b), cos(ax+b), tan(ax+b) ve cot(ax+b) tipindeki trigonometrik fonksiyonların periyotlarının hesaplanması için n ve a değişkenleri ile sinx, cosx, tanx, cotx trigonometrik fonksiyonlarının periyotları ile oluşturulmuş periyot formülünü bildikleri görülmüştür. Katılımcı Ö2 ve Ö3 periyot formülünü ezberledikleri şekilde açıklarken Ö1 periyot formülünde n ve a değişkenlerinin kullanılma sebebini örnek vererek açıklamıştır. Bu bağlamda Ö1'in cevabı detaylı incelendiğinde, sinax ve cosax tipindeki trigonometrik fonksiyonlar için m tek ise $\frac{2\pi}{a}$, m çift ise $\frac{\pi}{a}$; tanax ve cotax tipindeki trigonometrik fonksiyonlar için ise $\frac{\pi}{a}$ şelinde kullanılan periyot formülünü yazmıştır (Bknz. Şekil 47). Ö1'in periyot formülü ile ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

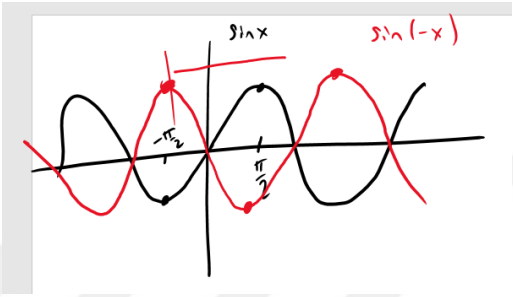
> *"Sinx ve cosx için periyot şöyle hesaplanıyor. Eğer üsleri tek ise periyotları* $\frac{2\pi}{a}$ *. Tabi burada a'yı tanımlamamız gerekiyor. Burada a'dan kastımız x'in katsayısı. X'in katsayısı dışında herhangi bir şey eklemiyoruz. Eğer üsleri çift ise* $\frac{\pi}{a}$ *şeklinde olduğunu söyleyebilirim. Tanjant ve kotanjant için de bu muhabbet var. Burada direkt üsten bağımsız olarak* $\frac{\pi}{a}$ *olarak söyleyebiliriz. Hani bu kuralları var. Periyotları buradan hesaplıyorum."*



Şekil 47. Ö1'in periyot formülü ile ilgili çalışma kağıdına yazdığı

Ö1 periyot formülünde geçen a değişkeninin formüle nasıl bir etkisi olduğunu göstermek için a=1 seçerek sinx fonksiyonunu siyah ile, a=-1 seçerek sin(-x) fonksiyonunu kırmızı ile çizmiş ve birbirinin simetriği olduğunu x ekseninden seçtiği değerlerle göstermiştir (Bknz. Şekil 48). Ardından sinx ve sin(-x) fonksiyonlarının grafiğinin aynı hareketi yapması nedeni ile a değerinin değişmesinin fonksiyonun periyodunu değiştirmediğini göstermiştir. Ö1'in bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

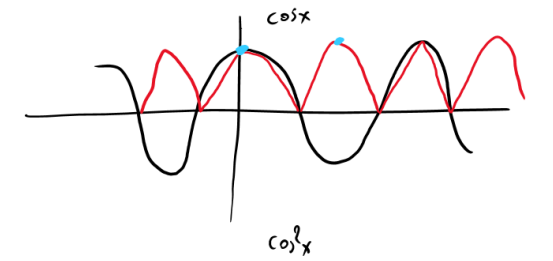
"Mesela sinx'e göre gösterelim. Sinx 'in grafiği bu. Ben mesela sinx'de x yerine $\frac{\pi}{2}$ *yazarsam 1 diğerine ulaşıyorum,* $-\frac{\pi}{2}$ *verirsem -1 değerine ulaşıyorum. Eğer ben gidip bunu sin(-x) için yaparsam şöyle bir değişiklik oluyor. Grafiği şu şekilde simetri alınmış gibi oluyor. Kırmızı hali siyah halinin x eksenine göre simetrisi alınmış gibi oluyor. Bu benim yaptığım periyodik harekette bir değişiklik yaşamama sebep olmuyor çünkü yine aynı dalga hareketini koruyor. Periyodu etkileyen bir şey olmuyor o yüzden formülde |a| ile gösteriyoruz."*



Şekil 48. Ö1'in periyot formülünü açıkladığı örneği

Ö1 periyot formülünde geçen n değişkeninin formüle nasıl bir etkisi olduğunu göstermek için ise n=1 seçerek cosx fonksiyonu siyah ile n=2 seçerek cos^2x fonksiyonunu kırmızı ile çizmiş ve cos^2x'in, cosx grafiğinin x ekseninin altında kalan kısmının x eksenine göre simetriği alınmış hali olduğunu x ekseninden seçtiği değerlerle göstermiştir (Bknz. Şekil 49). Ardından Ö1, iki fonksiyona bakıldığında n değerinin değişmesinin periyodu değiştirerek yarıya indirdiğini ifade etmiştir. Ö1'in bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

"Şu üs olayına açıklık getirecek olursak, şöyle bir durum söz konusu orada da. Mesela ben üssün çift olduğu bir örnek alayım. Mesela cos^2x. cos^2x*'i aldığımız zaman şöyle bir değişiklik geliyor hani bu dalga hareketleri tam kalmıyor biraz daha daralıp genişliyor. Onu tam gösteremeyeceğim ama benim için kritik olan nokta şu; aşağıdaki kısımlar artık pozitif değer almaya başlıyor. Çünkü normalde kosinüs burada -1/2 ise karesi alındığında artık ¼ olacak yani benim grafiğim yaklaşık olarak şöyle bir hal alıyor. Bu da bana şöyle bir değişiklik sağlıyor; ben bu hareketi normalde her 2π'de bir tekrar ettiğini söyledim artık bu hareket π'de tekrar ediyor olacak. Yani periyodu yarıya düşmüş oluyor. Çünkü ben yarısını pozitif olduğu için yukarıya katladığımdan dolayı artık o yarımlar aynı şeyleri yapmama neden oluyor."*



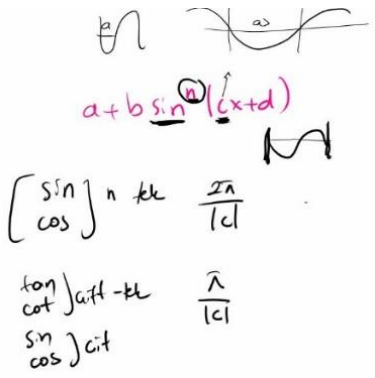
Şekil 49. Ö1'in periyot formülünü açıkladığı örneği-2

Katılımcı Ö2'den periyot formülünün nereden geldiğini açıklaması istendiğinde ise bunun ezber bilgisi olduğunu söylemiştir. Ardından sinx fonksiyonunun grafiğini x=0, x=$\frac{\pi}{2}$ gibi değerlerden hareket ederek çizmiş ve periyodik bir fonksiyon olduğunu göstermiştir. Ö2'nin bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Bunları nasıl söylüyorum yine? Açıkçası ezber diyebiliriz. Fakat grafik çizdiğimizi hayal edelim; bir koordinat sistemi. Bu koordinat sistemindeki x eksenindeki değerler işte 0,* $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}$ *diye sağa doğru ilerlesin. Biz sinx fonksiyonunu bilinen değerlerden yola çıkarak çizebiliriz. İşte 30'da kaçtı, 45'te kaçtı, 60'da kaçtı, 90'da kaçtı, 180'de kaçtı, 270'de kaçtı. Bunu* 2π *'ye sınırlandırmaksızın yani* 5π *için de,* $\frac{7\pi}{2}$ *için de sürekli olarak devam ettiğinde aslında bu değerlerin daima işte birbirinin aynısı geleceğini göreceğiz. Bu değerleri grafikte yerine yerleştirdiğimizde de fonksiyonun periyodik bir fonksiyon olduğunu fark edeceğiz diyebilirim."*

Ö2'ye benzer şekilde katılımcı Ö3 de periyot formülünü zihninde var olan ezber bilgisini kullanarak aşağıdaki gibi açıklamıştır (Bknz. Şekil 50):

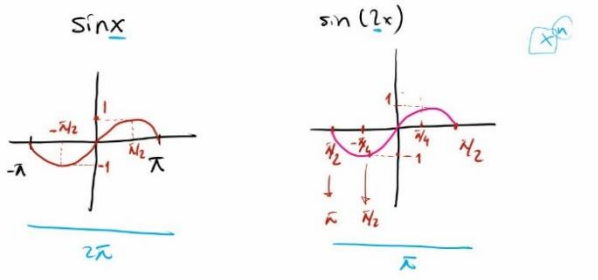
> *"Şu meşhur formüllerimiz vardı; a+bsin^{n}(cx+d) şöyle bir şeyler mesela. Burada sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjantı var. Bunların hepsine periyotta şuna bakıyorum. Sadece şu var zihnimde: sinüs, kosinüsde eğer ki n tek ise, tekken çift oluyordu* $\frac{2\pi}{|c|}$*'diyordum. Diğer tüm durumlarda* $\frac{\pi}{|c|}$*."*



Şekil 50. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonlarda periyot konusunda çalışma kağıdına yazdıkları

Ö3'ten formülde geçen değişkenleri açıklaması istendiğinde ise formülü ezbere bildiği görülmüştür. Ardından Ö3 formül hakkında fikir yürütmüş, Şekil 51'de görüldüğü gibi sinx ve sin2x fonksiyonlarının grafiklerini çizerek ve fonksiyon bilgilerinden hareketle formülde geçen 'c' değişkeninini açıklamıştır. Ancak Ö3'ün formüldeki 'n' değişkeninin periyoda nasıl bir etkisi olduğunu açıklayamadığı görülmüştür. Ö3'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Bilmem. Üzerine düşünmedim. Aklımda sinüs kosinüs tek ise 2π/c diğer tüm durumlarda π/c olarak aklımda tutmuştum… Yani şuradaki c değeri benim için grafikte x'in yataydaki genişliğini veriyordu. Değil mi? Şu arayı açıyordu. Bu arayı açtığın için haliyle benim periyodum bu değil mi zaten? Benim sinüsteki periyodum ne? 2π'lik bir aralık. Sürekli bu şekilde devam ediyor. C değerinde de c'yi arttırıp azalttığımda şunun arasındaki uzaklık değişiyor. Kuvveti düşünmedim, bilmiyorum. Sen deyince düşündüm… Ama kuvvette neden yapıyoruz bilmiyorum."*



Şekil 51. Ö3'ün periyot formülünü açıkladığı örneği

Ö4'ün ise periyot formülü olduğunu hatırladığını ancak formülün nasıl olduğunu hatırlamadığı görülmüştür. Ö4'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

"Böyle bir şeyin varlığını biliyorum fakat tam olarak formülü hatırlayamadım."

Genel olarak bakıldığında, Ö1, Ö2 ve Ö4'ün periyot kavramını örnek vererek açıklayabildiği, Ö3 ise zihnindeki hatalı bilgisinden kaynaklı olarak periyodu sadece dairesel hareketi olan bir kavram olarak kabul ederek yanlış tanımladığı görülmüştür. Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların periyotları ile ilgili bilgileri incelendiğinde ise sinx, cosx, tanx, cotx trigonometrik fonksiyonların periyotlarını bildikleri ve grafik üzerinden açıklayabildikleri görülmüştür. Bunun yanında sin(ax+b) tipindeki trigonometrik fonksiyonların periyotlarının hesaplanması için x'in kuvveti (n değişkeni) ve x'in kat sayısı (a değişkeni) ile trigonometrik fonksiyonlarının periyotları kullanılarak oluşturulmuş periyot formülünü katılımcı Ö4'ün hatırlamadığı, Ö2 ve Ö3'ün ezbere bildiği Ö1'inse örnek vererek formülü açıklayabildiği görülmüştür.

Sonuç olarak, katılımcı Ö4 ün periyot kavramını açıklaması ve sinx, cosx, tanx, cotx trigonometrik fonksiyonlarının periyotlarını bilmesi bu bağlamda AB'sinin var olduğunu göstermekte ancak sin(ax+b) tipindeki trigonometrik fonksiyonların periyotlarının nasıl hesaplanacağını hatırlamaması Ö4'ün AB'sinde eksiklikler olduğunu göstermektedir. Katılımcı Ö3'ün ise periyot kavramını açıklarken sadece dairesel hareketi periyot olarak kabul etmesi bu bağlamda AB'sinde yanılgılar olduğunu ve sin(ax+b) tipindeki trigonometrik fonksiyonların hesaplanması için kullandığı formülü açıklayamayarak ezbere bilmesi AB'sinde ezber bilgilere yer verdiğini göstermektedir. Katılımcı Ö2'nin ise periyot kavramını açıklaması ve sinx, cosx, tanx, cotx trigonometrik fonksiyonlarının periyotlarını bilmesi bu bağlamda AB'sinin var olduğunu göstermekte ancak sin(ax+b) tipindeki trigonometrik fonksiyonların hesaplanması için kullandığı formülü açıklayamayarak ezber bilgilerinden yararlanması Ö3'e benzer şekilde AB'sinde ezber bilgilere yer verdiğini göstermektedir. Katılımcı Ö1 ise diğer katılımcılara ek olarak, Şekil 41, 43, 44 ve 45'te görüldüğü gibi bir fonksiyonun periyodik olmasını ve periyot formülünde geçen x'in kat sayı ve kuvvetinin formüle etkisini örnek vererek açıklayabilmesi AB'sinin diğer katılımcılara göre daha kapsamlı olduğunu göstermektedir.

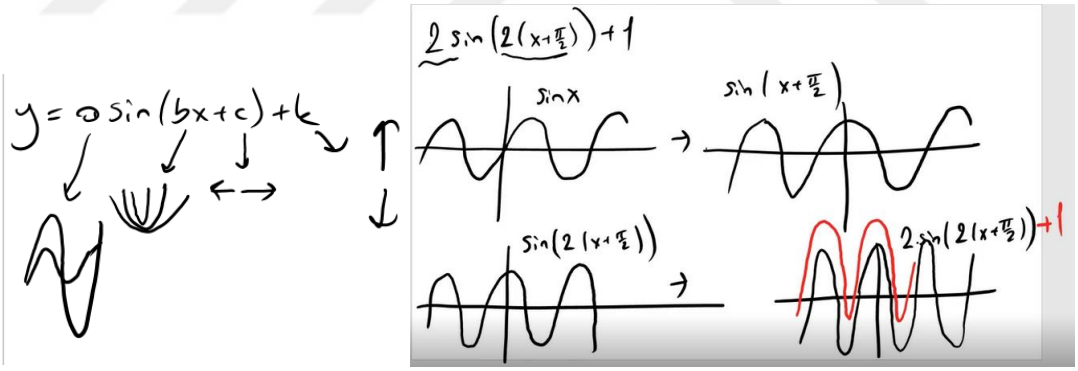
4.1.2.2.7. Trigonometrik Fonksiyonlarda Grafikler

Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların grafikleri konusundaki bilgilerini incelemek amacıyla katılımcılardan herhangi bir trigonometrik fonksiyon belirleyerek bu trigonometrik fonksiyonun grafiğini çizmeleri istenmiştir. Katılımcılardan Ö1, Ö2, Ö3 ve Ö4 a.sin(bx+c)+k tipinde bir trigonometrik fonksiyondaki a, b, c, k katsayılarının ne anlama

geldiğini açıklamışlar ve bu tipte seçtikleri bir trigonometrik fonksiyonun grafiğini fonksiyonda dönüşüm bilgilerini kullanarak çizmişlerdir.

Katılımcı Ö1 örnek olarak Şekil 52'de görüldüğü gibi, belirlediği $2\sin(2x+\pi)+1$ trigonometrik fonksiyonunun grafiğini çizerken öncelikle trigonometrik fonksiyonunu $2\sin(2(x+\frac{\pi}{2}))+1$ formuna getirdikten sonra sinx fonksiyonunun grafiğini çizmiş ve x ekseninde $\frac{\pi}{2}$ birim kadar sola ötelemiştir. Ardından grafiğinin dalga aralıklarını yarıya düşürerek $\sin(2(x+\frac{\pi}{2}))$ fonksiyonunun grafiğini oluşturduktan sonra y değerlerini iki katına çıkararak $2\sin(2(x+\frac{\pi}{2})$ fonksiyonunun grafiğini çizmiştir. Son olarak y ekseninde 1 birim yukarıya öteleyerek $2\sin(2(x+\frac{\pi}{2}))+1$ fonksiyonunun grafiğini çizmiştir. Ö1'in bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Şöyle demiştik bu k benim fonksiyonumun yukarı veya aşağı yaptığı hareketi belirtiyor. Buradaki c de benim fonksiyonumun sağa sola yaptığı hareketi yani bu ikisi de ötelemeyle alakalı hareketler. Bu x'in başındaki katsayı benim fonksiyonumun daralmasını genişlemesine etki ediyor. Buradaki a değeri de benim fonksiyonumun boyuna etki ediyor."*

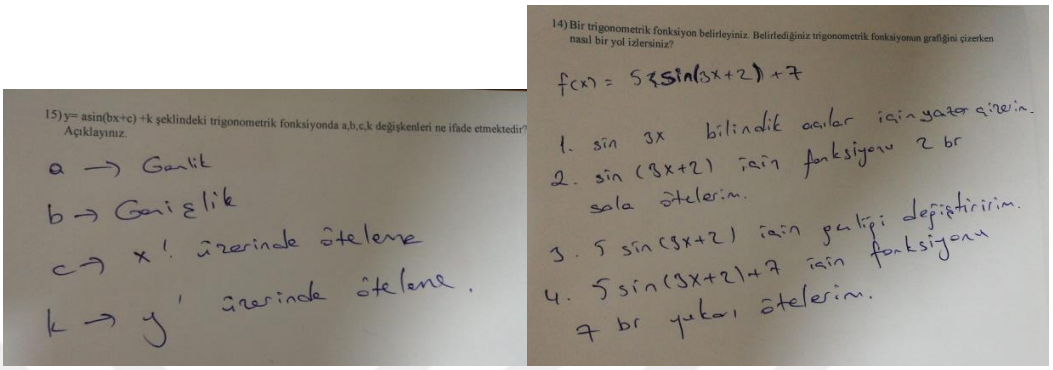


Şekil 52. Ö1'in trigonomerik fonksiyonların grafiklerinin çizimi ile ilgili örneği

Katılımcı Ö2 örnek olarak, belirlediği $5\sin(3x+2)+7$ trigonometrik fonksiyonunun grafiğini çizerken öncelikle bilinen değerlerden hareketle sin3x fonksiyonunu grafiğini çizmiştir (Bknz. Şekil 53). Ardından Ö2'nin sin(3x+2) fonksiyonunu oluşturmak için sin3x fonksiyonunu x ekseninde 2 birim sola öteleyerek hata yaptığı görülmüştür. Son olarak ise oluşan grafiğin y değerlerini 5 katına çıkararak y ekseninde 7 birim yukarı ötelemiştir.

> *"Şöyle, a' ya genlik diyorum yani fonksiyonun tepe noktası ne olacak, en alt noktası ne olacak. İşte sinx iken burada tepe noktası 1 ama 5sinx iken tepe noktası 5. Fonksiyonun genliği, kısacası genlik diyorum. B'ye fonksiyonun periyodu ne olacak, genişliği ne olacak; buna*

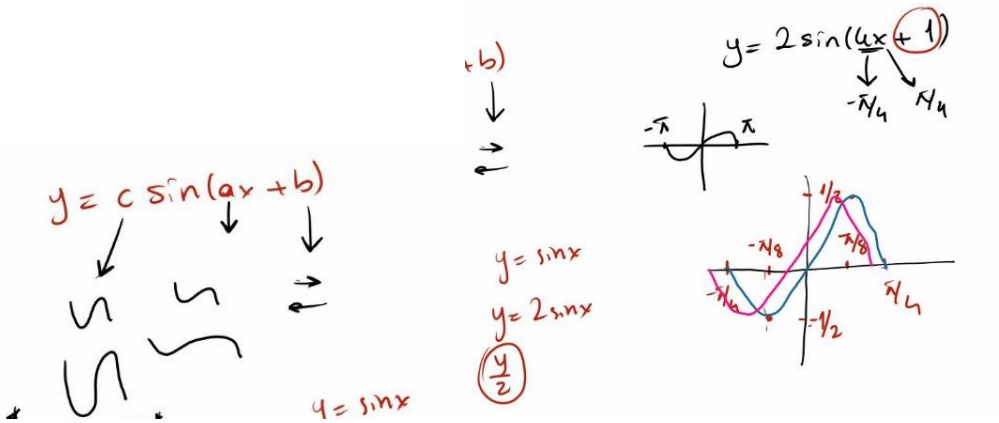
genişlik yazayım. C, x ekseni üzerindeki öteleme ve burada c'nin pozitif değeri için negatif yönde, negatif değeri için pozitif yönde bir öteleme söz konusu. Son olarak k değerim var, k değerimin de y ekseni üzerinde öteleme olduğunu söyleyebilirim."



Şekil 53. Ö2'nin trigonomerik fonksiyonların grafiklerinin çizimi ile ilgili örneği

Katılımcı Ö3 örnek olarak y=2sin(4x+1) trigonometrik fonksiyonunun grafiğinin çizmek için ise ilk olarak fonksiyonun periyodunu $\frac{\pi}{4}$ olarak bularak grafiği çizeceği x aralığını $-\frac{\pi}{4}$ ile $\frac{\pi}{4}$ şeklinde belirlemiştir (Bknz. Şekil 54). Ardından 2 katsayısından dolayı fonksiyonun y değerlerini yarıya düşürmüş ve sonra olarak grafiği 1 birim sola kaydırarak Ö2'ye benzer şekilde hata yaptığı görülmüştür. Ö3'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

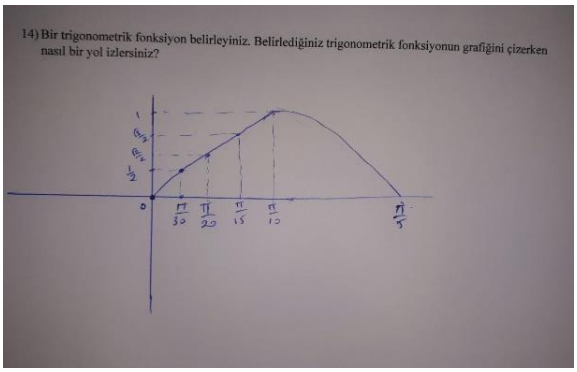
"Tamam, y=2sin(4x+1) olsun. Şöyle, burada ne yapıyorum? Normalde sinx'im nasıldı? Az önce yaptım, şöyleydi. X'im 4x olduğu için periyodum değişecek. Önce periyodumu belirlerim nereden nereye gidecek. Normalde periyodum π'ydi. 4x olduğu için -π/4 ve +π/4 aralığında olacak. Sadece o parçayı yapıyorum, şöyle -π/4, π/4. Sonra genlik, genlikte normalde y=sinx'ti normalde böyle olması gerekiyor. Ama y=2sinx diyorsam sinx, y/2'ye denk gelecek. O zaman y'yi yarıya düşüreceğim. Buradan 1'di, o zaman ½ olacak şunlar. Ama şunu yazmadım, bir de kayacak. Bir de +1 olduğu için 1 birim sola kayacak."



Şekil 54. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin çizimi ile ilgili örneği

Katılımcı Ö4 ise örnek olarak, belirlediği sin5x trigonometrik fonksiyonunun grafiğini çizerken bilinen değerlerden hareketle sin5x fonksiyonunu grafiğinin bir kısmını çizdiğini göstermiş ardından GeoGebra yazılımını kullanarak bu soruya cevap vermiştir (Bknz. Şekil 55). Dolayısı ile Ö4'ün bu konudaki bilgileri TAB başlığı altında incelenmiştir. Ö4'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Genellikle GeoGebrayı kullanmayı tercih ediyorum. Daha güzel bir çizim, daha doğru. Fakat elimle çizmek zorunda kalırsam her fonksiyon için bildiğim değerlerden hareket etmeyi tercih ediyorum. Trigonometrik fonksiyonlarda, 0°, 30°, 60°, 90° gibi daha aşina olduğum değerleri kullanarak fonksiyon çizmeye çalışırım. Tabi burda sin5x'te 5x=30 şek hareket ederek çizmeye çalışıyorum."*



Şekil 55. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin çizimi ile ilgili örneği

Genel olarak bakıldığında, katılımcı Ö1, Ö2, Ö3 ve Ö4 asin(bx+c)+k tipindeki bir trigonometrik fonksiyondaki a, b, c, k katsayılarının ne anlama geldiğini açıklamışlar ve bu tipte seçtikleri bir trigonometrik fonksiyonun grafiğini fonksiyonda dönüşüm bilgilerini kullanarak çizmişlerdir. Ancak katılımcı Ö2 ve Ö3'ün x eksenindeki hareketin katsayılar

cinsinden ifadesinin gösterirken hata yaptığı görülmüştür. Dolayısı ile Ö1'in AB'sinin Ö2 ve Ö3'e göre daha kapsamlı olduğu görülmüştür. Ö4 ise bilinen değerlerden hareketle trigonometrik fonksiyon grafiğinin bir bölümünü çizmiş daha sonra GeoGebra yazılımı üzerinden işlemlerine devam etmiştir.

Özet olarak lisansüstü öğrencilerin trigonometri konusunda var olan AB'lerini belirlemeye yönelik sorulan sorulardan elde edilen veriler sonucunda her bir öğrencinin AB'sinde farklılıklar olduğu görülmüştür. AB bulgularının sonucunda ilk olarak tüm katılımcıların fonksiyon tanımı ve fonksiyon çeşitlerine dair alan bilgilerinin yeterli olduğu fakat bahsedildiği gibi Ö3'ün bu bilgi türünde eksiklikleri veya hataları olduğu görülmüştür. Katılımcıların trigonometrik fonksiyonlara ait AB'lerinin analizi sonucunda ise tüm katılımcıların, bir dik üçgende trigonometrik fonksiyonların tanımlanmasına ve trigonometrinin açı kavramları olan derece, radyan ve esas ölçü kavramlarının tanımlanmasına dair AB'lerinin yeterli olduğu görülmüştür. Ancak bahsedildiği gibi Ö3'ün derece ile radyan açı birimleri arasındaki ilişkiyi ezberinden yazması ve bu konudaki söylemleri sonucunda da AB'sinde formüllere ve ezber bilgilere yer verdiği, Ö4'ün ise derece, radyan ve esas ölçü kavramlarını tanımlayıp açıklamasına rağmen derece ile radyan açı birimi arasındaki ilişkiyi veren orantıyı yanlış kurarak hatalı işlem yaptığı tespit edilmiştir.

Katılımcı Ö1, Ö2 ve Ö3 birim çember üzerinde sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarını; Ö4'ün ise sadece sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını tanımlayarak açıklayabildiği görülmüştür. Buna ek olarak Ö1'in secant ve kosekant fonksiyonlarını da birim çember üzerinde tanımlayarak açıklaması Ö2 ve Ö3 kapsamlı bilgiye sahipken Ö1'in Ö2 ve Ö3'e göre daha kapsamlı bilgiye sahip olduğunu, Ö4'ün ise AB'sinde eksiklikler olduğunu göstermektedir. Trigonometrik fonksiyonların işaretlerinin belirlenmesi konusunda ise tüm katılımcıların AB'lerinin yeterli olduğu görülmüştür. Buna ek olarak, Ö1'in tanx ve cotx trigonometrik fonksiyonların işaretlerini, birim çember üzerinde bu fonksiyonların gösterimlerinin olduğu ışını uzatarak da belirleyebilmesi, trigonometrik fonksiyonların işaretlerine dair Ö1'in AB'nin diğer katılımcılara göre daha kapsamlı olduğu olduğunu ortaya koymuştur.

Bir başka AB bulgusu olarak katılımcı Ö1, Ö2 ve Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların değerlerinin değişimini açıklayarak birbiri ile karşılaştırabildiği görülmüştür. Buna ek olarak katılımcı Ö1'in trigonometrik fonksiyonların değerlerini karşılaştırırken birim çember içerisinde benzer üçgenleri şeklin dışına taşıyarak açıklamada bulunması, ardından koordinat sisteminde bölgelere göre trigonometrik fonksiyonların kıyaslanması ile ilgili genellemelere ulaşması, Ö1'in bu bağlamda AB'sinin diğer katılımcılara göre daha kapsamlı olduğunu

göstermektedir. Ayrıca Ö4'ün ise trigonometrik fonksiyonları karşılaştırmayı hatırlamadığını ifade etmesi bu bağlamda AB'sinde eksiklikler olduğunu ortaya koymuştur.

Katılımcı Ö1 ve Ö2 birim çember üzerinde alınan bir açının çemberi kestiği noktayı trigonometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edebildiği ve verilen bir açının trigonometrik değerini dar açı cinsinden ifade edebildiği görülmüştür. Katılımcı Ö3'ün bu eylemlerin bir kısmını ezber bilgisini kullanarak yapabildiği, Ö4'ün ise yapamadığı görülmüştür. Dolayısı ile sonuç olarak bu bağlamda Ö1 ve Ö2'nin bu bağlamda AB'lerinin kapsamlı olduğu, Ö3'ün AB'sine tam olarak hakim olmadığını, Ö4'ün ise AB'sinde eksiklikler olduğu saptanmıştır.

Tüm katılımcıların $sin^2x + cos^2 = 1$, $tanx.cotx = 1$, $tanx = \frac{1}{cotx}$, $cotx = \frac{1}{tanx}$, $secx = \frac{1}{cosx}$, $cscx = \frac{1}{sinx}$ gibi trigonometrik özdeşlikleri bildikleri ve dik üçgen üzerinde gösterebildikleri görülmüştür. Buna ek olarak Ö1'in $sin^2x + cos^2 = 1$ ve $tanx.cotx = 1$ özdeşliklerini hem dik üçgenleri hem de birim çemberi kullanarak gösterebilmesi bu konuda daha derin ve geniş AB'sine sahip olduğunu kanıtlamıştır. Bir başka AB bulgusu olarak Ö1, Ö2 ve Ö3'ün yarım açı ve toplam fark formüllerini bildikleri ve zihinlerinde birbirinin yerine yazarak oluşturulduklarının farkında oldukları görülmüştür. Ö4'ün ise yarım açı formüllerini bildiği ancak toplam fark formüllerini hatırlamadığı bu nedenle Ö4'ün AB'sinde eksiklikler olduğu tespit edilmiştir.

Katılımcı Ö1, Ö2 ve Ö4'ün periyot kavramını örnek vererek açıklayabildiği, Ö3 ise zihnindeki hatalı bilgisinden kaynaklı olarak periyodu sadece dairesel hareketi olan bir kavram olarak kabul ederek yanlış tanımladığı görülmüştür. Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların periyotları ile ilgili bilgileri incelendiğinde ise tüm katılımcıların sinx, cosx, tanx, cotx trigonometrik fonksiyonların periyotlarını bildikleri ve grafik üzerinden açıklayabildikleri görülmüştür. Bunun yanında sin(ax+b) tipindeki trigonometrik fonksiyonların periyotlarının hesaplanmasında kullanılan periyot formülünü katılımcı Ö4 ün hatırlamadığı, Ö2 ve Ö3'ün ezbere bildikleri Ö1'inse örnek vererek formülü açıklayabildiği görülmüştür. Sonuç olarak, katılımcı Ö4'ün periyot kavramını açıklaması ve sinx, cosx, tanx, cotx trigonometrik fonksiyonlarının periyotlarını bilmesi bu bağlamda AB'sinin var olduğunu göstermekte ancak sin(ax+b) tipindeki trigonometrik fonksiyonların periyotlarının nasıl hesaplanacağını hatırlamaması Ö4'ün AB'sinde eksiklikler olduğunu göstermektedir. Katılımcı Ö3'ün ise periyot kavramanı açıklarken sadece dairesel hareketi periyot olarak kabul etmesi bu bağlamda AB'sinde yanılgılar olduğunu ve sin(ax+b) tipindeki trigonometrik fonksiyonların hesaplanması için kullandığı formülü açıklayamayarak ezbere bilmesi AB'sinde ezber bilgilere yer verdiğini göstermektedir. Katılımcı Ö2'nin ise periyot kavramını açıklaması ve sinx, cosx, tanx, cotx trigonometrik fonksiyonlarının periyotlarını bilmesi bu

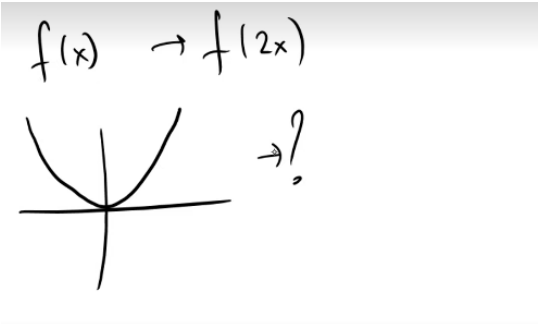
bağlamda AB'sinin var olduğunu göstermekte ancak sin(ax+b) tipindeki trigonometrik fonksiyonların hesaplanması için kullandığı formülü açıklayamayarak ezber bilgilerinden yararlanması Ö3'e benzer şekilde AB'sinde ezber bilgilere yer verdiğini göstermektedir. Katılımcı Ö1 ise diğer katılımcılara ek olarak, fonksiyonun periyodik olmasını ve periyot formülünde geçen x'in kat sayı ve kuvvetinin formüle etkisini örnek vererek açıklayabilmesi diğer katılımcılara göre AB'sinin kapsamlı olduğunu göstermektedir. Son olarak tüm katılımcıların asin(bx+c)+k tipindeki bir trigonometrik fonksiyondaki a, b, c, k katsayılarının ne anlama geldiğini açıklayarak fonksiyonlarda dönüşüm bilgilerini kullanarak örnek vermeleri bu bağlamda AB'lerinin var olduğunu göstermektedir. Ancak katılımcı Ö2 ve Ö3'ün x eksenindeki hareketinin katsayılar cinsinden ifadesini gösterirken hata yaptığı görülmüş dolayısı ile bu bağlamda Ö1'in AB'sinin Ö2 ve Ö3'e göre daha kapsamlı olduğu görülmüştür.

4.2. Pedagojik Bilgi (PB) ve Pedagojik Alan Bilgisi (PAB)

Bu başlık altında katılımcıların PB ve PAB'larını incelemek amacıyla trigonometri özelinde bazı konuların öğretimini nasıl gerçekleştirmeyi planladıkları sorulmuş bu doğrultuda da bilgi türleri incelenmiştir. Katılımcılar herhangi bir uygulama yapmadıklarından dolayı söylemlerinden ortaya çıkan PB ve PAB'ları incelenmiştir.

İlk olarak katılımcı Ö1'in sorulara verdiği cevaplar incelendiğinde, trigonometrik fonksiyonların grafikleri konusunun öğretimine yönelik planında öncelikle öğrencilerin ön öğrenmelerini göz önünde bulundurduğu görülmüştür. Bu bağlamda Ö1, öğrencilerin ön bilgilerinin durumuna göre nasıl bir öğretim yapacağına dair farklı fikirler sunmuştur. Örneğin öğrenciler trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin çizimi için fonksiyonların dönüşümleri konusunu bilmiyorlarsa ilk olarak bu ön öğrenme eksikliğini gidermeyi planlamıştır. Buna örnek olarak, Şekil 56'da görüldüğü gibi f(x) şeklinde verilen bir fonksiyonun grafiğini çizmiş ve "*f(2x) olması durumunda sizce bu grafik nasıl bir değişime uğrar?"* şeklinde öğrencilere soru yönelteceği görülmüştür. Ö1 bu süreci kendi cümleleri ile aşağıdaki gibi açıklamıştır:

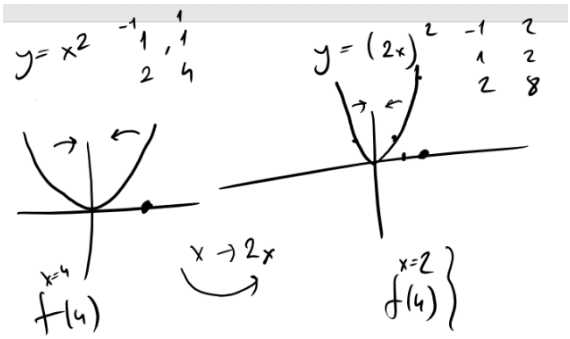
> *"Şöyle ki eğer öğrenci grafikler üzerinde bir fonksiyona yaptığımız değişikliklerin grafiklere nasıl etkileri olduğunu biliyorsa benim burada işim çok rahat diyor. Ama eğer ona hâkim değilse işim biraz daha uzuyor. Neyi kast ediyorum, mesela benim elimde bir f(x) var. Ben öğrenciye ilk başta soruyorum eğer f(2x) olursa sizce, şöyle bir grafik var elimde mesela bir parabol çizelim. f(2x) olması durumunda sence bu grafik nasıl bir değişime uğrar? Eğer öğrenci buna cevap verebiliyorsa benim işim gerçekten çok kolaylaşıyor. Cevap veremiyorsa da ben bunlara sayısal örnekler vererek farklı fonksiyonlar üreterek öğrenciye önce nasıl bir değişiklik olduğunu hissettirmeye çalışıyorum."*



Şekil 56. Ö1'in fonksiyonlarda dönüşüm örneği

Ö1, öğretim sırasında öğrencilerden dönüt alamama durumunda ise sayısal örneklerle öğrencilere ipucu vermeyi planlamıştır. Buna örnek olarak Şekil 57'de görüldüğü gibi $y = x^2$ *ve* $y = (2x)^2$ parabolünde x yerine -1, 1, 2 değerlerini vererek grafiğin daraldığını öğrencilerin fark etmelerini sağlamayı amaçlamıştır. Ö1'in öğrencilere yönelteceği sorulara, vereceği ipuçlarına değinmesi PB'si ile AB'sini birleştirerek PAB'ının varlığına kanıt sunmuştur. Ö1'in verdiği örnekle ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

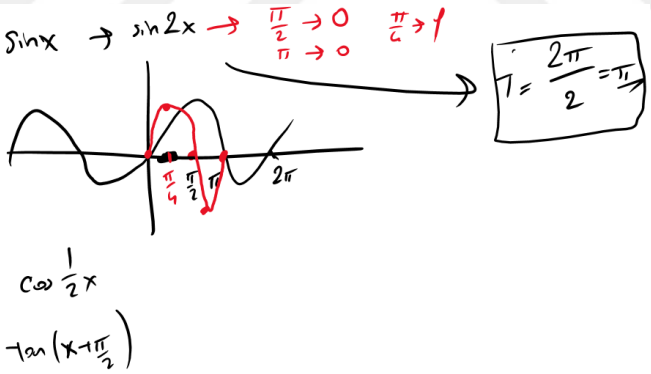
> *"Mesela direk şunu düşünelim, f(x)= x^2 fonksiyonunda eğer ben x'lerin yerine 2x yazarsam. Tamamen sayısal örnek vererek x yerine 1 yazdığımız zaman 1, x yerine 2 yazdığımız zaman y'si 4 olacak, x yerine -1 yazarsak y'si 1 olacak gibi. Hani burada hissettirmeye çalıştığım şey aslında şu, eğer ben x yerine 2x yazarsam benim grafiğim biraz daha daralıyor. Bu daralmanın sebebi de şu, ben artık hedeflerime daha çabuk ulaşabiliyorum demek oluyor. Hedeflere ulaşmaktan kastım ne, eskiden ben f(4)'e ulaşmak için x yerine 4 yazarken ben artık f(4)'e ulaşmak için x yerine 2 yazmam yeterli oluyor. Öğrencinin bunun mantığını hissetmesini istiyorum. Bu çok önem verdiğim şeylerden birisi aslında."*



Şekil 57. Ö1'in fonksiyonlarda dönüşüm örneği-2

Devamında Ö1, fonksiyon dönüşümleri konusunu öğrencilere hatırlattıktan sonra trigonometrik fonksiyonlarda grafiklerinin çizimini, fonksiyon dönüşümleri konusu ile ilişkilendirerek bir öğretim yapmayı planlamıştır. Buna örnek olarak ise sinx fonksiyonu sin2x olduğunda "*sin2x durumunda benim için neler değişecek? x yerine burada π yazarsam ya da π/2 yazarsam ne olacak?"* gibi soruları öğrencilere yönelterek grafiğin periyodunun değiştiğini ve x'in katsayısının periyoda etkisini fark ettirmeyi amaçlamıştır (Bknz. Şekil 58). Ayrıca Ö1'in, farklı örneklerle periyoda etki eden ya da etmeyen diğer durumları da öğrencilere göstermeyi planladığı görülmüştür. Örnek olarak, cosx fonksiyonunu $\cos(\frac{x}{2})$ yaparak periyodun iki katına çıktığını ya da $\tan(x+\frac{\pi}{2})$ fonksiyonunda x ekseninde öteleme yapmanın periyodu değiştirmediğini de öğrencinin fark etmesini sağlamayı hedeflediği görülmüştür. Ö1'in bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Yine benzer şekilde cosx, tanx için de tabi sinx'i sin2x yaptıysam cosx'i bu sefer gidip cos(x/2) yaparım. İşte tanjanta gider tan(x+π) yaparım ya da tan(x+π/2) yaparım. Bunun da bir etkisinin olmadığını periyotta görsün hani öteleme yaptığını görsün diye. Bu şekilde bir anlatım tercih ederim."*

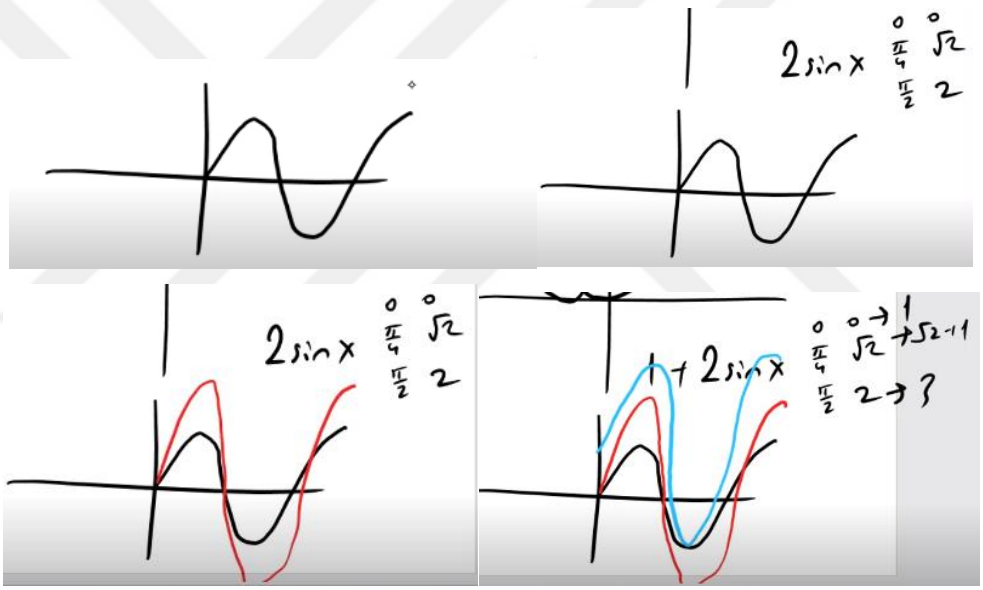


Şekil 58. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin çizimi örneği

Ö1'in, bir trigonometrik fonksiyonun grafiğinin çiziminin öğretilmesine daha kapsamlı bir örnek olarak, Şekil 59'da görüldüğü gibi sinx fonksiyonunun grafiğinden hareket ederek 2sinx+1 fonksiyonunun grafiğinin nasıl değişeceğini göstermiştir. Ö1 bunu yaparken aşağıdaki söyleminde belirttiği gibi öğrencilere sorular yönelterek, 2sinx ve 2sinx+1 fonksiyonunda x=0, $x=\frac{\pi}{4}$ gibi değerler için fonksiyonun aldığı değerlerin neler olduğunu bulduarak 2sinx fonksiyonunda 2'nin, 2sinx+1 fonksiyonunda +1'in y değerlerini nasıl etkilediğini öğrencilere fark ettirmeyi hedeflemiştir. Ö1'in trigonometrik fonksiyonlar konusu ile fonksiyon dönüşümleri arasında ilişki kurarak nasıl öğreteceğini örneklerle detaylandırarak

açıklabilmesi, soracağı sorulara değinmesi PB'si ile AB'sini birleştirerek PAB'ının varlığını desteklemektedir. Ö1'in bununla ilgili söylemi aşağıdaki gibidir:

> *"Örneğin sinüs şu şekilde ise ben 2sinx için değerlerin neler olacağını sorarım. X=0 için 0 der x= π/4 için* $\sqrt{2}$ *der x= π/2 için 2 oluyor der. Fonksiyonun şöyle bir yükseldiğini ve alçaldığını, yani bu boyunun adeta uzadığını söyleyebiliriz. Buna etkisi olduğunu görmelerini isterim. Şu sondaki +1 de işte yine herhangi bir fonksiyonda mesela sonuna +1 eklenerek neler değiştiğini sorgulatırım. Yine 2sinx+1 dersem bu 1 bu* $\sqrt{2}$ *+1'e dönüşür. Yani benim fonksiyonumun bir birim yukarıya ötelendiğini görmesini beklerim bu şekilde. Hani bunları öncelikle tek tek verip böyle kompleks bir fonksiyonu nasıl çizebileceğimize dair hamleleri uygulayabiliriz."*



Şekil 59. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin çizimi örneği-2

Katılımcı Ö2 trigonometrik fonksiyonların öğretiminde ilk olarak öğrencilerin ön bilgilerinin kontrol etmeyi planladığını belirterek eğer ön bilgilerinde eksiklik yoksa konunun öğretimine geçebileceğini belirtmiştir. Ardından birim çember üzerinde sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını gösterdikten sonra öğrencilerin tanjant ve kotanjant fonksiyonunun tanımını anlamakta güçlük çekebileceğini düşünmüştür. Ö2 bununla ilgili olarak ise öğrencilere yol gösterme yapmayı planladığını söylese de bunu nasıl gerçekleştireceğini detaylandıramamıştır. Ö2'nin bununla ilgili söylemi aşağıdaki gibidir:

> *"Öğrencinin ön bilgisini yokladıktan sonra biliyorlarsa birim çember üzerinden zaten biz |OP| doğru parçasını çizdiğimizde buradaki öğrenci sinüs, kosinüs değerlerini rahatlıkla*

bulacaktır. Belki tanjant ve kotanjant sıkıntı olacaktır. Hani yol gösterme buradan teğetleri çizdikten sonra kenar uzunluklarının 1 birim olduğunu gördükten sonra kendileri belki de tanjant ve kotanjantı yerleştirecekler diye düşünüyorum."

Ders anlatmadığım için öğrencinin şu anda ne yapabildiğini bilmiyorum."

Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması konusunda ise AB bölümünde de bahsedildiği gibi bu konuda AB'si kapsamlı olmasına rağmen bu konuyu öğrencilere nasıl öğretmeyi planladığını açıklayamadığı görülmüştür. Buna örnek olarak Ö2 birim çember üzerinde aldığı açıların nasıl kıyaslanacağını göstermiş ancak 1. bölge dışında alınan bir açının trigonometrik değerlerinin karşılaştırılmasını öğrenciye nasıl öğreteceğini bilmediği görülmüştür. Dolayısı ile Ö2'nin trigonometri öğretimine yönelik bilgilerinde eksiklik olduğu yani PB ve PAB'ında eksiklikler olduğu görülmüştür.

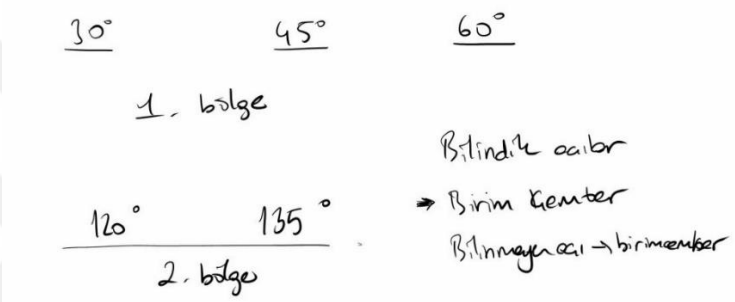
Ö2 trigonometri konularının öğretimindeki eksikliğinin; lisans eğitimindeki eksikliği, trigonometriyi çok sevmemesi ve öğretim deneyiminin hiç olmaması nedeniyle tecrübesizliği ile ilişkili olduğunu düşündüğünü ifade etmiştir. Buna ek olarak Ö2'nin öğretim deneyiminin olmaması nedeni ile trigonometri konu ve kazanımlarının sırasını da tam olarak hakim olmadığı görülmüştür. Bu durum Ö2'nin PB ve PAB'ında eksiklikler olduğunu destekler niteliktedir. Ö2'nin bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

"Lisans eğitimi döneminde trigonometriye ait trigonometri ile ilgili bir ders almadım. Aldıysam da hatırlamıyorum. Trigonometriyi çok da sevmiyorum açıkçası uğraşmayı. Fakat bunu bilememeyi yani tecrübesizliğime bağlıyorum açıkçası… Bu en baştan beri söylediğimiz şey benim ders anlatmamış olmam. Bir sıralamadan habersiz olmam. Müfredattan dönüşüm formülleri kalkmış olabilir. Yani bizim zamanımızda, bizim zamanımızda derken biz liseye giderken hepsini 11. sınıfta almıştık. Yarım açı, toplam fark, dönüşüm. Hepsini 11'de almıştık trigonometriyi. Sonrasında müfredatın parçalandığını biliyorum. Trigonometrinin basit kısmının 11'de, bu formüllere dayalı kısmın 12'de verildiğini biliyorum."

Katılımcı Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması konusunda, bilinenden bilinmeyene öğretim ilkesine göre hareket ederek öğrencilerden bildikleri trigonometrik değerleri karşılaştırmalarını isteyeceği görülmüştür. Ardından bu konunun birim çember üzerinde öğrenilmesini sağlamak amacıyla *"Burada yaptığımız işlemleri birim çemberde gösterebilir misiniz, nasıl gösterirsiniz?''* şeklinde öğrencilere soru yöneltmayi planlamıştır. Ardından öğrencilere farklı açı değerleri için soru yönelterek trigonometrik değerleri karşılaştırmaları için fikir yürütmelerini isteyerek PB'si ile AB'sini birleştirebildiği, PAB'ına

yönelik kanıt sunduğu görülmüştür (Bknz. Şekil 60). Ö3'ün aşağıdaki söylemi bunu destekler niteliktedir:

> *"Önce mesela bildikleri şeyleri... Mesela derim ki, özel üçgenlerde zaten öğretiyoruz. Çocuk şeyi biliyor, sin30°'leri, cos30°'leri. Önce 30°'de kıyaslayın derim, sonra 45°'de kıyaslayın derim, sonra atıyorum 60°'de kıyaslayın derim. Bunlar benim için 1. bölgedir. Sonra gelirim 2. bölge açısına. 120° derim, başka ne derim? 145°,135° derim. Bunları bir kıyaslayın derim, çünkü bunları da biliyor. Daha sonra birim çember üzerine getiririm. 'Burada yaptığımız işlemleri birim çemberde gösterebilir misiniz, nasıl gösterirsiniz?' gibi. Daha sonra bilinmeyen açıyı birim çemberde isterim."*



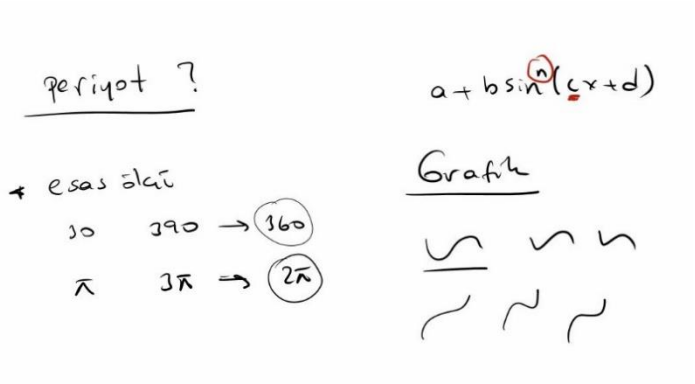
Şekil 60. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması ile ilgili cevap kağıdına yazdıkları

Ö3'e trigonometrik değerleri karşılaştırmaya bilindik açılardan başlamasının sebebi sorulduğunda ise öğrencilerin bildikleri sayısal örneklerden hareket etmesinin birim çember üzerinde akıl yürütmesini sağlayarak bu sayede bildiklerini bilmediklerine entegre edebileceklerini ifade etmiştir. Bu durum Ö3'ün PB'sini AB'si ile birleştirerek PAB'ına yönelik kanıt niteliğindedir.

Ö3 trigonometrik fonksiyonların periyotlarının öğretiminde ise ilk olarak öğrencilere periyot denildiğinde zihinlerinde neler canlandığını sorarak fikir yürütmelerini isteyeceğini belirtmiştir (Bknz. Şekil 61). Ardından periyot ile ilgili çeşitli örnekler vererek bu örneklerin periyotları ile ilgili sınıfta fikir paylaşımında bulunarak periyot kavramını öğrencilere kavratmayı hedeflemiştir. Ö3'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Anlatacağım şey şu olurdu 'Periyot nedir?'. Periyot denince zihinlerinde canlanan şeyi belirlemem gerekiyor. 'Periyot nedir?, Nasıl tekrar etmeli?, Ne olmalı?, Tekrarı nasıl olmalı?, Birinde 3 tekrar birinde 5 tekrarda mı aynısına geliyor?' gibi önce periyot üzerine ciddi bir konuşma yapmam gerekirdi, hani bir tartışma. Nasıldır, ne değildir gibi. Haftanın günleri, ne*

bileyim mevsimler, başka ne var? Saat kavramı, analog saat gibi. Önce periyot kavramını oturturdum."



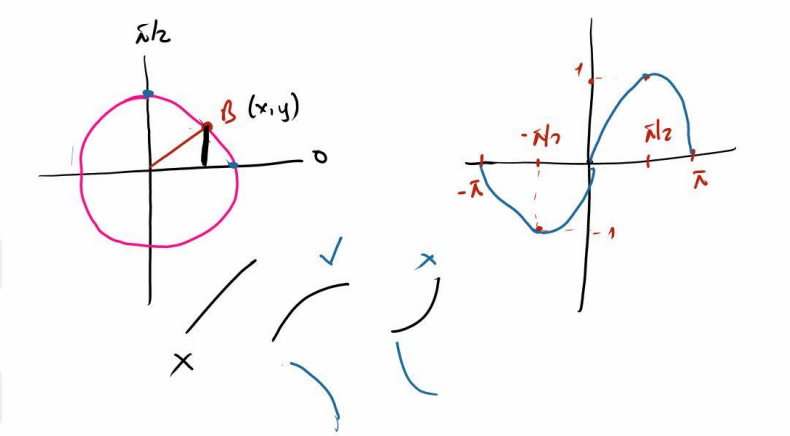
Şekil 61. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların periyotları ile ilgili cevap kağıdına yazdıkları

Ardından trigonometrik fonksiyonların grafikleri üzerinden periyot kavramını örneklendirmeyi planladığı görülmüştür. Örnek olarak, sinx fonksiyonunun periyodunun 2π, tanx fonksiyonunun periyodunun π olduğunu grafik üzerinden göstermiştir. Devamında ise periyot bulma formülünü uygulatmayı planlamıştır. Ancak AB bölümünde de bahsedildiği gibi Ö3'ün periyot bulma formülünü ezber bilgisini kullanarak yazdığı görülmüştü. Ö3'ün periyot bulma formülü ile ilgili "*Üzerine düşünüp toparlayıp düzgün bir şekilde vermeyi çalışırdım."* ifadesi öğrenciye nasıl öğreteceğini bilmediği göstermektedir. Dolayısıyla Ö3'ün PB'si ve AB'sinde eksiklikler nedeni ile bu bilgilerini birleştiremediği, PAB'ında eksiklikler olduğu görülmüştür.

Ö3 trigonometrik fonksiyonların grafikleri konusunu ise trigonometrik fonksiyonun birim çember üzerindeki tanımı ile grafiğindeki hareketini ilişkilendirerek öğretmeyi planladığı görülmüştür. Örnek olarak Şekil 62'de görüldüğü gibi 1. bölge üzerinde sinx fonksiyonunun birim çember üzerindeki hareketi ile grafiğinin hareketini açıklayarak göstermiştir. Ancak, Ö3 2. bölgeye geçtiğinde *"Şimdi buradan bu tarafa doğru giderken, onun hangi şekilde gideceğini nasıl aktarırım onu düşünüyorum. Ben direkt yapıyorum ama bunu çocuğa nasıl vereceğimi bulamadım şu an."* ifadesi trigonometri öğretime yönelik eksikliği olduğunu göstermektedir. Bu bağlamda Ö3'ün PB ve PAB'ında eksiklikler olduğu görülmüştür. Ek olarak Ö3 bu konuda var olan GeoGebra etkinliğini derste uygulayabileceğini belirtmiştir. Ö3'ün bununla ilgili söylemleri TPAB başlığı altında incelenmiştir. Ö3'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

"Ya hani grafikteki aynıda, burada da aynısını yaparız demezdim herhalde. Şu an, hani

zihnimde hep böyle yaptığım için ama bunu çocuğa verirken biraz daha detaylandırırdım ya da dediğim gibi bir tane GeoGebra etkinliği vardı. Şunu oynattıkça, şuradaki grafiği değiştiriyordu. Bunun canlandırmasını falan verirdim muhtemelen GeoGebra üzerinden. İkisinin eş zamanlı şekilde birbirini götürdüğünü, aslında aynı grafik olduğunu sadece eksenleri değiştirdiğimi gösterirdim."



Şekil 62. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri konusunun öğretimi ile ilgili örneği

Katılımcı Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların öğretimi konusunda, birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonların tanımlarını öğrenciye nasıl öğreteceğini açıklarken oldukça zorlandığı görülmüştür. Bununla ilgili olarak, konuya hazırlanarak derse gitmesi gerektiğini belirtmiştir. Ayrıca Ö4'ün AB bölümünde de bahsedildiği gibi tanjant ve cotanjant fonksiyonlarının birim çember üzerindeki tanımlarını açıklayaması nedeniyle öğrencilere bu matematiksel bilgileri nasıl öğreteceğini bilmediği görülmüştür. Bu nedenle Ö4'ün PB'si ile AB'sini etkili şekilde birleştiremediği, PAB'ında eksiklikler olduğu görülmüştür. Ö4'ün bunu destekleyen söylemi aşağıdaki şekildedir:

"Çok zorlandım çok. Gerçekten yani. Ben çok şeyimdir yani bakmayı çok severim. Bir şey anlatacaksam önce bakmak gerek benim. Çok bildiğim bir şey olsa da. Spontane bir şekilde anlatmakta çok zorlanıyorum. Bir yerleri kaçırıyorum çünkü illaki. Tanjant ve kotanjantın neden öyle olduğunu vermek gerekiyor. Hatta belki sinüs ve kosinüsün daha açıklayıcı ifadeleri vardır onları da vermek gerekir diye düşünüyorum. Kendi bilgi eksikliğimden dolayı."

Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması konusunu öğrencilere nasıl öğretmeyi planladığını açıklarken de benzer şekilde zorlandığı görülmüştür. Ayrıca AB bölümünde bahsedildiği gibi trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması konusu özelinde Ö4'ün AB'sinde eksiklikler olduğu görülmüştü. Ek olarak Ö4 trigonometri ve geometriye

ilgisinin olmadığını ve bu bilgilerini çok kullanmadığı için konunun bazı noktaları unuttuğunu belirtmiştir. Dolayısı ile Ö4'ün AB ve PB'sindeki eksiklikler nedeniyle bu bilgi türlerini birleştiremediği, PAB'ında eksiklikler olduğu görülmüştür. Ö4'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

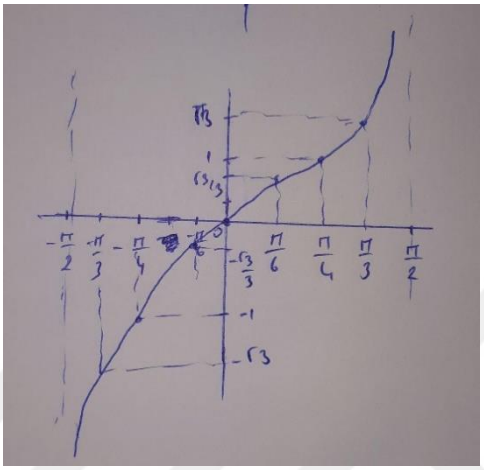
> *"Aslında geometri ve trigonometriye çok ilgim olduğunu söyleyemem. Sanırım en son bu bilgileri lise yıllarımda kullanmıştım. Açıkçası bu bilgileri biliyorum fakat temeline indiğimde sanırım çok kullanmadığım için prensiplerini açıklamakta biraz zorlanıyorum."*

Ö4 trigonometrik fonksiyonlarda periyot konusunun öğretiminde ilk olarak periyot kavramı ile ilgili günlük hayattan örnekler vererek derse giriş yapmayı planlamıştır. Ardından ardından trigonometrik fonksiyonun grafiği üzerinden periyot kavramını öğrenciye göstereceğini belirtse de bunu nasıl yapacağını örneklendirmemiştir. Ayrıca Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların grafik ve periyotları konularının müfredattaki işleniş sırasını da hatırlamadığı görülmüştür. Dolayısı ile Ö4'ün PB ve PAB'ında eksiklikleri olduğu saptanmıştır. Devamında Ö4'ün, AB'sinde de bahsedildiği gibi periyot bulma formülünü bilmemesi nedeniyle *"Daha önce söylediğim gibi bunların temelinde yatan faktörün tam olarak ne olduğunu hatırlamıyorum, o yüzden derse gitmeden önce bunu inceleyip derse öyle gitmeyi tercih ederdim."* ifadesi PB ve PAB'ındaki eksikliği destekler niteliktedir. Ö4'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Periyot konusunun günlük hayatta çok sık kullanıldığını düşünüyorum. Periyot kavramının benimsenebilmesi için hayatın içinden olabildiğince ilgi çekici örnekler vermeye çalışırdım. Şimdi bu periyodiklik durumu grafik kavramından önce mi veriliyor sonra mı? Çünkü grafikle bunu açıklamak bana daha görsel anlaşılır geliyor. Şuan hatırlamıyorum konunun nerde olduğunu. Eğer öğrenci grafik bilgisine sahipse grafik üzerinden anlatmanın çok daha yararlı olacağını düşünüyorum… Daha önce söylediğim gibi bunların temelinde yatan faktörün tam olarak ne olduğunu hatırlamıyorum, o yüzden derse gitmeden önce bunu inceleyip derse öyle gitmeyi tercih ederdim."*

Ö4 bir trigonometrik fonksiyonun grafiğini ise ilk olarak bilinen değerlerden hareket ederek öğrencilere çizdirmeyi planlamıştır. Örnek olarak, tanx fonksiyonunun 30º, 45º, 60º değerlerinden başlayarak grafiği çizmiş, ardından grafiği tanımsız yapan x değerlerini öğrencilere göstereceğini söylemiştir (Bknz. Şekil 63). Ancak Ö4 öğretimi nasıl gerçekleştirmeyi planladığını detaylı şekilde açıklayamamış dolayısıyla PB'si ile AB'sini etkili şekilde birleştirememiştir. Ö4'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki gibidir:

"Sanırım yine özel değerler kullanarak belirli kıvrım noktaları belirlerim. Sonra asıl sıkıntı olan yerler $\frac{\Pi}{2}$ *gibi. Tanımsız olan yerler açıklanabilir. 30º, 60º, 45º bildiğim değerleri işaretledim.* $\frac{\Pi}{2}$ *tanımsız olacak yerleri işaretledim. Bilinen değerlerden öğrenciye göstermeye başlarım."*



Şekil 63. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri konusunun öğretimi ile ilgili örneği

Özet olarak bakıldığında katılımcıların trigonometri özelindeki bazı konuların öğretimine yönelik söylemlerinden elde edilen verilen doğrultusunda Katılımcı Ö1'in trigonometrik fonksiyonların öğretiminde (grafik ve periyotlarının) öğrencilerin ön öğrenmelerini dikkate alarak, öğrencilere yönelteceği soru ve ipuçlarına yer vererek PB'si ile AB'sini birleştirerek PAB'ının varlığına kanıt sunmuştur. Katılımcı Ö2'nin, sınıf içi uygulama konusunda yeterli deneyime sahip olmaması nedeniyle, trigonometri konu ve kazanımlarının sırasına tam olarak hakim olmadığı ve öğretime yönelik söylemlerini detaylandıramadığı görülmüştür. Dolayısı ile Ö2'nin PB ve PAB'ında eksiklikler olduğu tespit edilmiştir. Katılımcı Ö3'ün öğretim deneyiminin olduğu trigonometri konularında (trigonometrik fonksiyonların öğretimi, karşılaştırılması) PB ve PAB'a yönelik kanıt sunduğu görülse de öğretim deneyimine sahip olmadığı trigonometri konularında (trigonometrik fonksiyonların grafik ve peryotları) ise öğretime yönelik söylemlerini detaylandıramamıştır. Dolayısı ile Ö3'ün PAB'ında eksiklikler olduğu görülmüştür. Katılımcı Ö4'ün, trigonometri konularının öğretimine yönelik güçlük yaşadığı görülmüştür. Ayrıca AB'sinde eksiklikler nedeniyle öğretimi nasıl gerçekleştireceğini detaylandıramamış, dolayısı ile PB ve PAB'ında eksiklikler olduğu tespit edilmiştir.

4.3. Teknoloji Bilgisi (TB)

Bu başlık altında, katılımcıların trigonometri konusu özelinde sorulan sorularda GeoGebra yazılımını kullanma süreçlerinde ortaya çıkan teknoloji bilgileri detaylı olarak incelenmiştir. Özel olarak, katılımcıların teknoloji bilgisi belirlenirken, yapılan bireysel görüşmeler sırasında sorulan soruları cevaplarken veya etkinlik geliştirirken GeoGebra yazılımının araç çubuklarını nasıl kullandıkları ve araç çubuklarının işlevlerini bilip bilmedikleri incelenmiş ve ortaya çıkan bulgular her bir katılımcı için ayrı şekilde oluşturulmuş tablolarda özet olarak sunulmuştur. Tablolarda öğrencilerin kullandıkları araçlar, özellikler ve kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri araç çubukları ile özelliklere yer verilmiştir (Bknz. Tablo 24). Genel olarak öğrencilerin etkinlikleri oluştururken GeoGebra programının taşıma, nokta, doğru, özel doğru, çokgen, çember ve yay, ölçüm nesne, eylem nesne ve genel araçlarını; grafik penceresi özelliklerini ve nesnenin özellikleri kullandıkları görülmüştür. Tablolar daha detaylı şekilde ele alındığında, yapılan görüşmelerden katılımcıların teknoloji bilgisini destekleyici söylemler ve ekran üzerinde yaptıkları eylemlerden teknoloji bilgisine ait bulgular ortaya çıkmıştır.

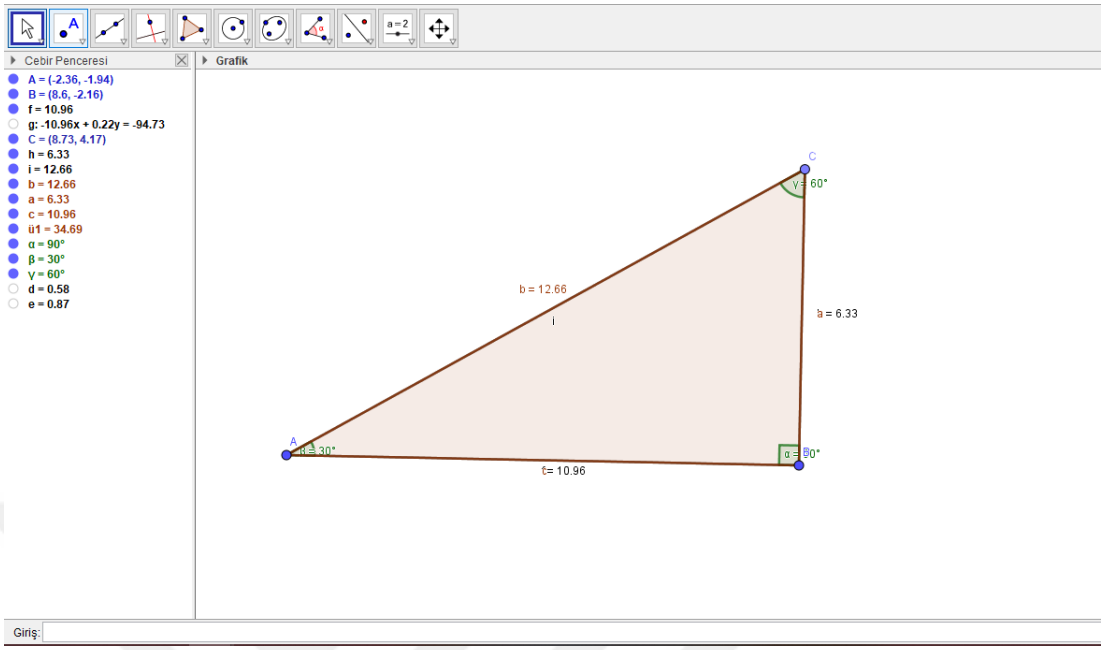
Tablo 24

Katılımcı Ö1'in kullandıkları araçlar ve özellikler ile kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri araçlar ve özellikler tablosu

<table>
<tr><td>Katılımcı</td><td colspan="2">Kullandıkları araçlar</td><td>Kullandıkları özellikler</td><td>Kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri araçlar</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ö1</td><td>Taşıma araçları
• Taşı aracı
Nokta araçları
• Nokta aracı
• Kesiştir aracı
Doğru araçları
• Doğru aracı</td><td>Ölçüm araçları
• Açı aracı
• Verilen ölçüde açı aracı
• Uzaklık veya uzunluk aracı</td><td>Grafik penceresi özellikleri
• Eksenler
• Izgara
• Grafik
- x ekseni
- y ekseni
Nesnenin özellikleri</td><td>Özel nesne araçları
• Metin aracı</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>Kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri özellikler</td></tr>
</table>

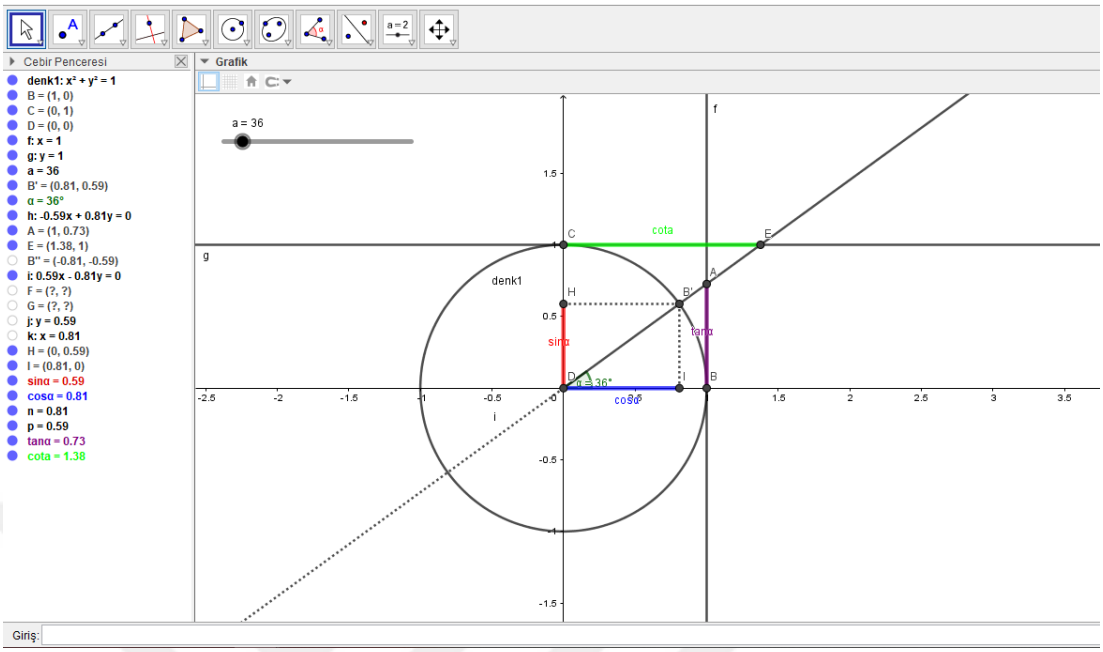
	• Doğru parçası aracı • Işın aracı Özel doğru araçları • Dik doğru aracı • Paralel doğru aracı • Teğet aracı Çokgen araçları • Çokgen aracı Çember ve yay araçları • Merkez ve yarıçap ile çember aracı	Özel nesne araçları • Metin aracı Eylem nesne araçları • Sürgü aracı • İşaret kutusu aracı Genel araçlar • Yakınlaştır aracı • Uzaklaştır aracı • Nesneyi göster/gizle aracı • Etiketi göster/gizle aracı • Sil aracı	• Nesneyi göster • Etiketi göster • İzi aç • Ad değiştir • Sil • Özellikler - Temel - Renk - Stil - Gelişmiş * Nesneyi gösterme şartı Görünüm • Cebir penceresi • Grafik 2 Giriş çubuğu	Nesnenin özellikleri • Özellikler - Gelişmiş * Nesneyi gösterme şartı

Yukarıda verilen tablodan ortaya çıkan Ö1'in teknoloji bilgisi incelendiğinde, Ö1'in GeoGebra yazılımının araç çubuklarının işlevlerini ve yerlerini iyi bildiği, kullanacağı araç çubuğunun yerini kolayca bulabildiği, GeoGebra yazılımını oldukça pratik bir şekilde kullandığı görülmüştür. Örnek olarak, Ö1 nokta, doğru, özel doğru ve çokgen araçlarını kullanarak dik üçgen oluşturabilmiş; açı, uzaklık veya uzunluk ölçme araçlarını kullanarak bu dik üçgenin açı ve kenar uzunluklarını ölçebilmiştir (Bknz. Şekil 64). Bu teknolojik eylemi geliştirirken, Ö1 öncelikle GeoGebra yazılımının grafik özelliklerinden olan ızgara görünümünü kapatmış ardından sırasıyla doğru aracını kullanarak iki noktadan geçen bir AB doğrusu çizmiş, özel doğru araçlarından dik doğru aracını kullanarak AB doğrusuna dik CB doğrusunu elde etmiştir. Ardından çokgen aracını kullanarak kolaylıkla ABC dik üçgenini inşa etmiş ve bu üçgene ait elemanları ölçerek sorulan soruyu teknoloji bilgisi ile desteklemiştir.



Şekil 64. Ö1'in GeoGebra yazılımı üzerinde dik üçgen çizimi

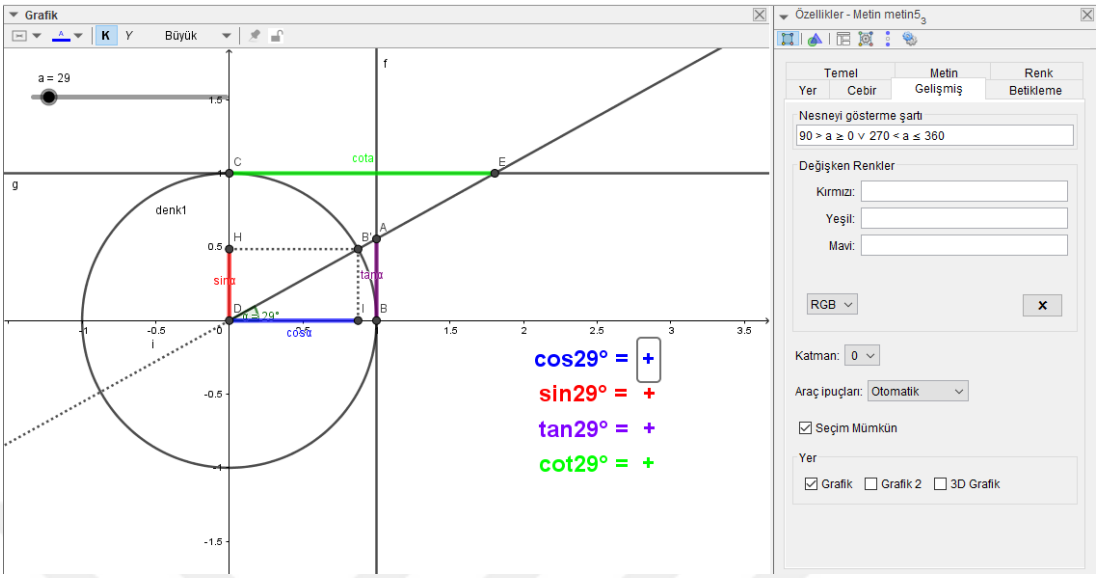
Ö1, sadece dik üçgen oluşturmada değil benzer teknolojik eylemleri birim çember ve trigonometrik fonksiyonlarla ilgili farklı çalışmalar yaparken de uygulamıştır (Bknz. Şekil 65). Örneğin, Ö1 birim çember inşasında, öncelikle GeoGebra yazılımının grafik özelliklerinden olan ızgara görünümünü kapatmış ardından giriş çubuğuna $x^2 + y^2 = 1$ birim çember denklemini yazarak çemberi oluşturduktan sonra kesiştir aracını kullanarak birim çember ile eksenlerin kesişimi ile oluşan B ve C noktalarını elde etmiştir. Özel doğru araçlarını kullanarak da B ve C noktalarından geçen eksenlere dik f ve g doğrularını çizmiştir. Ardından verilen ölçüde açı aracını kullanarak çemberin içerisinde sürgüye bağlı bir açı oluşturmuş ve sürgünün özelliklerini değiştirerek sürgüyü 0º ile 360º arasında tanımlamıştır. Açının kolunu göstermek için ise ışın aracını kullanarak O ve B' noktalarından geçen bir ışın çizimi yapmıştır. Kesiştir aracını tekrar kullanarak dik doğrular ile ışını kesiştirerek A, E noktalarını belirledikten sonra dik doğru aracını kullanarak B' noktasından geçen eksenlere dik doğrular çizmiş ve H ve I noktalarını ele etmiştir. Son olarak doğru parçası aracını kullanarak OH, OI, AB, EC doğru parçalarını oluşturmuş, nesnenin özelliklerini bölümünü kullanarak doğru parçalarının isimlerini her bir trigonometrik fonksiyona uygun şekilde değiştirmiş, renk özelliği ile de trigonometrik oranları farklı renklerde göstermiştir.



Şekil 65. Ö1'in trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü

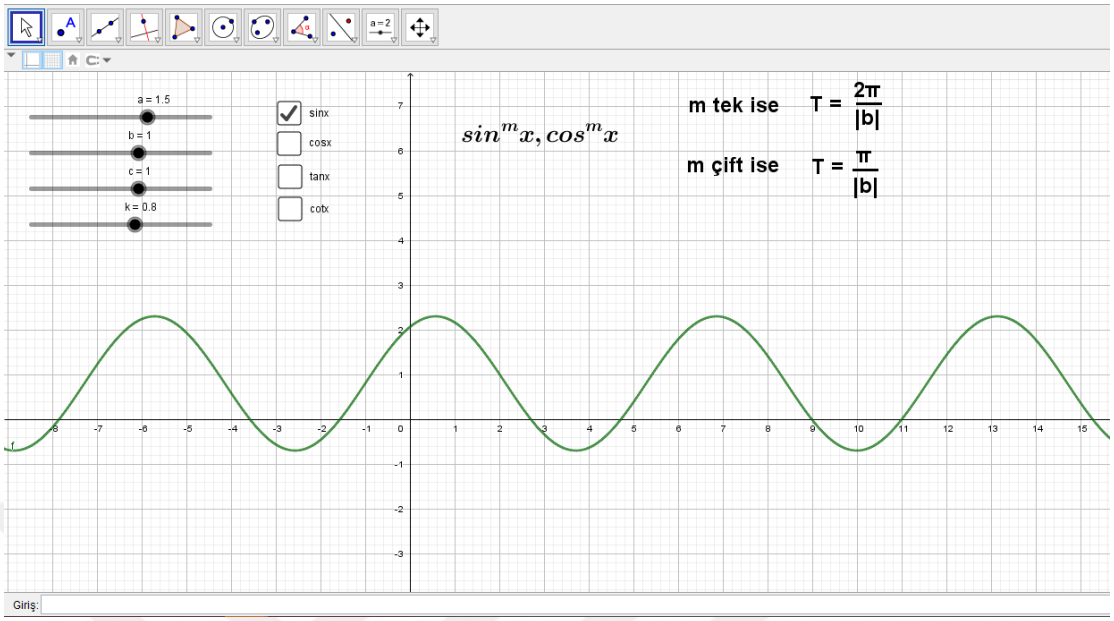
Ö1, özel nesne araçlarından metin aracını kullanarak Şekil 65'teki etkinliğine verilen açı değerindeki trigonometrik fonksiyonları ve işaretlerini eklemiştir. Ardından Ö1 verilen trigonometrik fonksiyonların pozitif ve negatif oldukları açı değerlerinin aralıklarını, nesnelerin özelliklerinden biri olan nesneyi gösterme şartını bölümüne yazmış ancak yazılımın anadiline uygun olarak yazmadığı için yazılım tarafından kabul edilmemiştir. Ö1 birkaç denemesinden sonra nesneyi gösterme şartlarını yazılımın diline uygun şekilde yazarak trigonometrik fonksiyonların açı değiştikçe işaretlerinin değişimini doğru şekilde gösterebilmiştir. Son olarak ise nesnenin renk özelliğini kullanarak birim çemberde verilen trigonometrik fonksiyonların renkleri ile metinlerin renklerini uyumlu hale getirmiştir (Bknz. Şekil 66). Ö1'in bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Nesneyi gösterme koşulunu kullanırken bir tık zorlandım. Çünkü hani ne olduğunu biliyorum mesela kosinüsü şu aralıkta pozitif olacak bu aralıkta negatif olacak ama yazarken her kodu kabul etmiyor GeoGebra. Yani doğru bir biçimde yazmamız gerekiyor benden kaynaklı. Onları bazen atladığım için o konuda biraz sıkıntı çıktı. Yani onun dışında pek bir sıkıntı çıkmadı açıkçası."*



Şekil 66. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların işaretleri etkinliği ekran görüntüsü

Ö1, trigonometrik fonksiyonların periyotları ile ilgili etkinliğinde özel nesne araçlarından metin aracının yanında işaret kutusu aracını da etkili şekilde kullanmıştır. Ö1, etkinliği oluştururken GeoGebra yazılımının giriş çubuğuna katsayıları sürgüye bağlı olan asin(bx+c)+k şeklindeki trigonometrik fonksiyonları yazarak fonksiyonların grafiklerini çizdirmiştir. Ardından metin aracını kullanarak her bir trigonometrik fonksiyonun periyotları ile ilgili formülleri eklemiş; işaret kutusu aracı ile de trigonometrik fonksiyonların her biri için işaret kutusu oluşturup ilgili bilgileri uygun kutulara bağlayarak etkinliği kalabalık görüntüsünden kurtarmıştır (Bknz. Şekil 67).



Şekil 67. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların periyotları etkinliği ekran görüntüsü

Ö1 metin aracını etkili bir şekilde kullansa da kullanmayı sevmediğini söylemiş ancak GeoGebra yazılımında metin kutusunun olmasının iyi bir özellik olduğunu belirtmiştir. Ö1'in GeoGebra yazılımının metin aracı için söylemi şu şekildedir:

> *"Metin kutularından memnun değilim evet bir tık yoruyor ama en azından metin kutusu olması iyi bir özellik bunları gösterebilmek iyi bir şey."*

Ö1 oluşturduğu etkinliklerinde aynı zamanda sürgü aracını kullanarak GeoGebra yazılımının dinamiklik özelliğinden yararlanmıştır (Bknz. Şekil 65, Şekil 66, Şekil 67). Şekil 65 ve Şekil 66'da birim çember içerisindeki açıyı sürgüye bağlayarak açı değiştikçe trigonometrik oranların da buna bağlı değişmesini sağlamıştır. Benzer şekilde Şekil 67'de de trigonometrik fonksiyonun denkleminin katsayılarını sürgüye bağlamış ve katsayıların değişimi ile trigonometrik fonksiyonun grafiğinin ve periyodunun değişimini ilişkilendirerek TB'sine dair kanıtlar sunmuştur.

Ö1 yapılan görüşmelerde GeoGebra programını kullanmaya lisans eğitiminden sonra da devam ettiğini, GeoGebra yazılımında ara ara farklı şeyler denediğini, hatta çözemediği sorular için de GeoGebra yazılımından faydalandığından bahsetmiştir. Ö1'in bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"GeoGebraya hem ilgim var hem de ara ara bakıyorum. GeoGebra programının eğitimini lisansta alırken hoca mesela bir ödev veriyordu ders içinde yapmamız için onu yapıyordum ve sonrasında başka şeyler kurcalamaya devam ediyordum. Hani buraları hep kurcalıyordum tek tek özelliklerini deneyip neler yaptık yapabiliyoruz bakıyordum. Hem bu hem de kendi yaptığım ders planlarındaki GeoGebrayı kullanmaya çalışıyorum. Kullanmaya çalıştığım için de hani doğru yanlış bir şekilde geliştiriyorsun kendini… Lisanstan sonra da kullanmaya devam ettim. Aklıma bir şey geldiği zaman GeoGebra üzerinde göstermeye çalışıyorum. Mesela çözemediğim geometri sorularını GeoGebraya aktarmaya çalışıyorum. Sonra GeoGebra üzerinde oynamalar yaparak soruyu daha iyi anlamaya çalışıyorum."*

Genel olarak bakıldığında, trigonometri konusu özelinde sorulan sorular çerçevesinde Ö1'in dik üçgen, birim çember ve trigonometrik oranlarla ilgili GeoGebra yazılımını kullanarak çalışmalar yapıp etkinlikler oluşturduğu görülmüştür (Bknz. Şekil 64, 65, 66 ve 67). Ö1'in yazılımın araç çubuklarının işlevlerini ve yerlerini iyi bildiği, kullanacağı araç çubuğunun yerini kolayca bulabildiği, GeoGebra yazılımını oldukça pratik bir şekilde kullandığı belirlenmiştir. Etkinliklerinde verilen ölçüde açı, sürgü gibi araçlar ile GeoGebra yazılımının dinamiklik özelliğinden faydalanmış, metin, işaret kutusu araçları ile de etkinliklerini desteklemiştir (Şekil 66 ve 67). Sadece nesneyi gösterme şartı özelliğini kullanırken ilk başta sorun yaşamış birkaç denemesinden sonra sorunu çözüp aracı kullanabildiği görülmüştür.

Ayrıca Ö1 GeoGebra yazılımının Grafik penceresinin özelliklerini kullanarak x ve y eksenini hedeflediği özellikte ayarlayabilmiş (dik üçgen ve birim çember ekranlarında görüldüğü gibi Şekil 64 ve 65), grafik 2 penceresini kullanarak birim çember ve trigonometrik fonksiyonların grafiklerini farklı pencerelerde eşzamanlı olarak göstermiştir. Etkinlikleri inşa ederken genel araçlardan olan yakınlaştır ve uzaklaştır aracını kullanarak çizimlerini daha dikkatli ve doğru bir şekilde gerçekleştirmiş, çizdiği nesnelerin Cebir penceresindeki yerlerine ve gösterimlerine de hakim olarak etkinliklerini oluşturmuştur. Etkinliklerde geometrik şeklin nasıl göründüğüne önem vererek nesneyi göster/kapat ve Etiketi göster/kapat araç çubuklarını kullanmış, nesnelerin özelliklerini değiştirerek de farklı renk ve stillerde gösterebilmiştir (Bknz. Şekil 65, Şekil 67). Özet olarak, Ö1'in TB'sinin etkili ve trigonometri konusu

özelindeki soru ve etkinliklerin çözümünde ve oluşturulmasında gelişmiş olduğu görülmektedir.

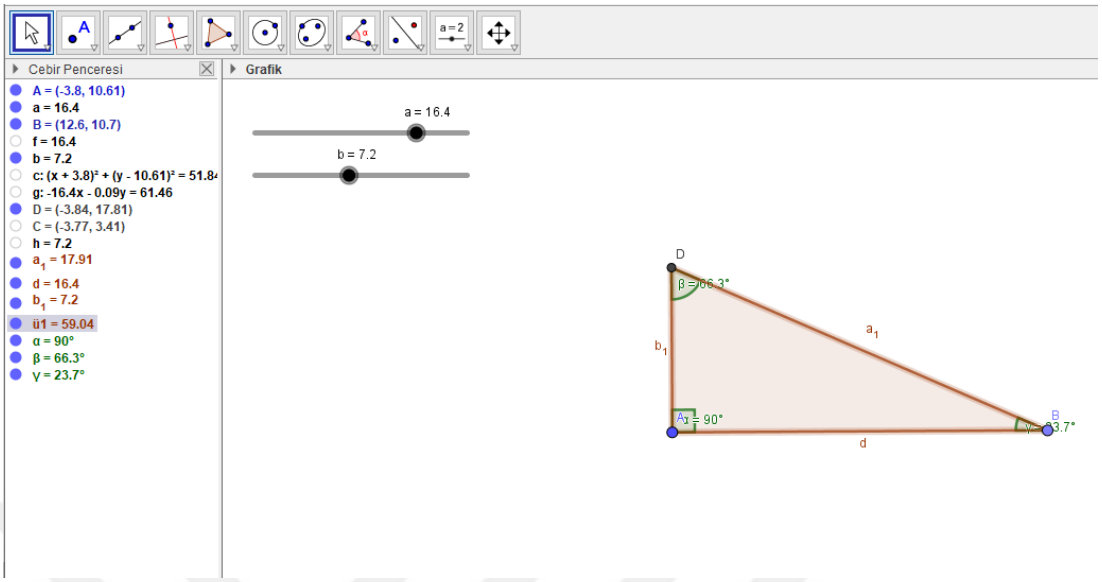
Tablo 25

Katılımcı Ö2'nin kullandıkları araçlar ve özellikler ile kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri araçlar ve özellikler tablosu

<table>
<tr><th>Katılımcı</th><th colspan="2">Kullandıkları araçlar</th><th>Kullandıkları özellikler</th><th>Kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri araçlar</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Ö2</td><td rowspan="4">Taşıma araçları
• Taşı aracı
Nokta araçları
• Nokta aracı
• Kesiştir aracı
Doğru araçları
• Doğru aracı
• Doğru parçası aracı
• Verilen ölçüde doğru parçası aracı
• Işın aracı
Özel doğru araçları
• Dik doğru aracı
• Paralel doğru aracı
• Teğet aracı
Çokgen araçları</td><td rowspan="4">Ölçüm araçları
• Açı aracı
• Verilen ölçüde açı aracı
• Uzaklık veya uzunluk aracı
Özel nesne araçları
• Metin aracı
Eylem nesne araçları
• Sürgü aracı
• İşaret kutusu aracı
Genel araçlar
• Yakınlaştır aracı
• Uzaklaştır aracı
• Nesneyi göster/gizle aracı</td><td rowspan="4">Grafik penceresini özellikleri
• Eksenler
• Izgara
• Grafik
- x ekseni
- y ekseni
Nesnenin özellikleri
• Nesneyi göster
• Etiketi göster
• İzi aç
• Ad değiştir
• Sil
• Özellikler
- Temel
- Renk
- Stil
- Gelişmiş
* Nesneyi gösterme şartı</td><td>Ölçüm araçları
• Verilen ölçüde açı
Özel nesne araçları
• Metin aracı</td></tr>
<tr><td>Kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri özellikler</td></tr>
<tr><td>Nesnenin özellikleri
• Özellikler
- Gelişmiş
* Nesneyi gösterme şartı</td></tr>
</table>

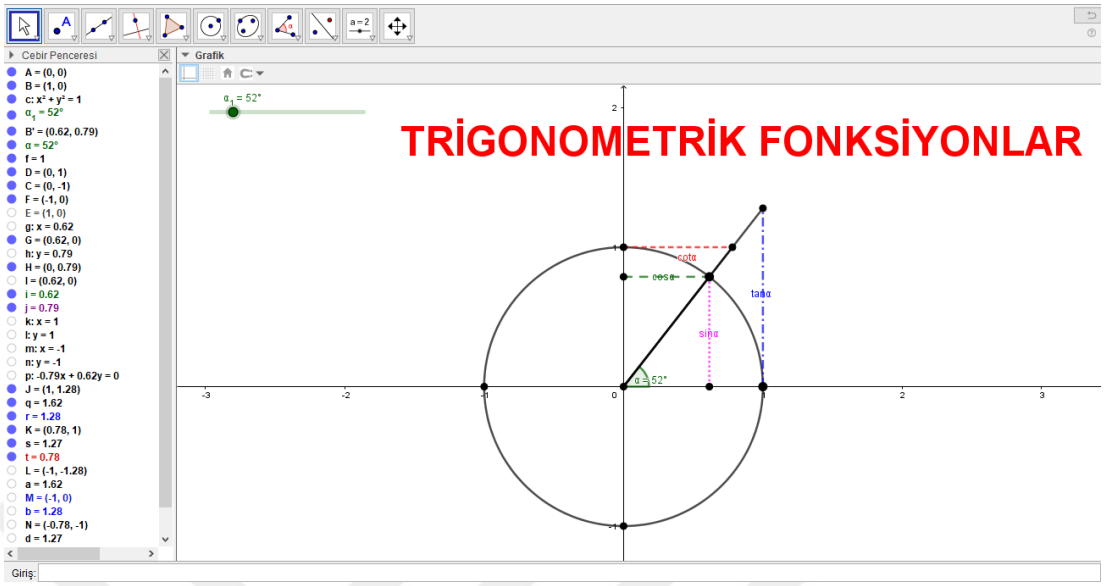
	• Çokgen aracı Çember ve yay araçları • Merkez ve nokta ile çember aracı • Merkez ve yarıçap ile çember aracı	• Etiketi göster/gizle aracı • Sil aracı	Görünüm • Cebir penceresi • Grafik 2 Giriş çubuğu	

Yapılan görüşmeler ve Tablo 25 incelendiğinde Ö1'in TB'sine benzer olarak Ö2'nin de genel olarak GeoGebra programının araçlarının işlevlerini ve yerlerini bildiği görülmüştür. Örnek olarak, Ö2 nokta, doğru, özel doğru ve çember ve yarıçap araçlarını kullanarak dik üçgen oluşturabilmiş; dik üçgenin açı ve kenarlarını açı, uzaklık ve uzunluk ölçme araçlarını kullanarak ölçebilmiştir. Ö2, Ö1'den farklı olarak dik üçgen inşasında verilen uzunlukta doğru parçası aracını kullanarak (Bknz. Şekil 68) dik kenarları sürgüye bağlı bir dik üçgen oluşturmuştur. Dik üçgeni inşa ederken verilen uzunlukta doğru parçası aracını kullanarak a sürgüsüne bağlı bir d kenarı, ardından merkez ve yarıçap aracını kullanarak A noktasından geçen yarıçapı b sürgüsüne bağlı bir çember oluşturmuştur. Çemberin d doğru parçasına dik olan b1 yarıçapı ile d doğru parçasını BD doğru parçası ile birleştirerek dik üçgen inşasını tamamlamıştır. Ö2'nin dik kenar uzunlukları iki farklı sürgüye bağlı olacak şekilde bir dik üçgen oluşturması ve bu dik üçgenin elemanlarını ölçebilmesi Ö2'nin TB'sinin kapsamlı olduğunu göstermiştir.



Şekil 68. Ö2'nin GeoGebra yazılımı üzerinde dik üçgen çizimi

Ö2'de Ö1 gibi benzer teknolojik eylemleri sadece dik üçgen inşa ederken değil birim çember ve trigonometrik fonksiyonlarla ilgili farklı çalışmalar gerçekleştirirken uygulamıştır. Örneğin, Ö2 birim çemberi inşa ederken öncelikle GeoGebra yazılımının grafik penceresi özelliklerini değiştirerek ızgara özelliğini kapatmış, x ve y eksenlerinin alacağı değerlerini 1'er birim aralıklı şekilde ayarlamış, ardından çember ve yay araç çubuğunun merkez ve nokta aracını kullanarak bir birim çember oluşturmuştur. Kesiştir aracını kullanarak çember ile eksenleri kesiştirdikten sonra verilen ölçüde açı aracını kullanarak çemberin içerisinde sürgüye bağlı bir açı oluşturmuş ve sürgünün özelliklerini değiştirerek sürgüyü 0º ile 360º arasında tanımlamıştır. Açının kolunu göstermek için ise ışın aracını kullanarak O noktasından ve çember üzerindeki diğer noktadan geçen bir ışın çizimi yapmıştır. Özel doğru araçlarından biri olan dik doğru aracını kullanarak kesişim noktaları olan (1,0), (0,1) noktalarından ve çemberin üzerindeki noktadan eksenlere dik doğru çizdikten sonra doğru parçası aracını kullanarak trigonometrik fonksiyonların yerlerini gösteren doğru parçalarını oluşturmuştur. Nesnenin özelliklerinden olan nesneyi göster/kapat özelliğini kullanarak çizimde görünmesini istemediği ışın ve doğruları kapattıktan sonra ise, etiketi göster/kapat özelliğini kullanarak da tüm elemanların isimlerini kapatmıştır. Son olarak doğru parçalarının isimlerini her bir trigonometrik fonksiyona uygun şekilde değiştirmiş, renk ve stil özelliğini de kullanarak trigonometrik oranları farklı renk ve şekillerde göstermiştir (Bknz. Şekil 69).



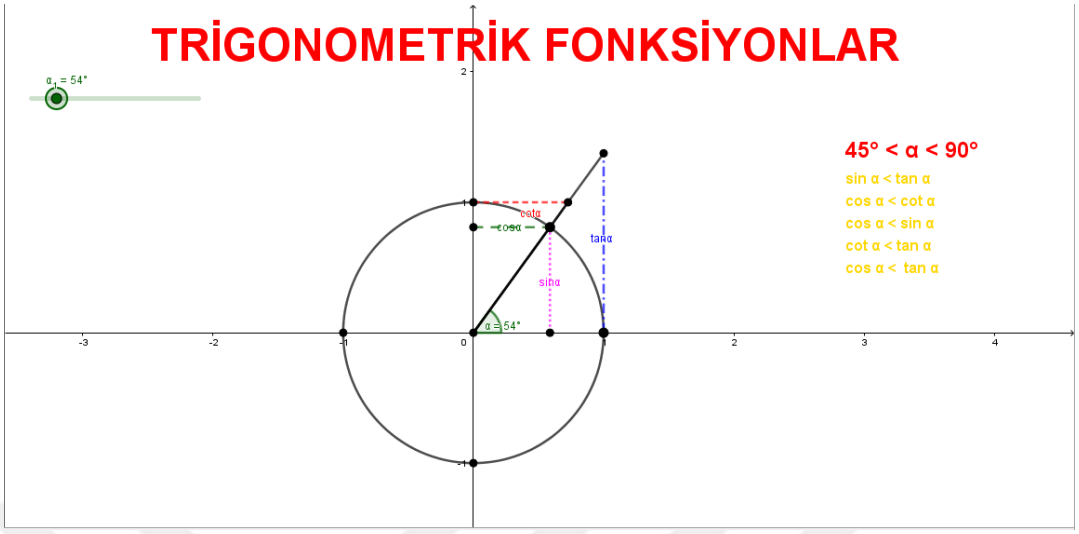
Şekil 69. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü

Ö2'nin inşa ettiği birim çember içerisine açı oluştururken verilen ölçüde açı aracını başta hatalı kullandığı daha sonra hatasını düzelterek açıyı oluşturduğu görülmüştür. İlk etapta Ö2 açıyı oluşturmak için noktaları saat yönünde seçmiş, açı istediği yönde oluşmayınca ise noktaları tam tersi yönde seçerek açıyı oluşturmuştur. Ö2'nin verilen ölçüde açı aracı için söylemi aşağıdaki şekildedir:

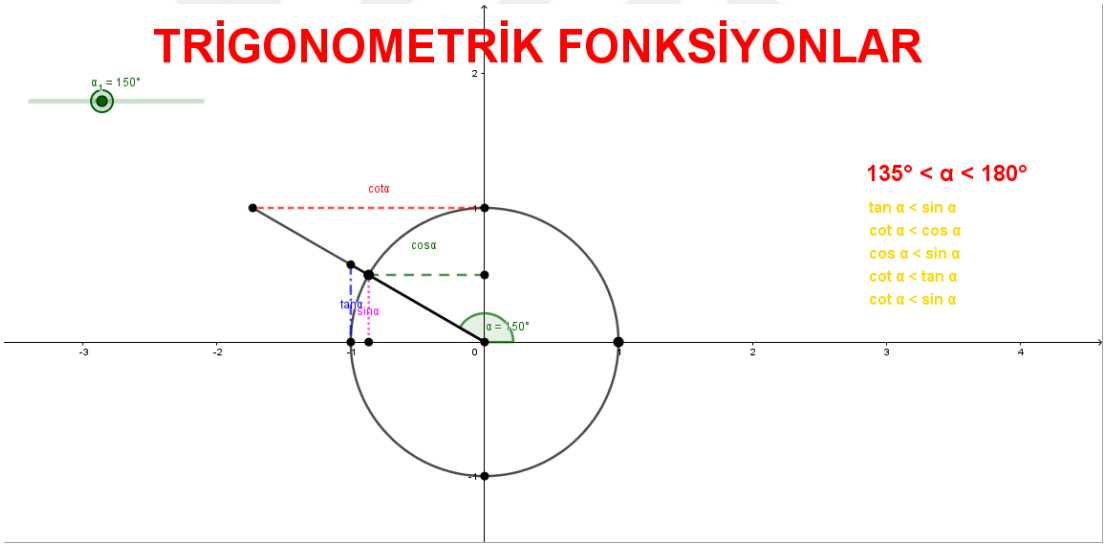
> *"Yine yanlış bastım. Bunu hep yanlış basıyorum. Önce neye basmam gerektiğini bilmiyorum sanırım."*

Ö2, Ö1 ile benzer şekilde nesnenin özelliklerinden olan nesneyi gösterme şartı bölümünü kullanırken de biraz zorlanmıştır. Şekil 70'te verilen trigonometrik oranların kıyaslanması ile ilgili olan etkinliğinde Ö2, öncelikle birim çember etkinliğine metin aracını kullanarak trigonometrik fonksiyonların bölgelere göre büyüklük küçüklüklerini metin olarak eklemiştir. Her metnin verilen açı değeri aralığında gözükmesi sağlamak için nesneyi gösterme şartı bölümüne, gösterilme koşullarını yazarken ilk etapta yazılımın anadiline uygun olarak yazmadığı için yazılım tarafından kabul edilmemiştir. Ö2 birkaç denemesinden sonra nesneyi gösterme şartlarını yazılımın diline uygun şekilde yazarak trigonometrik fonksiyonların açı değiştikçe kıyaslanmasını yazılımı kullanarak gösterebilmiştir (Bknz. Şekil 70 ve 71). Ö2'nin nesneyi gösterme şartı ile ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Nesneyi gösterme şartı oluşturmak biraz zaman alıyor açıkçası. Küçük sıkıntılar yaşadım. İlk başta oturtamamıştım ama kurcalayarak, matematikteki sembolleri kullanarak buldum."*



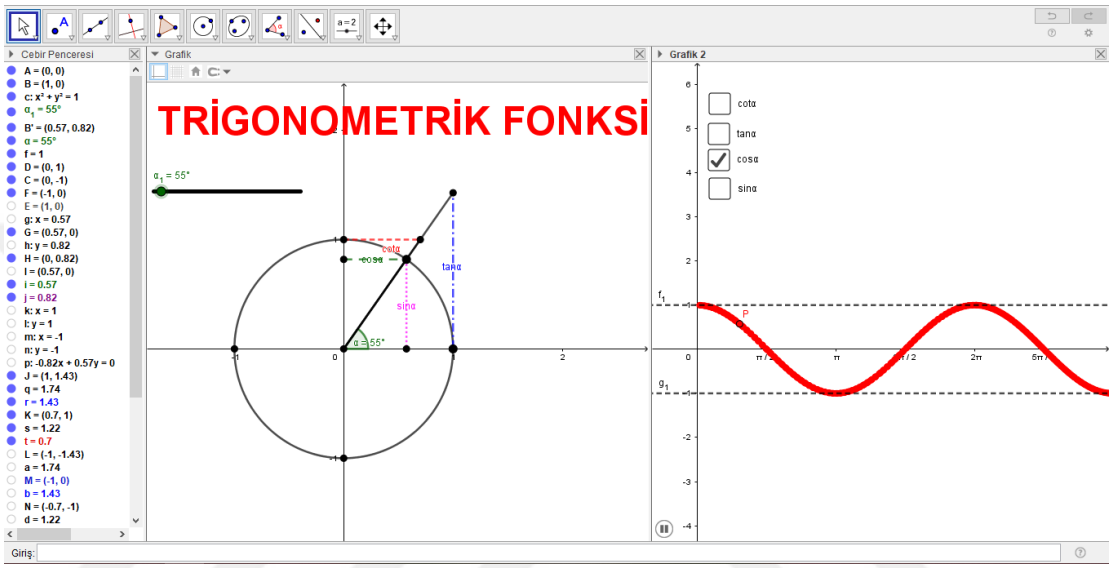
Şekil 70. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü



Şekil 71. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü-2

Ö2, Ö1 ile benzer şekilde GeoGebra yazılımının grafik 2 penceresini kullanarak birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonları ve trigonometrik fonksiyonların grafiklerini aynı ekran üzerinde göstermiştir. Ö2 bu teknolojik eylemleri gerçekleştirirken birim çemberi inşa ettikten sonra grafik 2 penceresini açarak giriş çubuğuna her bir açı değeri için trigonometrik fonksiyonların aldığı değerleri gösteren genel noktalar girmiştir. Sürgüyü canlandırıp ve bu noktanın özelliklerinden olan izi göster özelliğini açarak fonksiyonların grafiklerinin grafik 2 penceresinde çizilmesi sağlamış ve açı değeri değiştikçe iki penceredeki verilen eş zamanlı

olarak değişimini göstermiştir. Nesnenin özelliklerinden olan renk ve stil özelliklerini kullanarak da iki pencere verilen trigonometrik fonksiyonları uygun şekilde renklendirip, belirginleştirdikten sonra işaret kutusu aracı ile trigonometrik fonksiyonların her biri ile ilgili bilgileri uygun kutulara bağlayarak etkinliği kalabalık görüntüden kurtarmıştır (Bknz. Şekil 72).



Şekil 72. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü

Ö2 genel olarak etkinlikleri oluştururken zorlanmadığını, daha önce lisans derslerinde benzerlerini oluşturduğunu söylemiştir:

> *"Açıkçası pek zorlanmadım. Ama buradaki zorlanmamamın sebeplerinden biri de şu; 2. sınıfta yani lisans eğitimi döneminde bu etkinliklere çok benzer etkinlikler yapmıştık."*

Genel olarak bakıldığında, Ö2'nin Ö1'e benzer şekilde trigonometri konusu özelinde sorulan sorular çerçevesinde dik üçgen, birim çember ve trigonometrik oranlarla ilgili GeoGebra yazılımını kullanarak çalışmalar yapıp etkinlikler oluşturduğu görülmüştür (Bknz. Şekil 72 ve 73). Ö2'nin genel olarak yazılımın araç çubuklarının işlevlerini ve yerlerini iyi bildiği, kullanacağı araç çubuğunun yerini Ö1 kadar pratik şekilde olmasa da bulabildiği belirlenmiştir. Ö2 sadece, verilen ölçüde açı aracı ve nesneyi gösterme şartı özelliğini kullanırken ilk başta sorun yaşamış birkaç denemesinden sonra sorunu çözüp aracı ve özelliği kullanabilmiştir.

Ö2, Ö1 ile benzer şekilde GeoGebra yazılımının grafik penceresinin özelliklerini kullanarak x ve y eksenini hedeflediği özellikte ayarlayabilmiş (dik üçgen ve birim çember

ekranlarında görüldüğü gibi Şekil 71 ve 72), grafik 2 penceresini kullanarak birim çember ve trigonometrik fonksiyonların grafiklerini farklı pencerelerde eşzamanlı olarak göstermiştir. Etkinlikleri inşa ederken genel araçlardan olan yakınlaştır ve uzaklaştır aracını kullanarak çizimlerini daha dikkatli ve doğru bir şekilde gerçekleştirmiştir**.** Çizdiği nesnelerin cebir penceresindeki yerlerine ve gösterimlerine de hakim olarak etkinliklerini oluşturmuş, oluşturduğu etkinliklerde geometrik şeklin nasıl göründüğüne önem vererek nesneyi göster/kapat ve etiketi göster/kapat araç çubuklarını kullanmış, nesnelerin özelliklerini değiştirerek de farklı renk ve stillerde gösterebilmiştir (Bknz. Şekil 69 ve 70). Ö1'den farklı olarak ise Ö2'nin araç çubuklarının işlevlerini ve yerlerini bildiği ancak Ö1 kadar hızlı şekilde aradığı araç çubuğuna ulaşamadığı görülmüştür. Sonuç olarak Ö2 aradığı araç çubuğuna Ö1 kadar pratik şekilde ulaşamasa da Ö2'in TB'sinin etkili ve trigonometri konusu özelindeki soru ve etkinliklerin çözümünde ve oluşturulmasında gelişmiş olduğu görülmektedir.

Tablo 26

Katılımcı Ö3'ün kullandıkları araçlar ve özellikler ile kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri araçlar ve özellikler tablosu

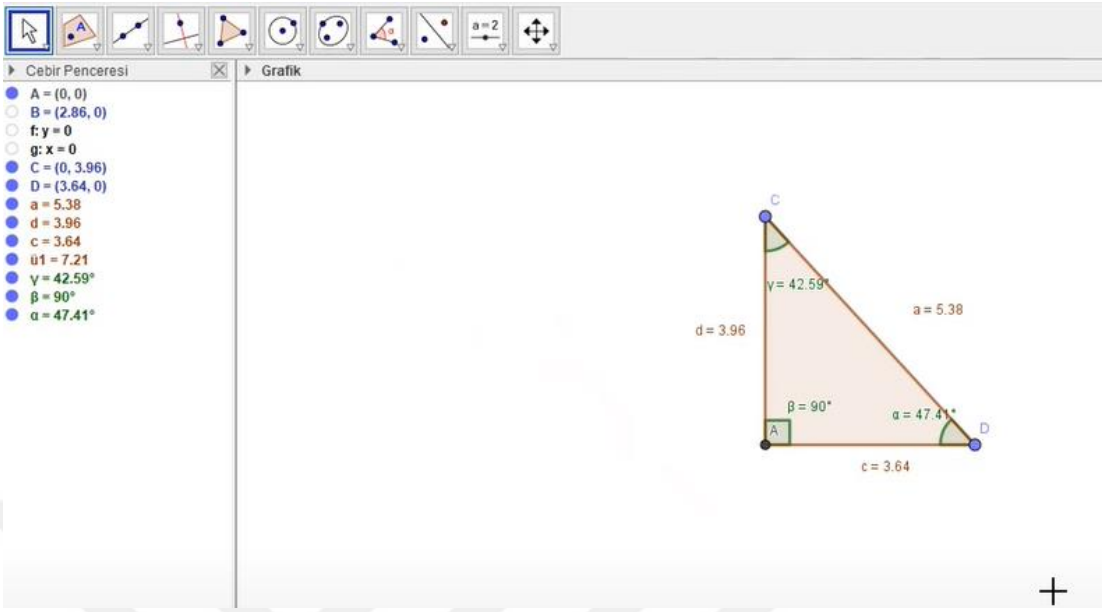
<table>
<tr><th rowspan="2">Katılımcı</th><th colspan="2" rowspan="2">Kullandıkları araçlar</th><th>Kullandıkları özellikler</th><th>Kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri araçlar</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Grafik penceresini özellikleri
• Eksenler
• Izgara
• Grafik
- x ekseni
- y ekseni

Nesnenin özellikleri
• Nesneyi göster</td><td>Özel nesne araçları
• Metin aracı

Eylem nesne araçları
• İşaret kutusu aracı</td></tr>
<tr><td>Ö3</td><td>Taşıma araçları
• Taşı aracı
Nokta araçları
• Nokta aracı
• Nesne üzerinde nokta
• Kesiştir aracı
Doğru araçları</td><td>Ölçüm araçları
• Açı aracı
• Verilen ölçüde açı aracı
• Uzaklık veya uzunluk aracı
Özel nesne araçları
• Metin aracı</td><td>Kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri özellikler</td></tr>
</table>

	• Doğru aracı • Doğru parçası aracı • Işın aracı Özel doğru araçları • Dik doğru aracı • Paralel doğru aracı • Teğet aracı Çokgen araçları • Çokgen aracı Çember ve yay araçları • Merkez ve yarıçap ile çember aracı	Eylem nesne araçları • Sürgü aracı • İşaret kutusu aracı Genel araçlar • Yakınlaştır aracı • Uzaklaştır aracı • Nesneyi göster/gizle aracı • Etiketi göster/gizle aracı Sil aracı	• Etiketi göster • İzi aç • Ad değiştir • Sil • Özellikler - Temel - Renk - Stil Görünüm • Cebir penceresi Giriş çubuğu	Grafik penceresini özellikleri • Grafik - x ekseni - y ekseni

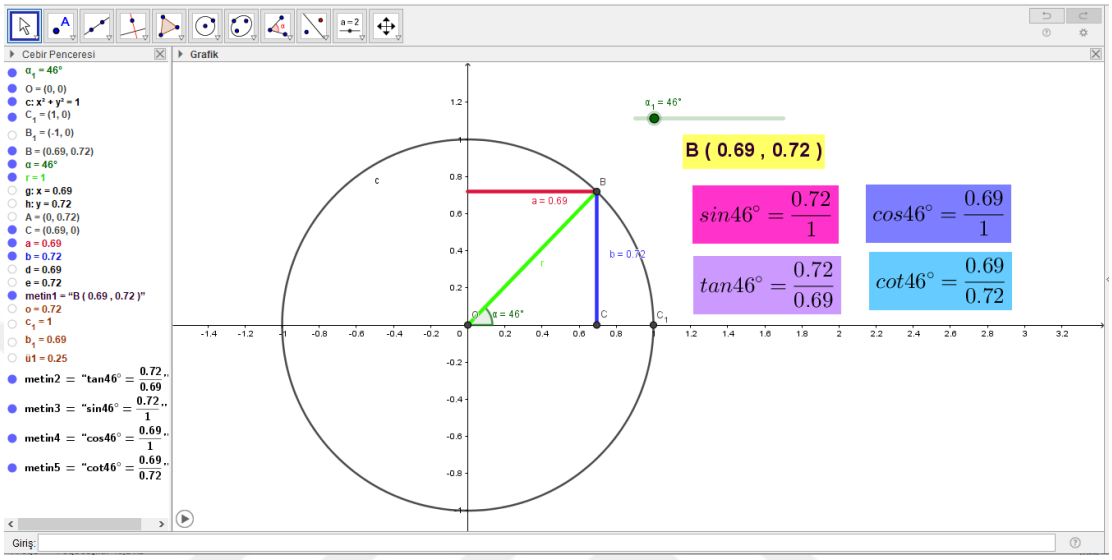
Yapılan görüşmeler incelendiğinde Ö3'ün Ö1 ve Ö2 ile benzer şekilde de genel olarak GeoGebra programının araçlarının işlevlerini ve yerlerini bildiği görülmüştür (Bknz. Tablo 26). Örneğin nokta, doğru, özel doğru ve çokgen araçlarını kullanarak dik üçgen oluşturabilmiş; dik üçgenin açı ve kenarlarını açı, uzaklık ve uzunluk ölçme araçlarını kullanarak ölçebilmiştir (Bknz. Şekil 73). Bu teknolojik eylemi geliştirirken, Ö3 grafik özelliklerinden olan ızgara görünümünü kapattıktan sonra doğru aracını kullanarak iki noktadan geçen bir doğru çizmiş, dik doğru aracını kullanarak bu doğruya dik doğru bir doğru elde etmiştir. Ardından çokgen aracını kullanarak dik üçgeni inşa etmiş ve bu üçgene ait elemanları ölçerek sorulan soruyu TB'si ile desteklemiştir.



Şekil 73. Ö3'ün GeoGebra üzerinde dik üçgen çizimi

Ö3'de Ö1 ve Ö2 gibi benzer teknolojik eylemleri sadece dik üçgen inşa ederken değil birim çember ve trigonometrik fonksiyonlarla ilgili farklı çalışmalar gerçekleştirirken uygulamıştır. Örneğin, Ö3 birim çemberi inşa ederken öncelikle grafik penceresinin özelliklerinden olan ızgara görünümünü kapatmış ardından GeoGebra yazılımının çember ve yay araç çubuğunun merkez ve yarıçap aracını kullanarak yarıçapı 1 birim seçerek birim çember oluşturmuştur. Ardından kesiştir aracını kullanarak birim çember ile eksenlerin kesiştirerek C1=(1,0) ve (0,1) noktalarını elde ettikten sonra bir açı sürgüsü tanımlayarak verilen ölçüde açı aracını seçip sürgüye bağlı bir alfa açısını oluşturmuştur. Sürgünün özelliklerini değiştirerek de sürgüyü 0º ile 360º arasında değiştirmiştir. Özel doğru araçlarından dik doğru aracını seçerek B noktasından x ve y eksenlerine dik doğrular çizmiş, doğru parçası aracı ile a ve b doğru parçalarını oluşturmuştur. Uzaklık ve uzunluk aracını ile de çizdiği doğru parçalarının uzunluklarını ölçmüştür. Son olarak metin aracını kullanarak trigonometrik oranların aldığı değerleri etkinliğe eklemiştir. Açının kolunu göstermek için ise ışın aracını kullanarak O ve B noktasından geçen bir ışın çizimi yapmıştır. Özel doğru araçlarından biri olan dik doğru aracını kullanarak kesişim noktaları olan (1,0), (0,1) noktalarından ve B noktasından eksenlere dik doğru çizdikten sonra doğru parçası aracını kullanarak trigonometrik fonksiyonların yerlerini gösteren doğru parçalarını oluşturmuştur. Nesnenin özelliklerinden olan nesneyi göster/kapat özelliğini kullanarak çizimde görünmesini istemediği ışın ve doğruları kapattıktan sonra ise, etiketi göster/kapat özelliğini kullanarak da tüm elemanların isimlerini kapattıktan sonra doğru parçalarının isimlerini her bir

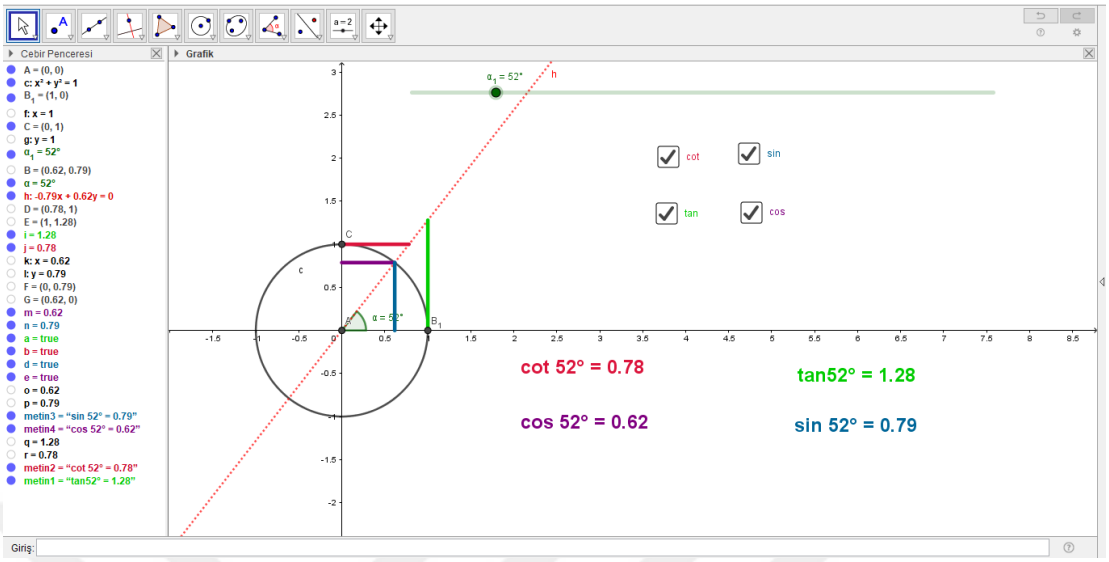
trigonometrik fonksiyona uygun şekilde değiştirmiştir. Son olarak metin kutusu aracını kullanarak trigonometrik fonksiyonların aldıkları değerleri ekleyerek renk ve stil özelliği ile trigonometrik oranları farklı renk ve şekillerde göstermiştir (Bknz. Şekil 74).



Şekil 74. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü

Ö3 trigonometrik oranların kıyaslanması ile ilgili etkinliğinde sürgü özelliklerinden sürgüsünün genişliğini artırarak istediği açı değerine daha kolay ulaşırken, özel nesne araçlarından biri olan işaret kutusu aracını kullanırken sorun yaşamıştır. Şekil 74'te verilen trigonometrik oranların aldığı değerleri işaret kutusu aracına bağlarken hata yaparak trigonometrik fonksiyonların 1. bölgedeki uzunluk değerlerini işaret kutularına bağlamıştır. Yaptığı hatayı fark edince ise trigonometrik oranların 4 bölgede de aldıkları değerleri işaret kutularına yeniden bağlamıştır (Bknz. Şekil 75). Ö3'ün işaret kutusu aracı için söylemi şu şekildedir:

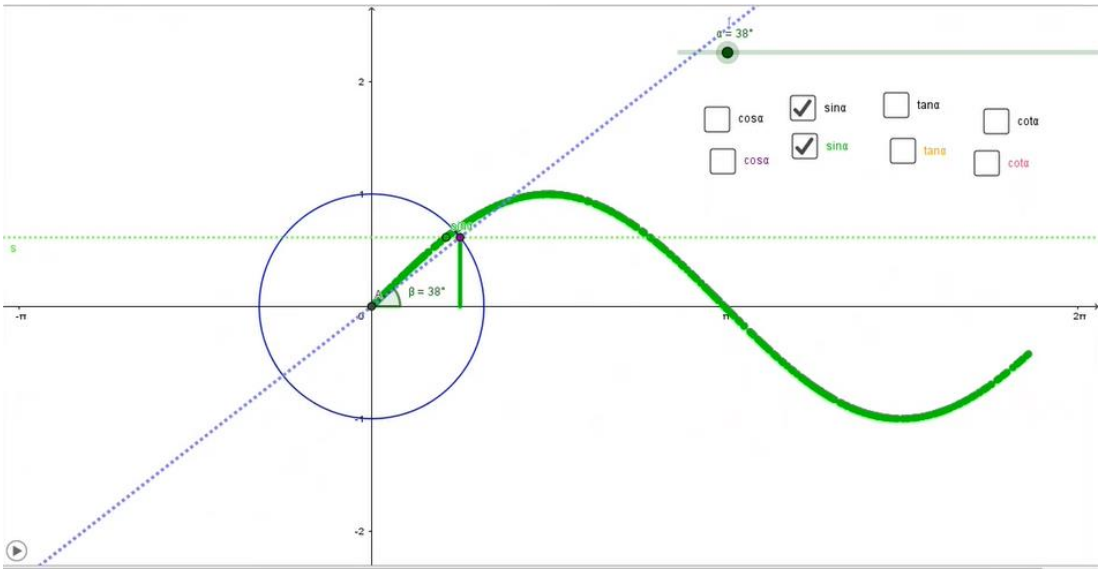
> *"Aslında bunu da biliyordum yapmayı okulda görmüştük ama niyeyse kullanmıyordum. Yani kullanmayı unutmuştum ben bunu, sonradan hatırladım. Hatta az önce şöyle bir bakındım düğme mi, işaret mi diye sonra düğmenin ne olduğunu hatırlamaya çalıştım ama burada şey oluyordu ya; tek tek basıyorduk ona direkt sonra bir şey çıkıyordu sürekli, aç kapa değil de değiştirme gibi bir şey yapıyorduk onda.*



Şekil 75. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü

Ö3 trigonometrik oranların grafikleri ile ilgili oluşturduğu etkinliğinde ise grafik 2 penceresini kullanmayı unutmuş, birim çemberi ve trigonometrik fonksiyonların grafiklerini aynı ekranda göstermiştir (Bknz. Şekil 76). Ö3'ün grafik 2 penceresi ile ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"2. pencereyi biliyorum. Kullanmak aklıma gelmedi sadece. Normal lisansta da yapmıştık. Bilmediğim bir şey değil. GeoGebra Tube'da da vardır zaten böyle yaptığım bir şey. "*



Şekil 76. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü

Ö3, grafik etkinliğini oluştururken birim çemberi inşa ettikten sonra giriş çubuğunu kullanarak her bir açı değeri için trigonometrik fonksiyonların aldığı değerleri gösteren genel bir nokta oluşturmuştur. Sürgüyü canlandırıp ve bu noktanın özelliklerinden olan izi göster özelliğini açarak açı değeri değiştikçe eş zamanlı olarak fonksiyonların grafiklerinin çizilmesi sağlamıştır. İşaret kutusu aracı ile de birim çemberdeki trigonometrik fonksiyonların her birini ve grafiklerini tek tek işaret kutularına bağlamıştır. Nesnenin özelliklerinden olan renk ve stil özelliklerini kullanarak da iki pencerede verilen trigonometrik fonksiyonları uygun şekilde renklendirip, belirginleştirmiştir. x eksenini de radyan cinsinden göstermek istemiş ancak x ekseninin birimini nasıl değiştirebileceğini bir süre aradıktan sonra grafik özelliklerini kullanarak x eksenin birimini radyan olarak değiştirmiştir.

Genel olarak bakıldığında, trigonometri konusu özelinde sorulan sorular çerçevesinde Ö3'ün Ö1 ve Ö2 ile benzer olarak dik üçgen, birim çember ve trigonometrik oranlarla ilgili GeoGebra yazılımını kullanarak çalışmalar yapıp etkinlikler oluşturduğu görülmüştür (bkz Şekil 73 ve 74). Ö3'nin genel olarak yazılımın araç çubuklarının işlevlerini bildiği, kullanmak istediği araç çubuğunu Ö1 ve Ö2 kadar pratik şekilde olmasa da bularak kullanabildiği belirlenmiştir. Ö3 etkinliklerinde Ö1 ve Ö2 ile benzer olarak ise verilen ölçüde açı, sürgü gibi araç çubuklarıyla GeoGebra yazılımının dinamiklik özelliğinden faydalanmış, işaret kutusu ve metin gibi araç çubukları ile etkinliklerini desteklemiştir (Bknz. Şekil 73, 74, 75 ve 76). Ancak işaret kutusu aracını kullanırken ilk başta hata yapmış ardından hatasını düzelterek aracı kullanmıştır. Etkinlikleri inşa ederken Ö1 ve Ö2 gibi genel araçlardan olan yakınlaştır ve uzaklaştır aracını kullanarak çizimlerini daha dikkatli ve doğru bir şekilde gerçekleştirmiştir**.** Etkinliklerde geometrik şeklin nasıl göründüğüne önem vererek nesneyi göster/kapat ve Etiketi göster/kapat araç çubuklarını kullanmış, nesnelerin özelliklerini değiştirerek de farklı renk ve stillerde gösterebilmiştir (Bknz. Şekil 74, 75 ve 76)

Ö3, Ö1 ve Ö2'den farklı olarak trionometrik fonksiyonların grafiklerinin gösterimlerinde grafik 2 penceresini kullanmamış ve Grafik penceresinin özelliklerini kullanarak x ve y eksenini hedeflediği özellikle ayarlama konusunda zorluk çektiği görülmüştür (Bknz. Şekil 76). Sonuç olarak Ö3'ün araç çubuklarının kullanımına Ö1 ve Ö2 kadar hakim olmasa da Ö4'ten daha fazla hakim olduğu görülmüştür. Ö3'ün TB'nin etkili ve trigonometri konusu özelindeki soru ve etkinliklerin çözümünde ve oluşturulmasında yeterli düzeyde olduğu görülmüştür.

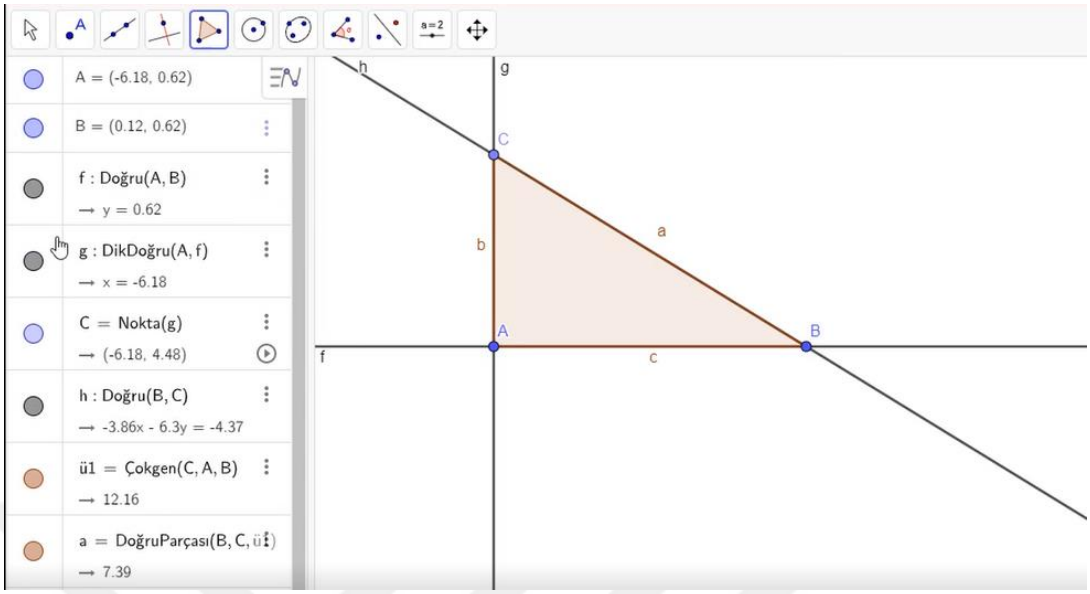
Tablo 27

Katılımcı Ö4'ün kullandıkları araçlar ve özellikler ile kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri araçlar ve özellikler tablosu

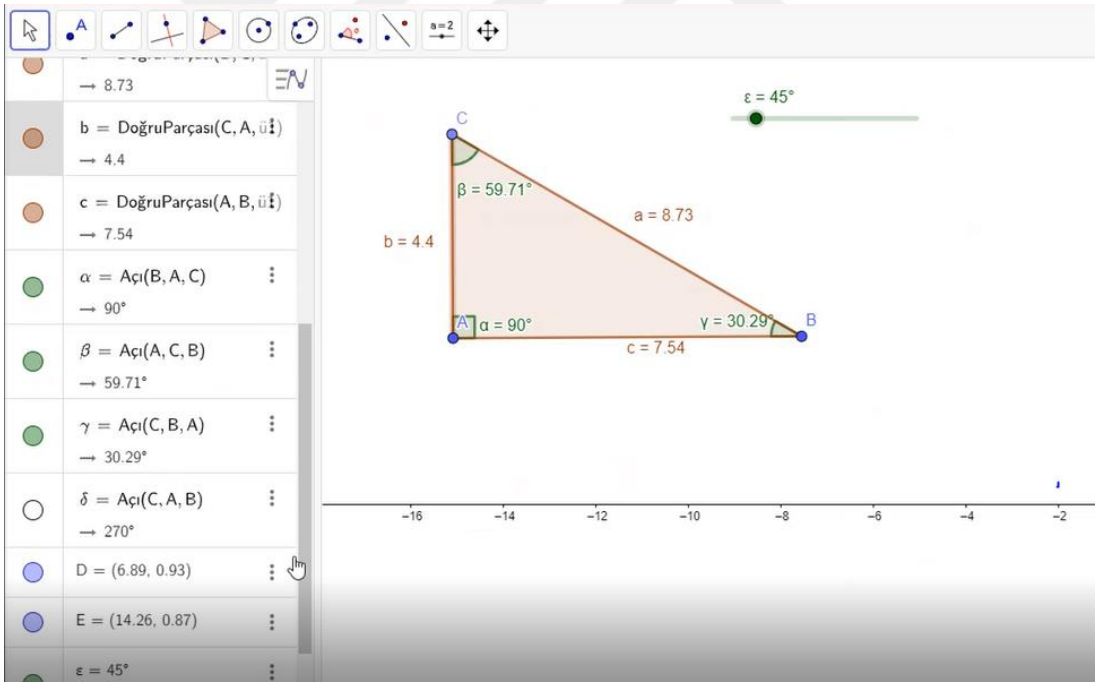
Katılımcı	Kullandıkları araçlar		Kullandıkları özellikler	Kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri araçlar
Ö4	Taşıma araçları • Taşı aracı Nokta araçları • Nokta aracı • Kesiştir aracı • Doğru araçları • Doğru aracı • Doğru parçası aracı • Işın aracı • Uç nokta • Kökler Özel doğru araçları • Dik doğru aracı • Paralel doğru aracı • Teğet aracı Çokgen araçları • Çokgen aracı	Ölçüm araçları • Açı aracı • Verilen ölçüde açı aracı • Uzaklık veya uzunluk aracı Özel nesne araçları • Metin aracı Eylem nesne araçları • Sürgü aracı • İşaret kutusu aracı Genel araçlar • Yakınlaştır • Uzaklaştır • Nesneyi göster/gizle aracı • Etiketi göster/gizle aracı • Sil aracı	Grafik penceresini özellikleri • Eksenler • Izgara • Grafik - x ekseni - y ekseni Nesnenin özellikleri • Nesneyi göster • Etiketi göster • İzi aç • Ad değiştir • Sil • Özellikler - Temel - Renk - Stil Görünüm • Cebir penceresi • Grafik 2 Giriş çubuğu	Nokta araçları • Kesiştir aracı Doğru araçları • Doğru aracı • Doğru parçası aracı • Işın aracı Özel doğru araçları • Dik doğru aracı • Paralel doğru aracı • Teğet aracı Ölçüm araçları • Uzaklık veya uzunluk aracı Özel nesne araçları • Metin aracı Eylem nesne araçları • İşaret kutusu aracı

	Çember ve yay araçları • Merkez ve yarıçap ile çember aracı			
				Kullanırken sorun yaşadıkları/tercih etmedikleri özellikler
				Görünüm • Cebir penceresi

Yapılan görüşmeler incelendiğinde Ö4'ün diğer katılımcılardan farklı olarak bazı araç çubuklarının işlevlerini, bazılarınınsa yerlerini unuttuğu görülmüştür (Bknz. Tablo 27). Örnek olarak Ö4 nokta, doğru, özel doğru ve çokgen araçlarını kullanarak dik bir üçgen inşa etmiş ve açı aracı ile bu üçgenin açılarını ölçebilmiştir. Ancak üçgenin kenar uzunluklarını ölçmek için gerekli olan uzaklık veya uzunluk ölçme aracının yerini hatırlayamamış, farklı araç çubuklarının içerisinde aramıştır. Ö4 bu teknolojik eylemleri gerçekleştirirken öncelikle özel doğru araçlarını kullanarak birbirine dik b ve c doğrularını ve bu doğrularla kesişen h doğrusunu çizmiştir (Bknz. Şekil 77). Ardından çokgen aracını kullanarak A, B ve C noktalarını birleştirip bir dik üçgen oluşturmuş ve ekranda görünmesini istemediği a, b, c doğrularını nesneyi göster/kapat özelliğini kullanarak kapatmıştır. Bu dik üçgenin açılarını ölçtükten sonra ise kenar uzunluklarını ölçebilmek için uzaklık veya uzunluk ölçme aracının yerini bir süre aramış, bulduktan sonra üçgenin kenarlarının uzunluklarını ölçebilmiştir (Bknz. Şekil 78).



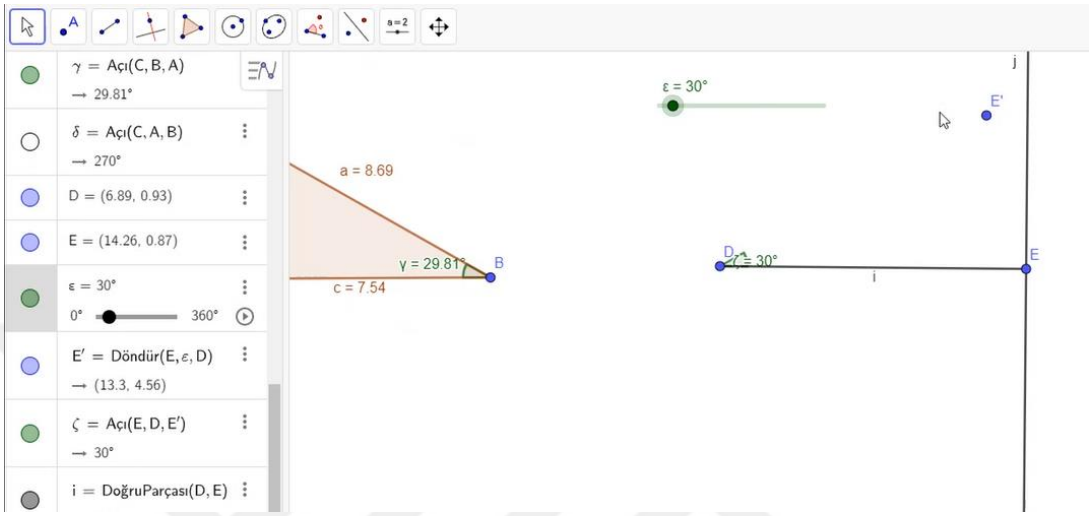
Şekil 77. Ö4'ün GeoGebra yazılımı üzerinde dik üçgen çizimi ekran görüntüsü



Şekil 78. Ö4'ün GeoGebra yazılımı üzerinde dik üçgen çizimi ekran görüntüsü-2

Ö4 oluşturduğu dik üçgenin açı ölçülerini değiştirerek özel bir üçgen elde etmek istemiş ancak oluşturamayınca yeni bir dik üçgen çizme girişiminde bulunmuştur. Özel dik üçgen oluşturma çalışması da olumsuz sonuçlanmıştır. Özel dik üçgenin inşası için öncelikle nokta aracını kullanarak D ve E noktalarını belirledikten sonra sürgü aracını kullanarak bir E açı sürgüsü tanımlamıştır. Ardından DE doğru parçasını çizmiş ve i doğru parçasına dik bir j

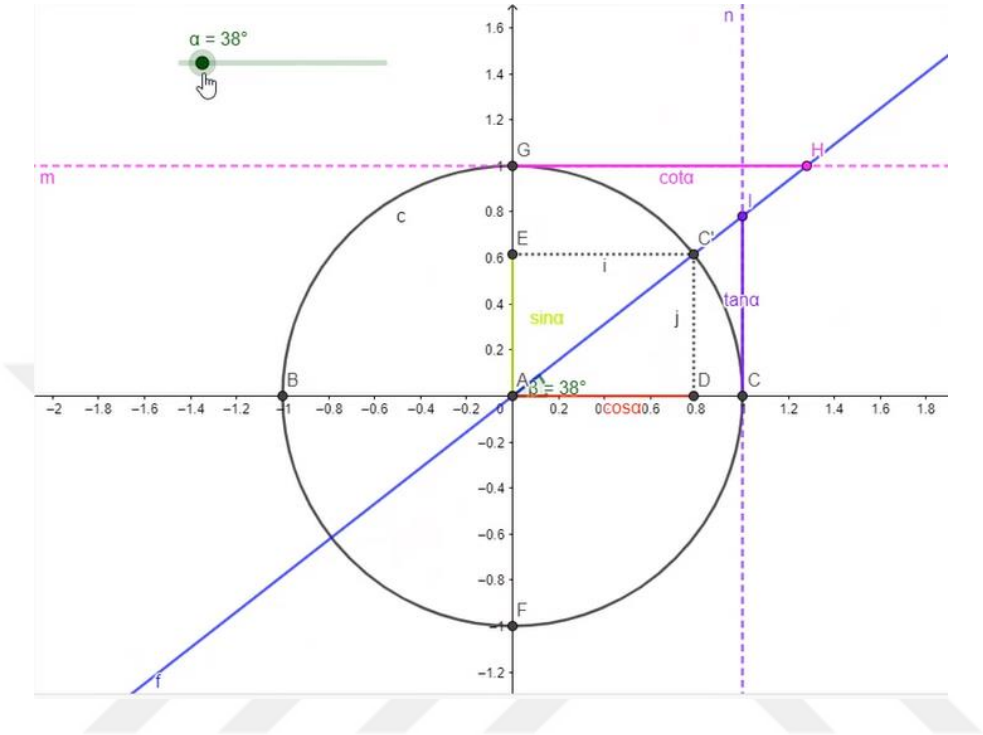
doğrusu oluşturmuştur. Son olarak verilen ölçüde açı aracını ve sırasıyla E, D noktalarını seçip E' noktasını elde etmiş ancak dik üçgeni nasıl tamamlayacağını bilemediği için devam edememiş, istediği özel üçgeni oluşturamamıştır (Bknz. Şekil 79).



Şekil 79. Ö4'ün GeoGebra yazılımı üzerinde dik üçgen çizimi ekran görüntüsü-3

Ö4 diğer katılımcılara benzer şekilde GeoGebra yazılımını kullanarak birim çember ve trigonometrik fonksiyonlarla ilgili çalışmalar yapmıştır. Ö4 birim çemberi inşa ederken grafik penceresinin özelliklerinden olan ızgara görünümünü kapattıktan sonra çember ve yay araç çubuğunun merkez ve yarıçap aracını kullanarak birim çember oluşturmuştur. Kesiştir aracını kullanarak çember ile eksenleri kesiştirerek C ve G noktalarını elde ettikten sonra verilen ölçüde açı aracını kullanarak çemberin içerisinde sürgüye bağlı bir açı oluşturmuş ve sürgünün özelliklerini değiştirerek sürgüyü 0º ile 360º arasında tanımlamıştır. Açının kolunu göstermek için ise ışın aracını kullanarak A ve C' noktalarından geçen bir ışın çizimi yapmıştır. Kesiştir aracını tekrar kullanarak dik doğrular ile ışını kesiştirerek H, I noktalarını belirledikten sonra özel doğru araçlarından olan dik doğru aracını kullanarak C' noktasından geçen eksenlere dik doğrular çizmiş ve D ve E noktalarını ele etmiştir. Dik doğru aracını tekrar kullanarak C ve G noktalarından geçen eksenlere dik m ve n doğrularını çizdikten sonra doğru parçası aracını kullanarak AE, AD, IC ve GH doğru parçalarını çizerek trigonometrik fonksiyonları oluşturmuştur. Trigonometrik fonksiyonların aldığı değerleri göstermek için ise doğru parçaların uzunluklarını ölçmek istemiş ancak yine uzaklık ve uzunluk ölçme aracının yerini bir süre aramıştır (dik üçgen çalışmasında olduğu gibi). Uzaklık ve uzunluk ölçme aracını bulduktan sonra çizdiği doğru parçalarının uzunluklarını ölçebilmiş ve nesnenin özelliklerini kullanarak doğru parçalarının isimlerini her bir trigonometrik fonksiyona uygun

şekilde değiştirip, renk ve stil özelliğini trigonometrik oranları farklı renk ve şekillerde göstermiştir (Bknz. Şekil 80).



Şekil 80. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü

Ö4 GeoGebra yazılımını kullanarak oluşturduğu birim çember etkinliğinin ekranına trigonometrik oranların aldığı değerleri metin olarak eklemek istemiş ancak özel nesne araçlarından olan metin aracının işlevini ve yerini bilmediği için trigonometrik oranların aldığı değerleri ekleyememiştir. Ö4'ün metin kutusunu aracı için söylemiş aşağıda şekildedir:

> *"GeoGebrada bir şey vardı sanki işlem yapılabiliyordu ama hangi araçtı hatırlamıyorum. Sanki metin aracı mıydı çok emin değilim. Aklımda öyle bir şey kalmış lisans eğitiminde görmüş olabilirim.*

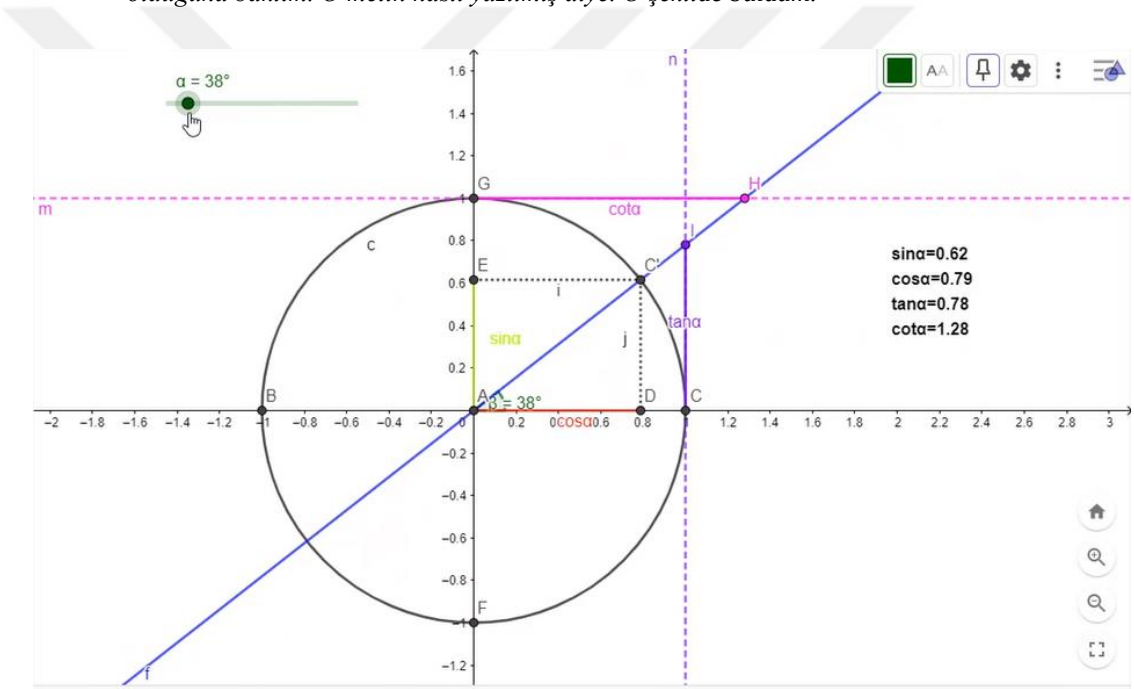
Ö4 birim çember ile ilgili çalışmasında metin aracını kullanamayınca GeoGebra Tube'daki hazırlanmış etkinlikleri incelemiş ve metin aracının kullanımını hatırlayabilmiştir. Aşağıda Ö4'ün birim çember etkinliğine metin aracını kullanarak etkinliğini tamamladıktan sonraki diyaloğu ve Şekil 81'de etkinliğinin son hali verilmiştir. Bununla ilgili Ö4'ile geçen diyalog şu şekildedir:

> *Araştırmacı: Peki, etkinliği oluştururken zorlandığın kısımlar oldu mu?*
>
> *Ö4: Yani ilk başta zorlanmak değil de, ilk başta bilmiyordum bu sayısal değer tanımlama*

olayını. Yani sayısal değer tanımlamayı biliyordum ama bunu nasıl yapmam gerektiğini bilmiyordum. Örneğin sinüsü a/b'yi ben yazabilirdim ama sinα için 3.13/6.26= falanca yazmam lazım ya oraya. Mesela 0.5 yazmam gerektiğini biliyorum. Ama bunun değişmesini istiyorum. Bunun değişmesi için o 0.5'in a/b'nin tanımlanması gerekiyor hani eşitlik olan kısmı. Hani bunun gerektiğini ben bilmiyordum. Onu öğrendikten sonra oldu zaten.

Araştırmacı: Peki, nasıl öğrendin?

Ö4: Yok, nasıl öğrendim? Youtube'a baktım bulamadım. GeoGebrada etkinlik gibi arattım. Hani buna benzer bir şey kullanan olmuş mu diye. Sonra sürgünün değişimiyle sayıların değiştiği bir etkinlik buldum. O etkinliği açtım ve onun nasıl yaptığını, oradaki metinde ne olduğuna baktım. O metin nasıl yazılmış diye. O şekilde buldum.

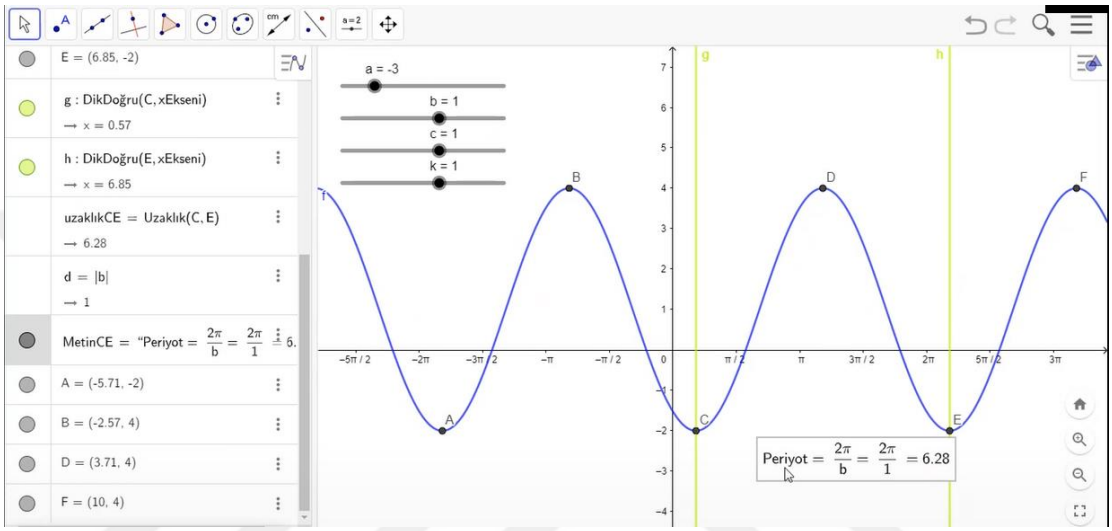


Şekil 81. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-2

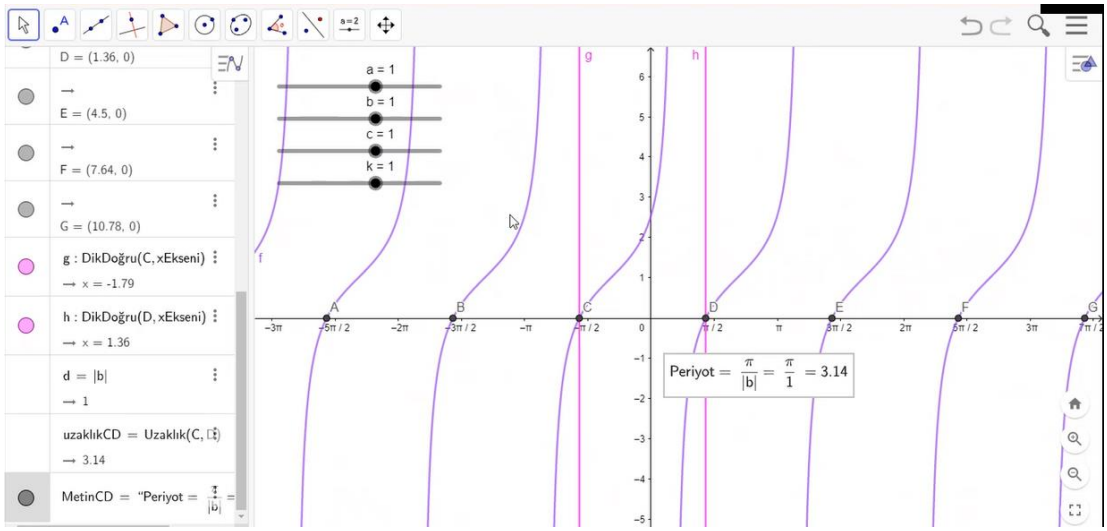
Ö4 diğer katılımcılardan farklı olarak GeoGebra yazılımının eylem nesne araçlarından işaret kutusu aracının kullanımını bilmediği için trigonometrik fonksiyonların periyotları ile ilgili 4 ayrı etkinlik oluşturmuştur. Etkinlikleri oluştururken grafik penceresinin özelliklerinden ızgara görünümü kapattıktan sonra giriş çubuğuna asin(bx+c)+d şeklinde trigonometrik fonksiyon denklemini girerek a, b, c ve k sürgülerini oluşturup GeoGebra yazılımına trigonometrik fonksiyonun grafiği çizdirmiştir. Ardından nokta araç çubuğunun içerisinde yer alan uç nokta aracını kullanarak grafiğin tepe ve çukur noktalarını işaretlemiştir. Dik doğru aracını kullanarak verilen iki çukurun uç noktalarından geçen dik doğruları çizdikten sonra ise metin aracını kullanarak sürgü değerleri değiştikçe periyot da değişecek

şekilde periyot metni yazmıştır (Bknz. Şekil 82, 83). Ö4 işaret kutusu aracı ile ilgili aşağıdaki şekilde yorum yapmıştır:

> *"4 tane trigonometrik fonksiyon için 4 ayrı etkinlik yaptım. Sebebi de bu göster kapat mevzusunu hatırlamamam. Eğer onu bilseydim yani aklıma gelseydi tek bir etkinlikte verebilirdim trigonometrik fonksiyonları. "*



Şekil 82. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların periyotları etkinliği ekran görüntüsü



Şekil 83. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların periyotları etkinliği ekran görüntüsü-2

Genel olarak bakıldığında, trigonometri konusu özelinde sorulan sorular çerçevesinde Ö4'ün diğer katılımcılarla benzer şekilde dik üçgen, birim çember ve trigonometrik oranlarla ilgili GeoGebra yazılımını kullanarak çalışmalar yapıp etkinlikler oluşturduğu görülmüştür

(Bknz. Şekil 80, 81, 82, 83). Diğer katılımcılardan farklı olarak ise Ö4'ün, GeoGebra yazılımının bazı araç çubuklarının işlevlerini, bazılarınınsa yerlerini unuttuğu görülmüştür. Ö4, uzaklık ve uzunluk ölçme aracının yerini karıştırmış, metin aracının işlevini ve yerini unutmuş, işaret kutusu aracının nasıl kullanıldığını hatırlayamamış ve nesnenin özelliklerinden olan etiketi göster kapat, yakınlaştır uzaklaştır, nesneyi gösterme koşulu gibi özellikleri kullanmamıştır. Ayrıca genel olarak etkinliklerinde kullandığı bir araçtan kullanacağı diğer araca geçerken araçların yerlerinden çok emin şekilde hareket etmediği görülmüş ve taşı aracını da çoğunlukla seçmeyi unutarak hatalı çizim gerçekleştirmiş ardından adımlarını birer adım geri almıştır.

Ö4 diğer katılımcılara benzer olarak verilen ölçüde açı, sürgü gibi araç çubuklarıyla GeoGebra yazılımının dinamiklik özelliğinden faydalanmış ve oluşturduğu şekillerin nasıl gözüktüğüne önem vererek nesnelerin özelliklerini değiştirip farklı renk ve stillerde gösterebilmiştir (Bknz. Şekil 81, 82, 83). Grafik penceresinin özelliklerini kullanarak x ve y eksenini hedeflediği özellikte ayarlayabilmiş (Bknz. Şekil 79 ve 80) ve grafik 2 penceresini kullanarak birim çember ve trigonometrik fonksiyonların grafiklerini farklı pencerelerde eşzamanlı olarak göstermiştir. Ö4'ün diğer katılımcılardan farklı olarak bazı araç çubuklarının yerlerini karıştırması, bazılarının işlevini bilmemesi, GeoGebra yazılımını daha temel düzeyde kullanması, Ö4'ün TB'nin diğer katılımcılar kadar etkili olmadığı ve trigonometri konusu özelindeki soru ve etkinliklerin çözümünde ve oluşturulmasında diğer katılımcılar kadar kapsamlı olmadığı görülmektedir.

4.4. Teknolojik Alan Bilgisi (TAB)

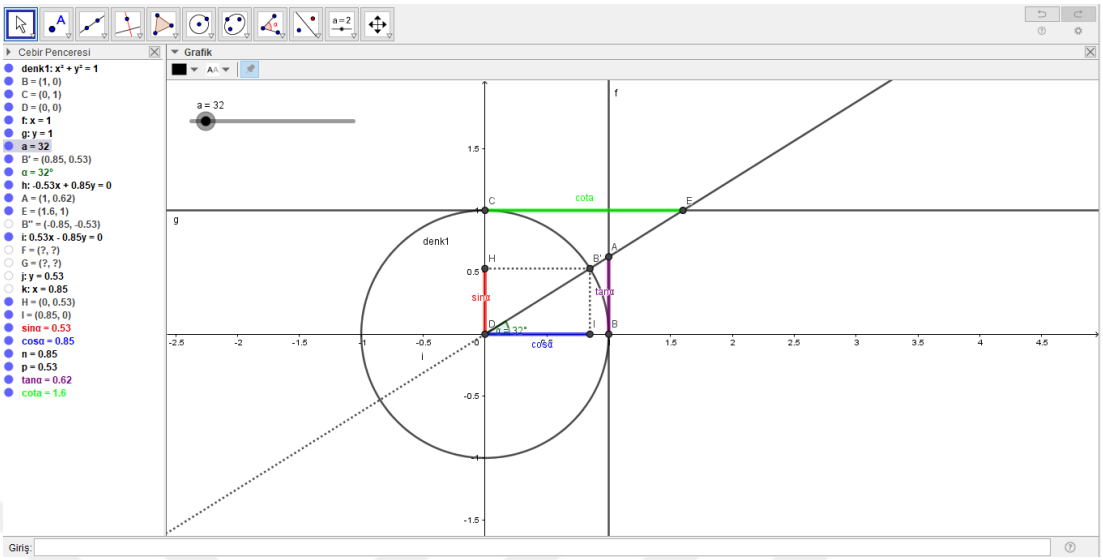
Bu bilgi türünde lisansüstü öğrencilerin alan bilgileri ile hangi teknolojik aracı nasıl ve hangi amaçla kullandığı detaylı incelenmiştir. Bu bağlamda katılımcılardan sırasıyla GeoGebra yazılımını kullanarak trigonometrik fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonların işaretleri, trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması, trigonometrik özdeşlikler, trigonometrik fonksiyonların periyotları ve trigonometrik fonksiyonların grafikleri konuları özelinde etkinlik oluşturmaları istenmiştir.

4.4.1. Trigonometrik Fonksiyonlar

Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların tanımı konusu özelinde oluşturdukları etkinlikler incelendiğinde, tüm katılımcılar etkinliklerinde sürgü aracını kullanarak bir açı sürgüsü oluşturmuş ve bu açıya bağlı olacak şekilde birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonları tanımlamışlardır. Sürgü özelliği sayesinde tek bir birim çember üzerinde birden

fazla örnek vererek trigonometrik fonksiyonların birim çember üzerinde tanımlanmasının gözlemlenmesini sağlamışlardır. Aynı zamanda sürgünün dinamiklik özelliği sayesinde ise açı değiştikçe, trigonometrik fonksiyonların tanımlı oldukları yerlerin değişimini göstermişlerdir. Ek olarak katılımcı Ö3 ve Ö4 metin aracını kullanarak trigonometrik fonksiyonların aldıkları değerleri de etkinlik ekranına eklemişlerdir. Metin aracı sayesinde değişen açı değerlerine göre trigonometrik fonksiyonların aldıkları değerlerin de eş zamanlı olarak somut şekilde gözükmesini sağlamışlardır. Örneğin katılımcı Ö1'in trigonometrik fonksiyonlar konusundaki TAB'ına bakılacak olursa, Ö1 sürgüyü sürükleyerek birinci bölgede x=32º açısını oluştu?rdukktan sonra birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonların her birinin x=32º için tanımlı oldukları yerleri göstermiş ve fonksiyonların aldıkları değerlerin işaretlerini eksenler yardımı ile açıklamıştır (Bknz. Şekil 84). Ardından çizdiği x=1 ve y=1 doğrularını kullanarak cotx fonksiyonunun 1'den büyük, tanx fonksiyonunun ise 1'den küçük bir değer aldığını GeoGebra yazılımı üzerinde göstermiştir. Bununla ilgili Ö1 şöyle bir söylemde bulunmuştur:

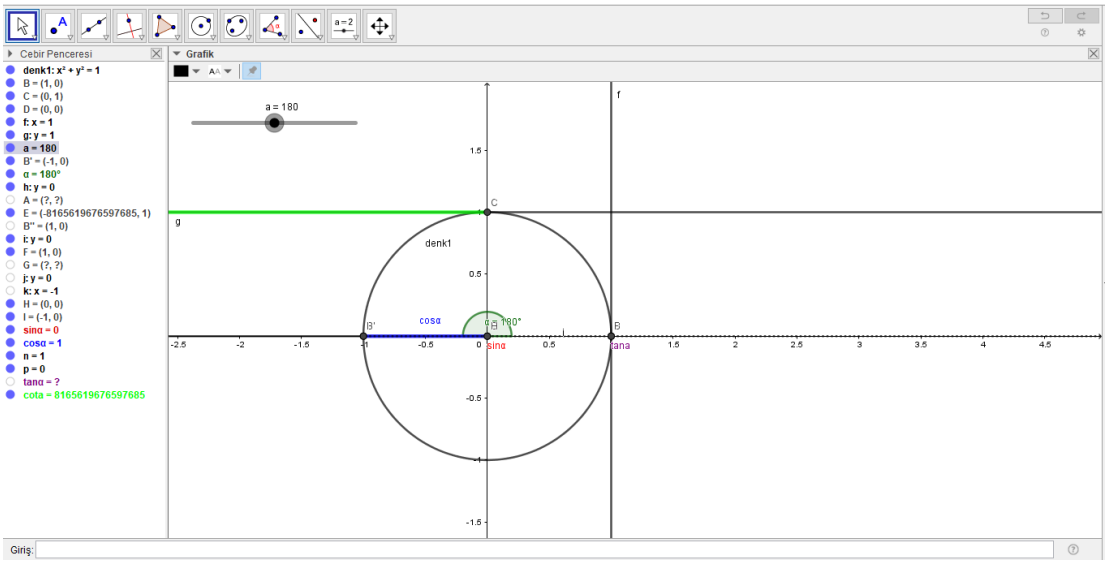
> *"Şöyle ki, burada trigonometrik fonksiyonların birim çember üzerindeki gösterimi var. Sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjantın. Sonraki iki etkinliğin de temelini oluşturuyor bu. Nasıl bir şey, mesela α=32°'lik bir açı olarak alalım. Tanjant bu boyda kotanjant bu boyda sinüs, kosinüs hepsi pozitif. Yani burada fonksiyonları gösteriyorum. Öğrenciler bu açı ile kotanjantın böyle olduğunu hatta 1'den büyük bir değer aldığını görebilir. Çünkü şu tanx doğrusu, aslında x=1 doğrusu ve kotanjant x=1'i geçmiş durumda. Dolayısıyla kotanjantın 1'den büyük olduğu görülür. Tanjantın da kotanjant doğrusun altında kaldığı için 1'den küçük olduğu görülebilir. "*



Şekil 84. Ö1'in trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-2

Ardından sürgüyü oynatarak farklı bölgelerde farklı açılar alarak trigonometrik fonksiyonların tanımları ve aldıkları değerlerle ilgili açıklamalarda bulunarak TB'sini AB'sine entegre etmiştir (Bknz. Şekil 85). Aşağıda Ö1'in x=180º için söylemi verilmiştir:

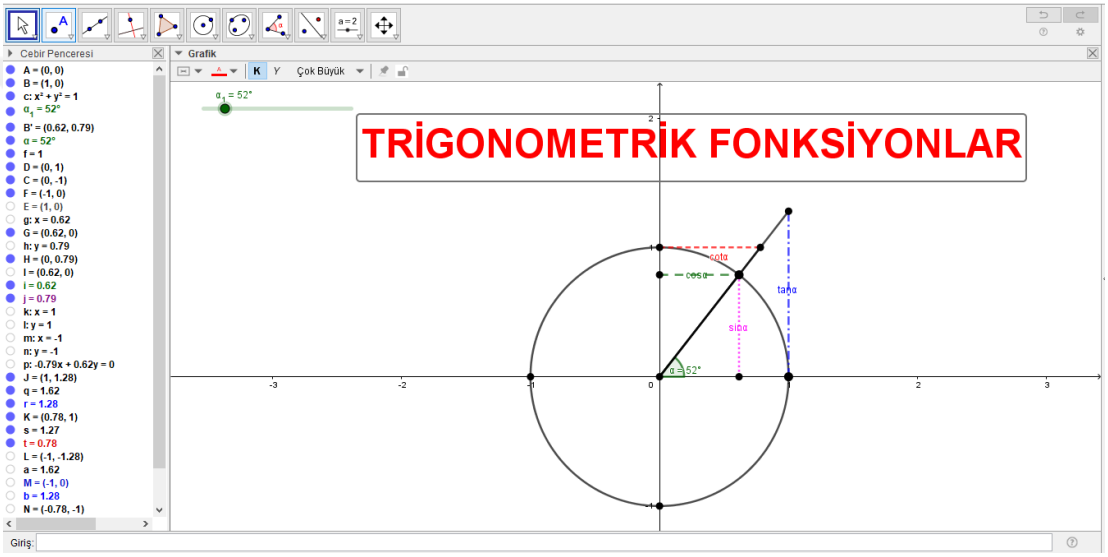
> *"Yine şu şekilde tam 180° olduğu zaman mesela kosinüsün -1, tanjantın ve sinüsün bir uzunluğa sahip olmadıklarını ve kotanjantın da sonsuza doğru gittiğini görüyoruz. kotanjantın belli bir şeyi yok uzunluğu yok. Hani böyle tek tek bütün bölgeler için fonksiyonlar gözüküyorlar."*



Şekil 85. Ö1'in trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-3

Katılımcı Ö2 de Ö1'e benzer şekilde yazılım üzerinde sürgüyü sürükleyerek trigonometrik fonksiyonların farklı bölgelerde tanımlı oldukları yerleri, aldıkları değerleri göstererek açıklamalarda bulunmuştur (Bknz. Şekil 86). Ayrıca, bu etkinliği daha önce de GeoGebra üzerinde oluşturduğu için herhangi zorluk yaşamadığını belirtmiştir. Ö2'nin bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Onun haricinde dediğim gibi zaten daha önceden yapmış olduğum bir etkinlik olduğu için 2 sene, 3 sene de olsa ve yaptığım kısım zaten çok bilindik sadece sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant kısmı olduğu için çok rahatlıkla yaptım açıkçası."*



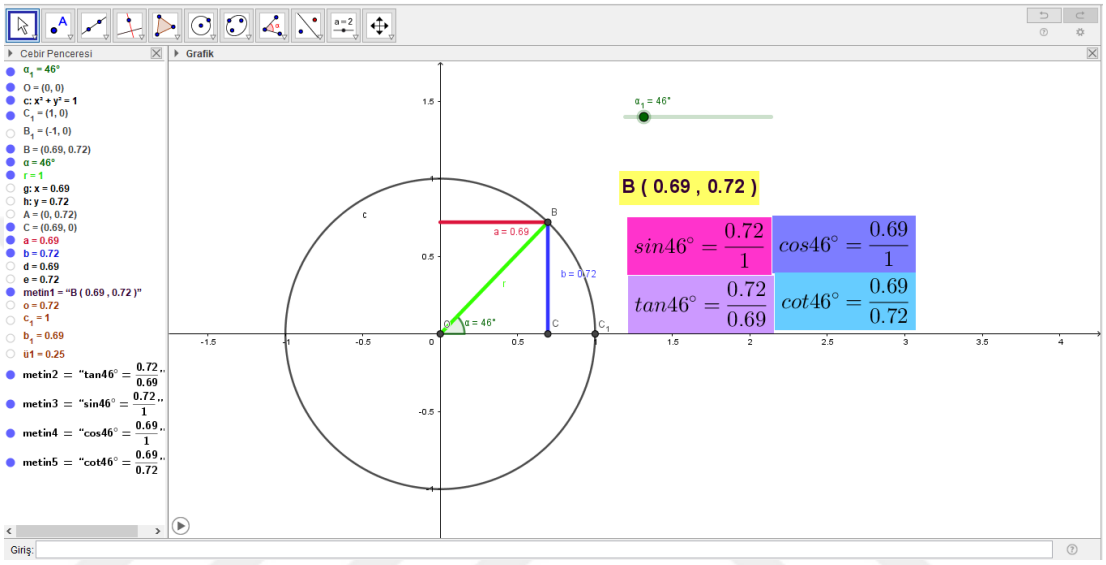
Şekil 86. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-2

Katılımcı Ö3'ün oluşturduğu etkinlik incelendiğinde, birim çember üzerinde diğer katılımcılardan farklı olarak sadece sinüs ve kosinüs trigonometrik fonksiyonlarını tanımladığı (Bknz. Şekil 87) ancak oluşturduğu farklı etkinliklerde tanjant ve kotanjant trigonometrik fonksiyonlarını birim çember üzerinde çizebildiği görülmüştür. Ayrıca metin aracını kullanarak, değişen açı değerlerine göre trigonometrik fonksiyonların eşit oldukları oranların birim çember ile eş zamanlı olarak gözlemlenmesini sağlamıştır. Aşağıdaki diyalogda Ö3'ün etkinliği oluştururken dikkat ettiği noktalar verilmiştir:

> *Ö3: Her şey birbirine bağlı olarak değişsin istiyorum hareket ettirdiğimde. Çünkü değişimleri yorumlattıracağım çocuklara. Tabi değişmesi için buradan nesnelerden seçiyorum. Tamam. Etkinliğim bu.*
>
> ...

Araştırmacı: Bu etkinliği oluştururken nelere dikkat ettin?

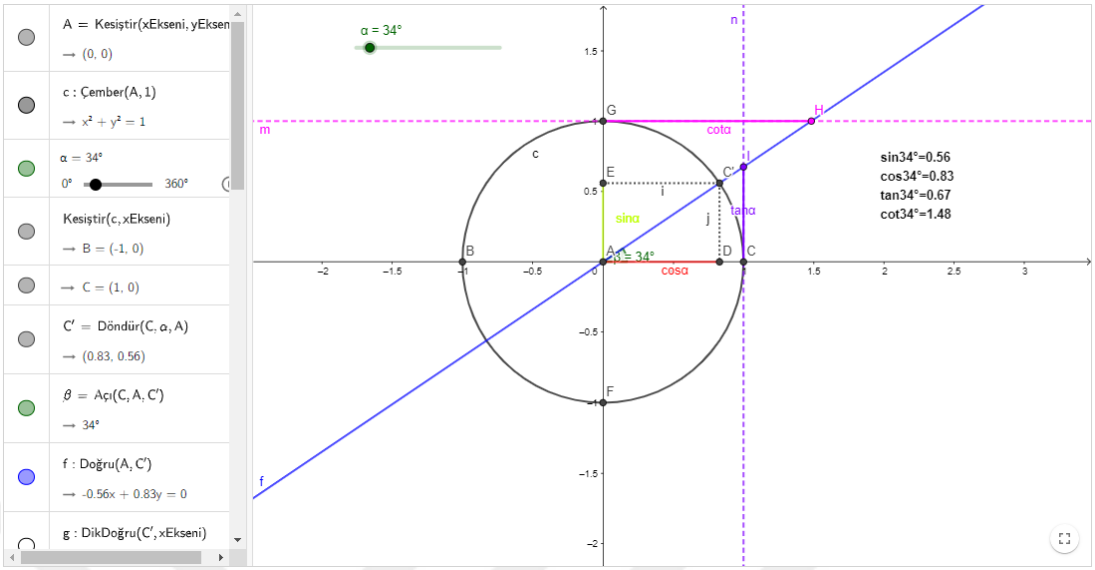
Ö3: Şu an etkinliğin benim için önemli kısmı, şunu canlandırayım. Canlandırırken hem şuradaki açının değişmesi hem de buradaki koordinatların değişmesi, +,- olarak da değişiyor; hem de açıya bağlı olarak, açıyı sadece değiştirdiğimde hareket ediyor olması önemli benim için.



Şekil 87. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-2

Katılımcı Ö4 ise diğer katılımcılara benzer şekilde bir etkinlik oluşturmuş ancak metin aracını kullanarak trigonometrik fonksiyonların aldıkları değerleri x açısına bağlı olacak şekilde tanımlayamamış, nasıl tanımlayacağını internet üzerinden araştırmıştır. (Bknz. Şekil 88). Ö4'ün etkinliği oluştururken yaşadığı sorun ile ilgili söylemi şu şekildedir:

"Sorun metin kutusunda değildi aslında, metin kutusunu kullanmayı biliyorum ama, şöyle gösteriyim. Ben sinüsü ve kosinüsü, C' noktasının apsisine, ordinatına bağlayacaktım; bunu nasıl ifade edeceğimi GeoGebrada hatırlamıyordum. Şu y(C'), x(C') durumlarını nasıl ifade edeceğimi hatırlamadım. Zaten ondan öncesini yapmıştım, ondan öncesi hazırdı. Ona baktım internetten, bakınca hemen aklıma geldi. Onu yaptım. Ondan sonra da şeyleri yaptım, renklendirmesi ile oynadım. Başka bir şey yapmadım. Daha güzel gözüksün diye yani."



Şekil 88. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-3

Genel olarak bakıldığında, katılımcıların sürgü aracı ile tek bir birim çember üzerinde birden fazla örnek gösteriminde bulunmaları, özellikle bu süreçte sürgünün dinamiklik özelliğini kullanarak açı değiştikçe trigonometrik fonksiyonların tanımlı oldukları yerlerin değişimini göstermeleri var olan AB'lerini TB'lerine entegre ederek kullanabildiklerini göstermiş başka bir deyişle TAB'larının varlığına dair kanıt sunmuşlardır. Buna ek olarak katılımcı Ö3 metin aracını kullanarak değişen açı değerine göre trigonometrik fonksiyonların aldıkları değerlerin de eş zamanlı olarak somut şekilde gözükmesini sağlaması Ö3'ün TAB'ının varlığını destekler niteliktedir. Ancak Ö4'ün AB bölümünde bahsedildiği gibi tanjant ve kotanjant trigonometrik fonksiyonlarını ezber bilgisini kullanarak çizmesi ve bu çizimini açıklayamaması AB'sinin eksik olduğunu; bu etkinliği oluştururken metin aracını internetten araştırdıktan sonra kullanabilmesi TB'sinde eksiklikler olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla Ö4 diğer katılımcılara benzer bir etkinlik oluştursa da AB'sini TB'sine etkili şekilde entegre edemediği için TAB'ının diğer katılımcılara göre daha sınırlı olduğu görülmüştür.

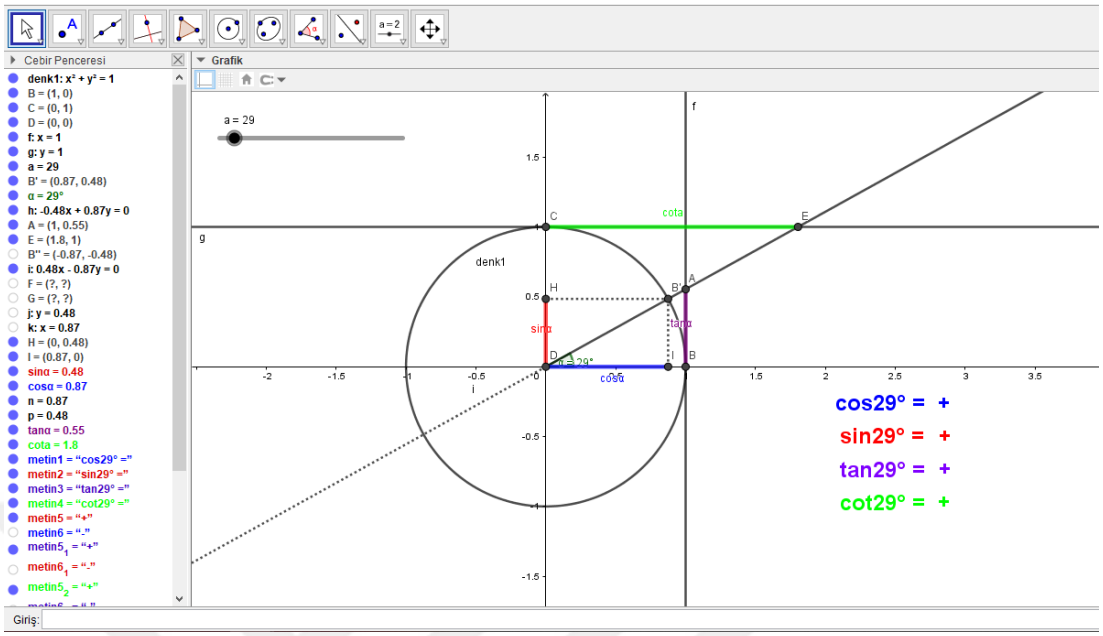
4.4.2. Trigonometrik Fonksiyonların İşaretleri

Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların işaretleri konusu özelinde oluşturdukları etkinlikler incelendiğinde, tüm katılımcılar etkinliklerinde bir önceki etkinlikte olduğu gibi sürgü aracı sayesinde, açı değiştikçe trigonometrik fonksiyonların koordinat sisteminde bölgelere göre işaretlerinin değişimini göstermişlerdir.

Katılımcı Ö1 ve Ö2 metin aracını kullanarak trigonometrik fonksiyonların bölgelere göre işaretlerinin gösterimini metin olarak etkinlik ekranına eklemişlerdir. Ö1 metin aracına trigonometrik fonksiyonların bölgelere göre işaretleri ile ilgili bilgileri eklerken nesnenin özelliklerinden olan nesneyi gösterme şartını kullanmıştır. Nesneyi gösterme şartı sayesinde açı hangi derecede ise o dereceye ait fonksiyonun işaretinin etkinlikte gözlemlenmesini sağlamıştır. Ö2 ise metin aracına her bölgede fonksiyonların işaretlerini ekleyerek daha ezbere dayalı bir etkinlik oluşturarak metin aracını birim çember ile etkileşimli şekilde kullanmamıştır. Ö3 ve Ö4 ise önceki soruda trigonometrik fonksiyonların tanımı konusu özelinde oluşturdukları etkinliklerini fonksiyonların bölgelere göre işaretlerini gösterirken de kullanılabileceğini ifade ederek bu konu özelinde yeni bir etkinlik oluşturmamışlardır.

Katılımcı Ö1, Şekil 89'da görüldüğü gibi oluşturduğu etkinliğinde sürgüyü sürükleyerek trigonometrik fonksiyonların bölgelere göre işaretlerini göstermiş ve etkinliğinde metin kutularını kullanarak sürgüyü hareket ettirdikçe değişen işaretlerin metinle eşzamanlı olarak değişimini sağlamayı hedeflediğini belirtmiştir. Ö1'in bu yaklaşımı var olan AB'sini TB'sine etkili bir şekilde entegre edip açıklama yapabildiğini göstermiştir. Ö1'in bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

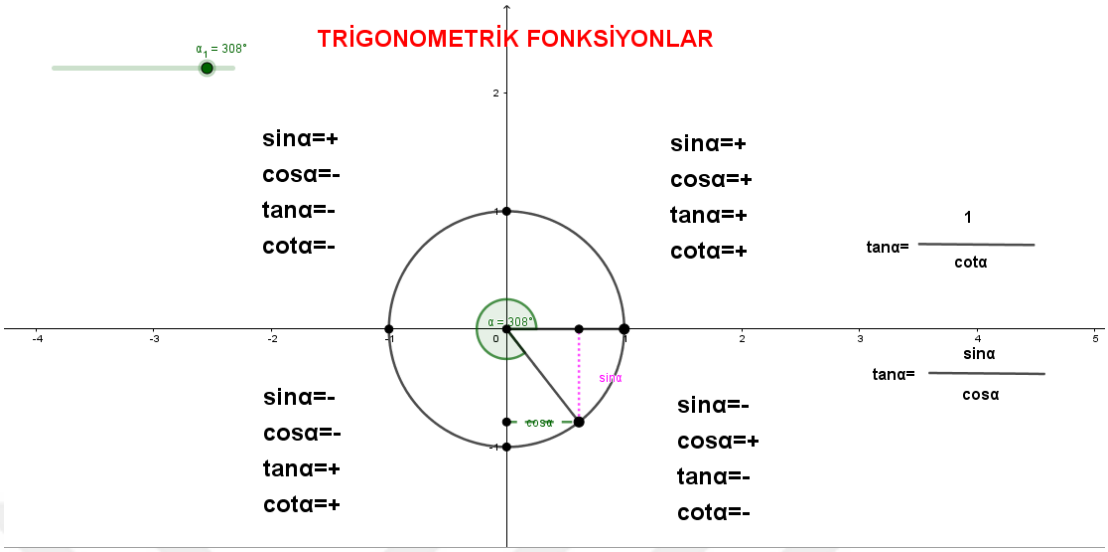
> *"Yani bu doğru parçası mesela tanjant şu an pozitif. Tanjantın pozitif olduğu yerlerde karşısında da bir artı işareti olmasını istedim. İşte aşağıda olduğu yerlerde negatif eksi işareti olmasını istedim. Diğer bütün fonksiyonlar için ilk olarak bunu gözettim. Çünkü zaten etkinliğim bu yapı üzerine kurulu. Öğrencilerin işaretlerini, fonksiyonların işaretlerini, işte fonksiyonların sıfır olduğu yerleri veya tanımsız olduğu yerleri görmelerini istiyorum. O yüzden bu sürgüyü oynattıkça birim çember üzerinde fonksiyonların nasıl gözüktüğüyle uyumlu olmasını amaçladım temel olarak bu metin kutularımda."*



Şekil 89. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların işaretleri etkinliği ekran görüntüsü-2

Katılımcı Ö2 ise oluşturduğu etkinlikte tüm açı değerleri için trigonometrik fonksiyonların işaretlerinin rahatlıkla gözlemlenebileceğini belirtmiş ve ilk olarak sürgüyü sürükleyerek 1. bölgede bir açı alarak sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının bu bölgede her zaman pozitif olduğunu göstermiştir (Bknz. Şekil 90). Benzer şekilde sürgüyü kullanarak 2. bölgede sinüsün pozitif cosinün negatif, 3 bölgede her ikisinin de negatif olduğunu ve son olarak 4. bölgede kosinüsün pozitif sinüsün negatif olduğunu göstermiştir. Ayrıca Ö2 metin aracına direkt fonksiyonların işaretlerini ekleyerek metin aracını birim çember ile etkileşimli şekilde kullanmadan daha ezbere dayalı bir etkinlik oluşturmuştur. Aşağıda Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların işaretlerini incelediği söylemi verilmiştir:

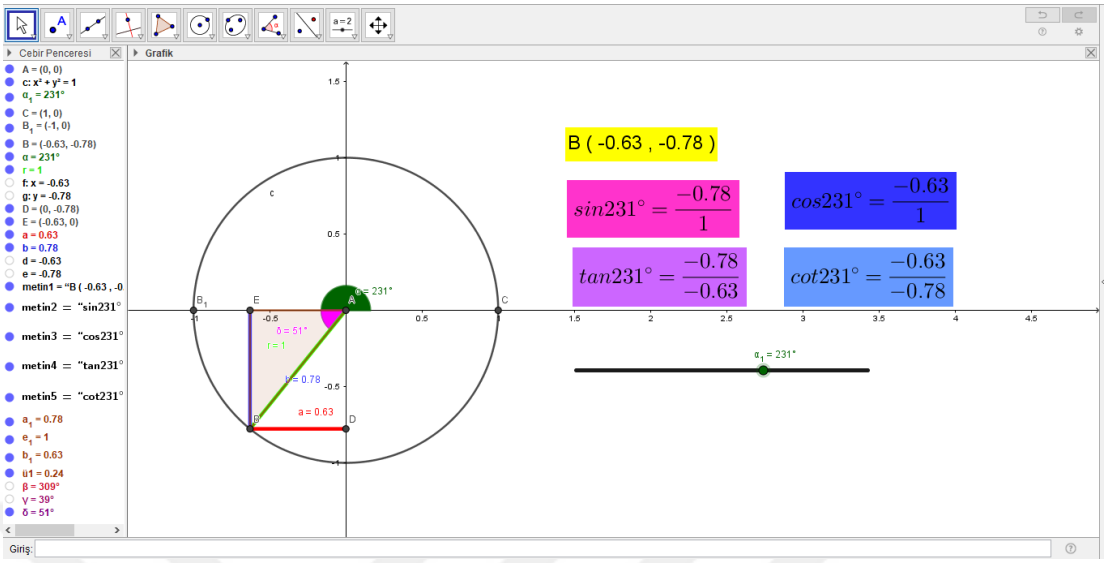
> *"Burada mesela en başta benim açı değerim ile sinüs ve kosinüsün ne olduğunu gösteriyor bu etkinlik bana azalıp arttığını. Yine her açı değeri için 1. bölgede sinüs ve kosinüsün daima 0'dan büyük olduğunu, 2. bölgede yine her açı değeri için sinüsün küçüldüğünü ama 0'dan büyük olduğunu, kosinüsün de negatif olduğunu; 3. bölgede her ikisinin negatif, 4. bölge için kosinüsün büyüdüğünü ve pozitif olarak büyüdüğünü, sinüsün de küçüldüğünü ama zaten negatif olduğunu burada yine açıdan ve sürgü yardımıyla görebiliyoruz."*



Şekil 90. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların işaretleri etkinliği ekran görüntüsü

Katılımcı Ö3 ve Ö4 trigonometrik fonksiyonların tanımı konusu özelinde oluşturduğu etkinliği işaretler konusu özelinde de kullanılabileceğini düşünerek yeni bir etkinlik oluşturmamıştır. Ö3 sadece ek olarak sürgünün değer aralığını genişleterek daha fazla örnek vererek diğer katılımcılarla benzer şekilde sürgüyü sürükleyerek trigonometrik fonksiyonların bölgelere göre işaretlerini incelemiştir. Örneğin Ö3, etkinliğinde 3. bölgede aldığı bir açının sinüs ve kosinüs değerlerinin 3. bölgede negatif olduğunu, tanjant değerinin B noktasının koordinatlarının birbirine oranından pozitif olduğunu göstermiştir (Bknz. Şekil 91). Ö3 'ün bu konudaki söylemi şu şekildedir:

> *"Öğrenci buraya geldiğinde, neden burada tanjant ile kotanjant pozitif? Çünkü tanjant ve kotanjantı ben B noktasının x'ine ve y'sine aynı anda bağladım ve bunların birbirine bölümü; biri tanjant, biri kotanjant, e ikisi de negatif o zaman negatifin, negatife bölümü pozitif olduğu için sadece tanjant ve kotanjant pozitif. Geliyorum mesela sinüs'e, sinüs burada atıyorum y değerine bağlı, kosinüs x değerine bağlı. Bakıyorum y ve x'ine ikisi de negatif. O zaman kosinüs ve sinüs bu bölgede negatif olmuş oluyor."*



Şekil 91. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-3

Özet olarak, katılımcıların sürgü aracını kullanarak açı değiştikçe, birim çember üzerinde koordinat sistemindeki bölgelere göre trigonometrik fonksiyonların işaretlerinin değişimini göstermeleri, katılımcıların AB ile TB'lerini birleştirerek TAB'larının varlığına kanıt sunmaktadır. Katılımcı Ö1 metin aracını ve nesneyi gösterme şartını kullanarak trigonometrik fonksiyonların işaretlerinin açının bulunduğu dereceye göre gözlemlenmesini sağlarken, katılımcı Ö2 metin aracına direkt fonksiyonların işaretlerini ekleyerek metin aracını birim çember ile etkileşimli şekilde kullanmadan daha ezbere dayalı bir etkinlik oluşturmuştur. Bu bağlamda Ö1'in teknolojiyi daha kapsamlı kullanarak AB'sini TB'sine entegre ettiği için TAB'ının Ö2'den daha kapsamlı olduğu görülmektedir. Katılımcı Ö3 ve Ö4'ün bir önceki soruda trigonometrik fonksiyonların tanımı konusu özelinde oluşturdukları etkinliği, fonksiyonların bölgelere göre işaretlerini gösterirken de kullanılabileceğini ifade ederek bu konu özelinde yeni bir etkinlik oluşturmadığı görülmüştür. Ö3'ün sürgünün değer aralığını genişleterek daha fazla örneklerle trigonometrik fonksiyonların işaretlerini daha kapsamlı incelemesi TAB'ının Ö4'e göre daha kapsamlı olduğunu göstermektedir.

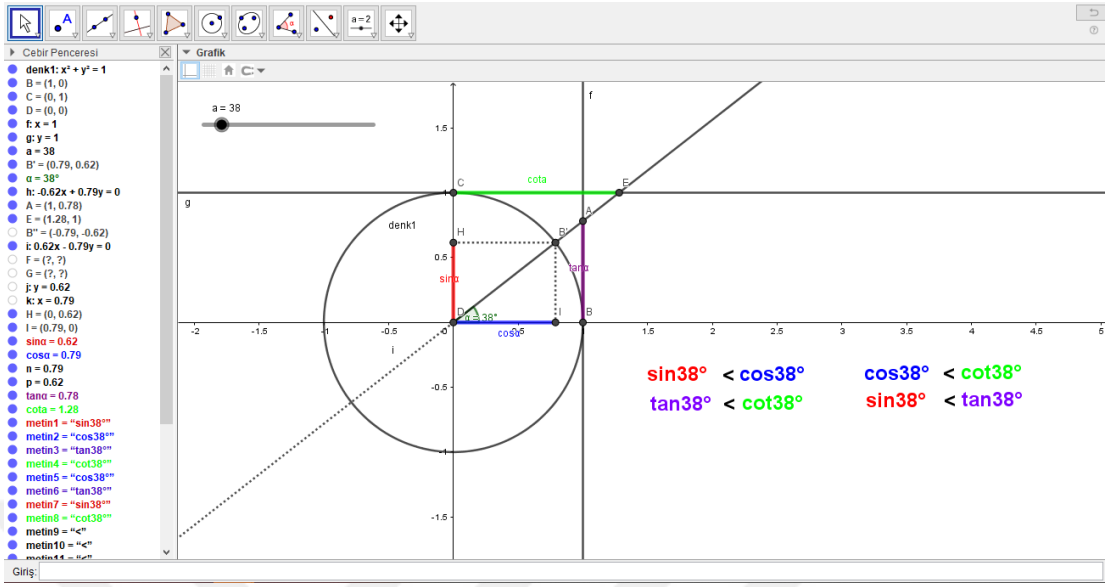
4.4.3. Trigonometrik Fonksiyonların Karşılaştırılması

Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması konusu özelinde oluşturdukları etkinlikler incelendiğinde, tüm katılımcılar etkinliklerinde önceki etkinliklerde olduğu gibi sürgü aracı sayesinde açı değiştikçe, trigonometrik fonksiyonların değişiminin gözlemlenmesini sağlamıştır.

Katılımcı Ö1, Ö2 ve Ö3 bir önceki etkinlikte olduğu gibi bu etkinlikte de metin aracını kullanarak trigonometrik fonksiyonlar ile bilgileri etkinliğe eklemişlerdir. Katılımcı Ö1 metin aracı ile bölgelere göre trigonometrik fonksiyonların birbiri ile karşılaştırılması ile ilgili bilgileri eklemiştir. Ö1 bir önceki etkinlikte olduğu gibi nesnenin özelliklerinden olan nesneyi gösterme şartını kullanarak açı hangi derecede ise o dereceye ait trigonometrik fonksiyonların birbiri ile karşılaştırılmasının gösterilmesini sağlamıştır. Katılımcı Ö2 ise önceki etkinlikte olduğu gibi metin aracını birim çember ile etkileşimli şekilde kullanmadan tüm trigonometrik fonksiyonların birbiri ile karşılaştırılmasını alt alta ekleyerek daha çok matematiksel bilgiyi vermeye dayalı bir etkinlik oluşturduğu görülmüştür. Katılımcı Ö3, farklı olarak ise etkinliğinde işaret kutusu aracını kullanarak trigonometrik fonksiyonların aldıkları değerlerin her birini ayrı ayrı işaret kutuları ile eşleştirmiştir. Bu şekilde tek bir etkinlikle birden fazla bilgiyi karışıklık yaratmadan vermiştir. Katılımcı Ö4 ise bir önceki soruda olduğu gibi trigonometrik fonksiyonların tanımı konusu özelinde oluşturduğu etkinliğini fonksiyonların karşılaştırılmasını gösterirken de kullanılabileceğini ifade ederek bu konu özelinde yeni bir etkinlik oluşturmamıştır.

Ö1'in trigonometrik fonksiyonları karşılaştırılması konusundaki TAB'ı detaylı incelendiğinde, ilk olarak sürgüyü sürükleyerek 1. bölgede 45º'den büyük bir açı alarak tanjantın sinüsden büyük olduğunu gösterdiği görülmüştür. Ardından 45º'de sinüs ile kosinüs fonksiyonlarının birbirine eşit olduğunu, kotanjantın kosinüsden, tanjantın sinüsden büyük olduğunu ifade etmiştir. Sürgüyü sürükleyerek farklı bölgelerde açılar alarak birbiri ile karşılaştırma yapılamayan durumlara da değinmiştir. Örneğin 180º'de kotanjantın tanımsız olduğunu göstermiş ve diğer trigonometrik fonksiyonlarla karşılaştırılamadığını belirtmiştir (Bknz. Şekil 92). Aşağıdaki diyalog bu durumu kanıtlar niteliktedir:

> *"Çünkü fonksiyonların kıyaslanmasını açık bir şekilde gösteriyor. Yani şöyle baktığımızda tanα sinα'dan büyük gözüküyor. Burada da onu belirtmişim. Ya da şöyle detaylar var aralarda eşit olduğu yerler var atıyorum 45°'de sinα=cosα, tanα=cotα ama cotα cosα'dan, tanα sinα'dan büyük. Mesela bu tarz şeyler var. Birbirleriyle kıyaslayamadığım durumlar var. Mesela 180°'de tanα ile cotα, cosα ile yine cotα'yı kıyaslayamıyorum. Çünkü cotα burada tanımsız veya 90°, 270°'de kıyaslayamıyorum. Böyle bir dikkat çekilebilir yine oraya. Bu şekilde kullanırdım derslerde."*

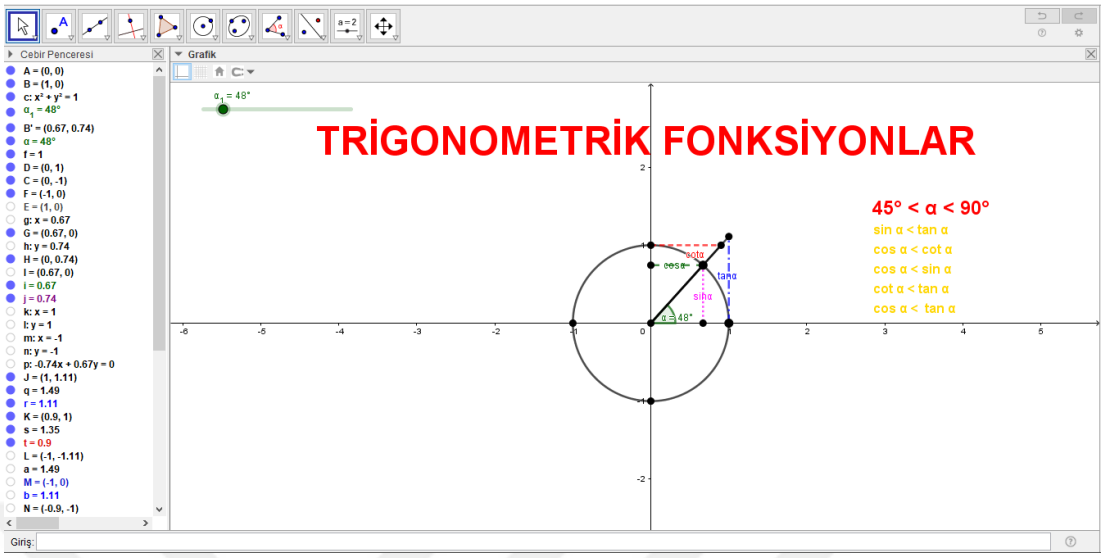


Şekil 92. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü

Ayrıca Ö1 bir önceki etkinlikte olduğu gibi metin aracı ile nesnenin özelliklerinden olan nesneyi gösterme şartını kullanarak açı hangi derecede ise o dereceye ait trigonometrik fonksiyonların birbiri ile karşılaştırıldığı durumları etkinliğine eklemiş ve bu durumların birim çemberle eş zamanlı şekilde gözlemlenmesi hedeflediğini belirtmiştir. Ö1'in bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Yani yine bir öncekine benzer bir cevap olacak ama fonksiyonların büyüklüklerini doğru kıyaslamak burada en önemlisi. Mesela burada tanjant şu anda sinüsten büyük. Bunun gözükmesini istedim. İşte kotanjant kosinüs arasındaki ilişki, sinüs ile kosinüs arasındaki ilişki bunların burada değiştiği durumlarda eşzamanlı olarak bu metin kutularında da değişmelerini istedim. En çok da buna dikkat ettim."*

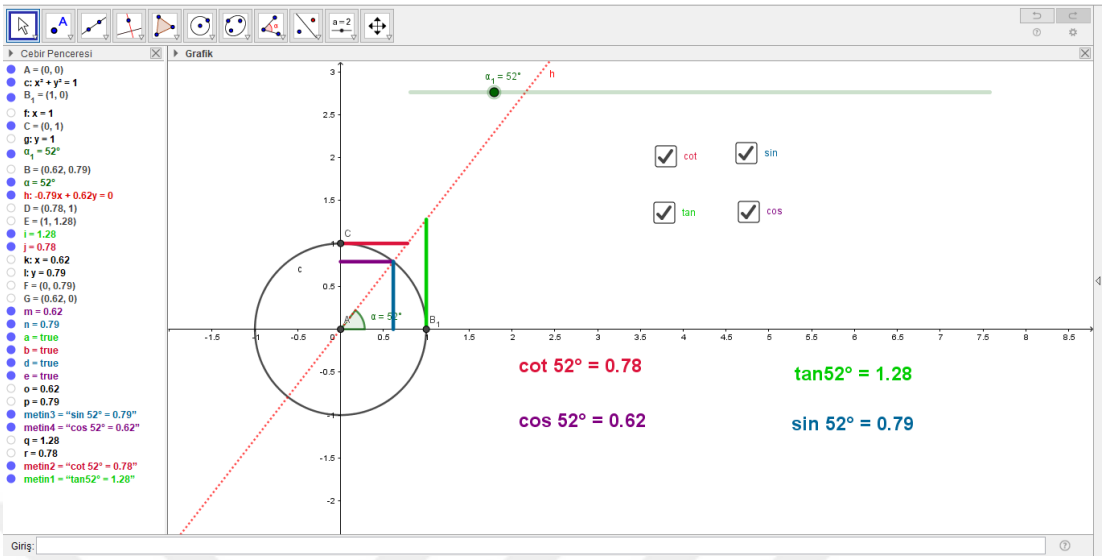
Katılımcı Ö2, Ö1'e benzer adımları uygulayarak tüm bölgelerde trigonometrik fonksiyonların birbiri ile karşılaştırılmasını incelemiş ancak Ö1'den farklı olarak önceki etkinliğinde olduğu gibi karşılaştırmaya dair tüm matematiksel bilgileri bir arada sunmuştur (Bknz. Şekil 93). Ö2'nin etkinliklerinde, metin aracını birim çember ile etkileşimli şekilde kullanmadan matematiksel bilgiyi vermeye dayalı bir etkinlikler oluşturduğu görülmüştür.



Şekil 93. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü-3

Katılımcı Ö3 ise diğer katılımcılardan farklı olarak etkinliğinde işaret kutularını kullanarak trigonometrik fonksiyonların aldıkları değerlerin her birini ayrı ayrı işaret kutuları ile eşleştirerek tek bir etkinlikle birden fazla matematiksel bilginin gözlemlenmesi sağlamıştır. Ancak TB bölümünde de bahsedildiği gibi, Ö3 Şekil 94'te verilen trigonometrik oranların aldığı değerleri işaret kutusu aracına bağlarken hata yaparak önce trigonometrik fonksiyonların 1. bölgedeki uzunluk değerlerini işaret kutularına bağlamıştır. Yaptığı hatayı fark edince ise trigonometrik oranların 4 bölgede de aldıkları değerleri işaret kutularına yeniden bağlamıştır. Aşağıda verilen Ö3'ün cümlesi bunu destekler niteliktedir:

> *"Etkinliği oluştururken, yaptığım hatalardan da anlaşıldığı üzere, doğru yere bağlamam gerekiyor. Uzunluğa göre bağlayınca pozitif negatiflik gidiyor."*



Şekil 94. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü-2

Katılımcı Ö4 bir önceki soruda olduğu gibi trigonometrik fonksiyonların tanımı konusu özelinde oluşturduğu etkinliğini fonksiyonların karşılaştırılmasını gösterirken de kullanılabileceğini ifade ederek bu konu özelinde yeni bir etkinlik oluşturmamıştır. Ayrıca AB bölümünde bahsedildiği gibi Ö4'ün trigonometrik fonksiyonlarda karşılaştırmayı hatırlayamaması AB'sinin eksik olduğuna dair kanıt sunmuştu.

Özet olarak, katılımcılar sürgü aracı sayesinde açı değiştikçe, trigonometrik fonksiyonların değişiminin gözlemlenmesini sağlaması AB ile TB'lerini birleştirerek TAB'larının varlığına kanıt sunmaktadır. Ö1'in bir önceki etkinlikte olduğu gibi bu etkinlikte de nesnenin özelliklerinden olan nesneyi gösterme şartını kullanarak açı hangi derecede ise o dereceye ait trigonometrik fonksiyonların birbiri ile karşılaştırılmasının gösterilmesini sağladığı görülmüştür. Ö2'nin önceki etkinlikte olduğu gibi metin aracını birim çember ile etkileşimli şekilde kullanmadan daha çok matematiksel bilgiyi vermeye dayalı bir etkinlik oluşturduğu görülmüştür. Dolayısıyla Ö1, AB'sini TB'sine daha kapsamlı entegre ederek TAB'ının daha kapsamlı olduğunu göstermiştir. Ö3 ise diğer katılımcılardan farklı olarak etkinliğinde işaret kutularını kullanarak trigonometrik fonksiyonların aldıkları değerlerin her birini ayrı ayrı işaret kutuları ile eşleştirerek tek bir etkinlikle birden fazla matematiksel bilginin gözlemlenmesi sağlasa da işaret kutusunu kullanırken hata yaparak AB ile TB'sini birleştirirken sorun yaşamıştır. Bu nedenle Ö3 TAB'ının Ö1 ve Ö2 kadar kapsamlı olmadığı görülmüştür.

Ancak katılımcı Ö4 bir önceki soruda olduğu gibi trigonometrik fonksiyonların tanımı konusu özelinde oluşturduğu etkinliğini fonksiyonların karşılaştırılmasını gösterirken de kullanılabileceğini ifade ederek bu konu özelinde yeni bir etkinlik oluşturmaması ve bahsedildiği gibi trigonometrik fonksiyonlarda karşılaştırmayı hatırlayamaması Ö4'ün AB'sinin eksik olduğuna dair kanıt sunmaktadır. Genel olarak bakıldığında Ö4'ün TAB'ının diğer katılımcılara göre daha az kapsamlı olduğu sonucuna varılabilir.

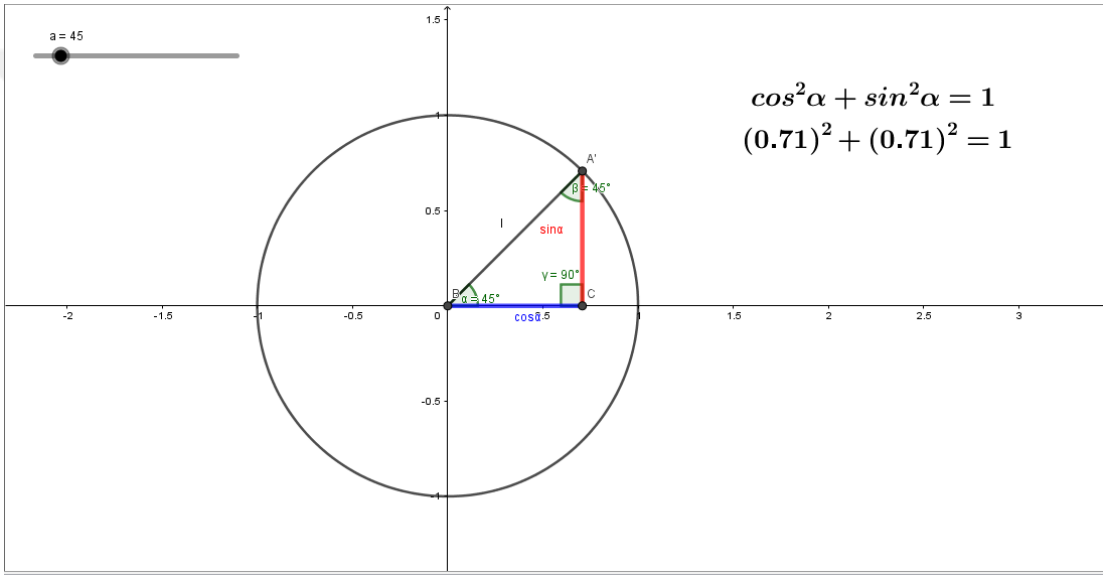
4.4.4. Trigonometrik Özdeşlikler

Katılımcıların trigonometrik özdeşlikler konusu özelinde oluşturdukları etkinlikler incelendiğinde, katılımcıların $sin^2x + cos^2x = 1$, $tanx.cotx = 1$ ve $1 + tan^2x = sec^2x$ özdeşliklerini GeoGebra programında gösterdikleri görülmüştür. Katılımcı Ö1 trigonometrik özdeşlikler konusu ile ilgili iki farklı etkinlik oluşturmuştur. İlk etkinliğinde $sin^2x + cos^2x = 1$ özdeşliğini birim çember içerisindeki dik üçgende trigonometrik fonksiyonların tanımlarını ve Pisagor teoremini kullanarak gösterirken ikinci etkinliğinde $sin^2x + cos^2x = 1$ ile $tanx.cotx = 1$ özdeşliğini herhangi bir dik üçgende kenarların trigonometrik fonksiyonlar cinsinden ifadesini ve Pisagor teoremini kullanarak göstermiştir. Katılımcı Ö2 de Ö1'e benzer şekilde trigonometrik özdeşliklerden $sin^2x + cos^2x = 1$ ile $tanx.cotx = 1$ özdeşliklerini birim çember içerisindeki dik üçgendeki trigonometrik fonksiyonların tanımlarını ve Pisagor teoremini kullanarak GeoGebra üzerinde göstermiştir. Katılımcı Ö3 de Ö1 ve Ö2 ye benzer şekilde $sin^2x + cos^2x = 1$ özdeşliğini birim çember içerisindeki dik üçgendeki trigonometrik fonksiyonların tanımlarını ve Pisagor teoremini kullanarak GeoGebra üzerinde oluşturmuştur. Katılımcı Ö4 ise diğer katılımcılardan farklı olarak $sin^2x + cos^2x = 1$ ve $tanx.cotx = 1$ özdeşliklerine ek olarak $1 + tan^2x = sec^2x$ özdeşliğinin ve trigonometrik fonksiyonların tanımlarının yer aldığı bir etkinlik oluşturmuştur.

Ö1 ilk etkinliğinde öncelikle birim çemberi inşa etmiş, verilen ölçüde açı aracı ile açı sürgüsünü oluşturduktan sonra dik üçgen üzerinde trigonometrik fonksiyonları tanımlamıştır (Bknz. Şekil 95). Ardından $sin^2x + cos^2x = 1$ trigonometrik özdeşliğini dik üçgendeki trigonometrik fonksiyonların tanımlarını ve Pisagor teoremini kullanarak göstermiştir. Metin aracını kullanarak da değişen açılar için $sin^2x + cos^2x = 1$ özdeşliklerin her zaman geçerli olduğunu metin ile şeklin yanına ekleyerek belirtmiştir. Ö1'in özdeşlik konusu özelinde oluşturduğu ilk etkinliği ile ilgili söylemi:

> *"İki tane etkinliğim var bununla ilgili. Birincisi birim çember üzerinde bir dik üçgen yardımıyla yaptığım bir şey. Şöyle bir birim çember oluşturdum ardından yine noktaları koyup verilen ölçüde açı diyerek dinamik bir nokta elde ettim çember üzerinde. Ardından bu noktayı*

x ekseniyle birleştirdim dik olarak. Oradan bir doğru parçası elde edeceğim şimdi. Elde ettiğim doğru parçam burada dik üçgen çıktı karşıma. Bu dik üçgenin dik kenarı yani y eksenine paralel olan kenarı sinüsü x ekseni üzerinde kalan kenarı da kosinüsü temsil ediyor. Zaten Pisagor'dan $sin^2x + cos^2x = 1$ *olduğunu biliyoruz. Burada onu temsilen yaptığım bir etkinlik oldu. Açıları düzenleyip isimlendirmeleri ve boyamaları yapıyorum. Ardından yan tarafta da metinde görünmesini istediğim öğrenilmesini istediğim şeyi yazıyorum. Yazdıktan sonra hani altına da sayısal olarak değerlerini kullanmayı, yazmayı tercih ettim bu sefer. Her durum için çocuklar hesap makinalarıyla sağlandığını kendileri de görebilsinler diye. Bu şekilde bir etkinlik."*

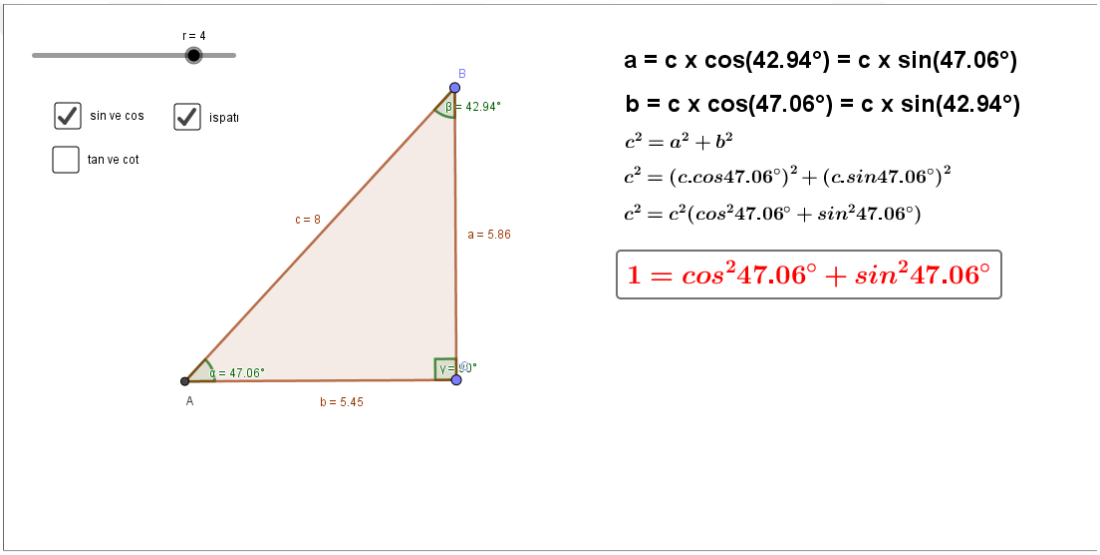


Şekil 95. Ö1'in trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü

Ö1 ikinci etkinliğinde ise ilk olarak herhangi bir dik üçgeni oluşturduktan sonra dik kenarların trigonometrik oranlar cinsinden ifadesini metin aracını kullanarak etkinliğine eklemiştir. Ardından trigonometrik oranlar cinsinden ifadesini ve Pisagor teoremini kullanarak $sin^2x + cos^2x = 1$ ile $tanx.cotx = 1$ özdeşliklerinin ispatını oluşturmuştur. Son olarak işaret kutusu aracını da kullanarak $sin^2x + cos^2x = 1$ özdeşliğini, özdeşliğin ispatını ve $tanx.cotx = 1$ özdeşliğini ayrı kutularla eşleştirip bilginin adım adım gözlenmesini sağlayan bir etkinlik oluşturmuştur (Bknz. Şekil 96). Ö1'in özdeşlik konusu özelinde oluşturduğu ikinci etkinliği ile ilgili söylemi şu şekildedir:

"Sonra bir etkinliğim daha var. Bunda daha farklı düşündüm. Yine bir çember oluşturdum ama bu sefer bu bir birim çember değil. Rastgele bir çember oluşturdum. Yarıçapını sürücüsüyle kontrol edebildiğim bir çember. Bunun içerisinde de bir dik üçgen

oluşturuyorum. Hani burada yaptığım şey de birim çember içinde tanımlanmış bir üçgen değil de herhangi bir dik üçgen üzerinde de bunun olduğunu gösterebilecek bir çalışma olsun istedim. Yan tarafa metinde şöyle şeyler yazıyorum. Şu an hipotenüsüm c. Şu altta kalan kenarım a. Bu a'yı hipotenüs ve trigonometrik değerler yardımıyla bir tanımlama yaptım, c.cosα şeklinde. Ardından sinüsü benzer bir şekilde tanımlıyorum. Bu metinler ile biraz uğraştım. Alt kısma da ilk başta değerlerini yazıp göstermeyi tercih ettim. Yine öğrenciler görsün diye. Şimdi tanjant ve kotanjantı tamamlayacağım. Çünkü ben burada iki tane özdeşliği göstermeyi düşündüm. Birinci $sin^2x + cos^2x = 1$ *olduğunu göstermeyi ikincisi de tanα.cotα=1 olduğunu göstermek istedim. Bu yüzden tanjant ve kotanjantı da göstereceğim. Hem kenarlar üzerinden hem de birbirleri cinsinden hem de sayısal değerleri ile ifade ettim."*



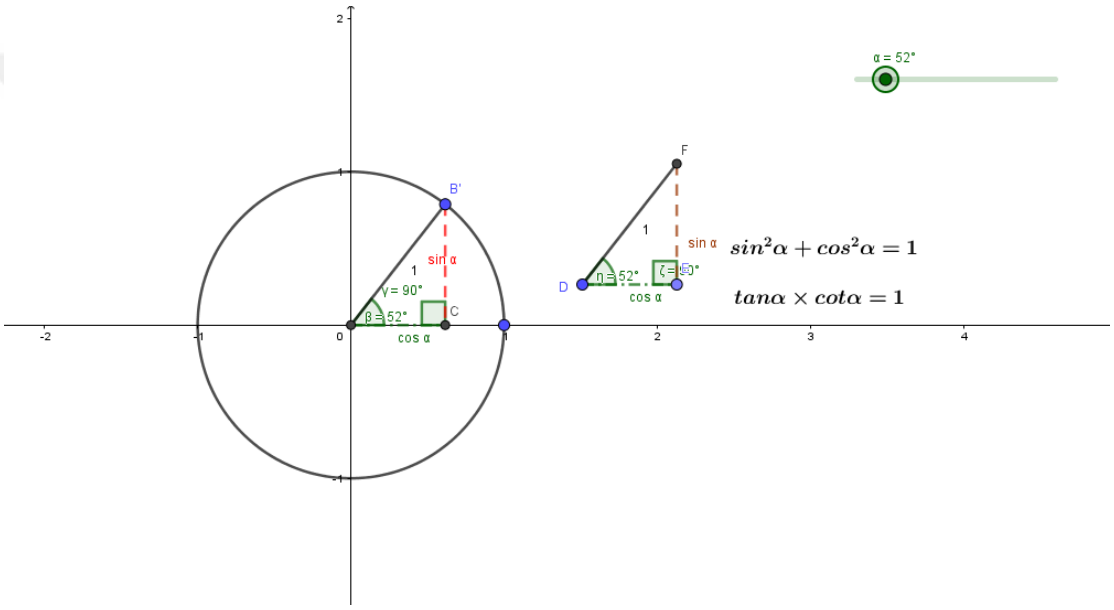
Şekil 96. Ö1'in trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü-2

Katılımcı Ö2, ilk olarak trigonometrik özdeşlikler konusu özelinde nasıl bir etkinlik oluşturacağını bilememiş, bu nedenle internetten ne yapabileceğini araştırmıştır. Yarım açı, toplam fark formülleri gibi trigonometrik özdeşliklerin ispatlarını yazılımda nasıl görselleştireceğini bulamadığını sadece örnek bir açı üzerinden toplam fark formülünü yazılım üzerinde çizerek gösterebileceğini ifade etmiştir. Ö2'nin söylemleri şu şekildedir:

"Öncelikle şundan bahsedelim; bu etkinliği oluşturamadım. Ne demek bu? Özdeşliklerden bahsederken hani dedik ki yarım açı var, dönüşüm var, dönüşüm müfredatta olmamasına rağmen şey var, toplam fark var. Fakat ekranda böyle bir şey yok. Çünkü açıkçası yarım açıyı nasıl oluşturabileceğimi bilmiyorum. İnternetten baya araştırdım, GeoGebra Youtube'u araştırdım baya bir araştırdım. İspatlara falan baktım. Yapılan işte yarım açının sin2α=2.sinα.cosα ya bunu sin(α+α) olarak yazıyor ve toplam fark formülünden ilerliyor. Yani

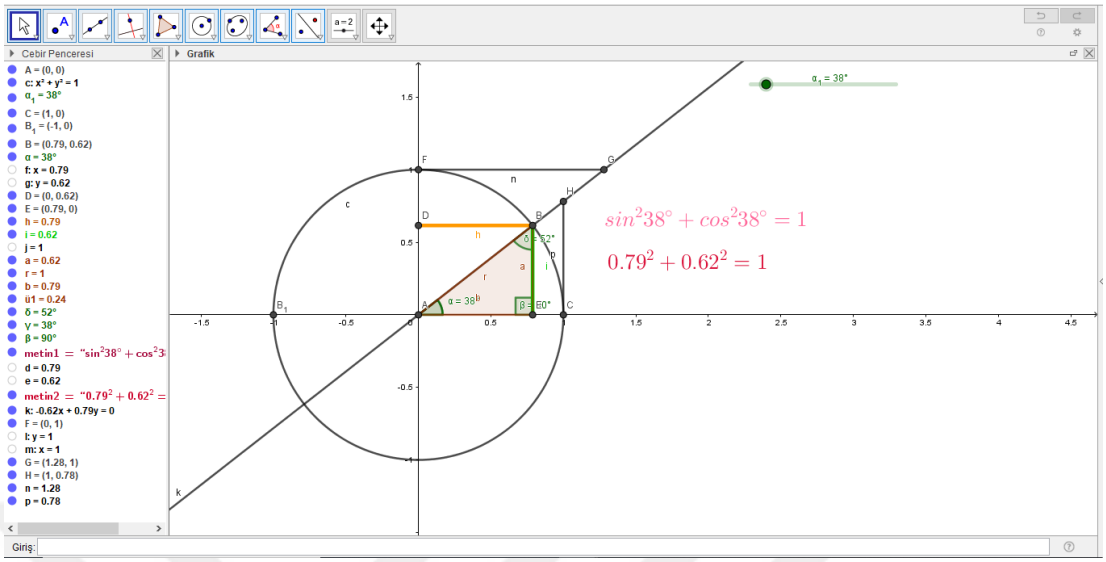
ispat yapıyor. Yarım açıyı toplam farktan ispata gidiyor fakat görselleştirme bulamadım. Kendim nasıl yapacağım, bilmiyorum."

Ardından Ö2, $sin^2x + cos^2x = 1$ ile $tanx.cotx = 1$ özdeşliklerini birim çember üzerinde gösterdiği bir etkinlik oluşturmuştur. Özdeşlikleri birim çember içerisindeki dik üçgende tanımlı trigonometrik fonksiyonları ve Pisagor teoremini kullanarak oluşturmuş ve açıklamıştır. Özdeşlikleri metin aracını kullanarak özdeşlikleri olduğu gibi metin olarak aktarmış, birim çemberdeki sürgüye bağlı olarak oluşturduğu açı ile ilişkilendirmemiştir (Bknz. Şekil 97).



Şekil 97. Ö2'nin trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü

Katılımcı Ö3 de Ö1 ve Ö2'ye benzer şekilde $sin^2x + cos^2x = 1$ özdeşliğini birim çember içerisindeki dik üçgendeki trigonometrik fonksiyonların tanımlarını ve Pisagor teoremini kullanarak GeoGebra üzerinde oluşturmuştur (Bknz. Şekil 98). Ancak Ö3 oluşturduğu etkinliği yeterli bulmadığını, başka neler yapabileceğini düşündüğünü ama aklına başka herhangi bir fikir gelmediğini belirtmiştir. Ö3, etkinlikte metin kutusuna $sin^2x + cos^2x = 1$ özdeşliği yazarken, özdeşliğin toplamını oluşturmak için giriş çubuğunda yer alan toplam işlemini kullanırken sorun yaşamıştır. TB konusunda da bahsedildiği gibi Ö3'ün yazılımın araçlarının yerlerini ve kullanım amaçlarını bildiği ancak Ö1 ve Ö2 kadar etkili şekilde kullanamadığı sonucuna ulaşılmıştı.

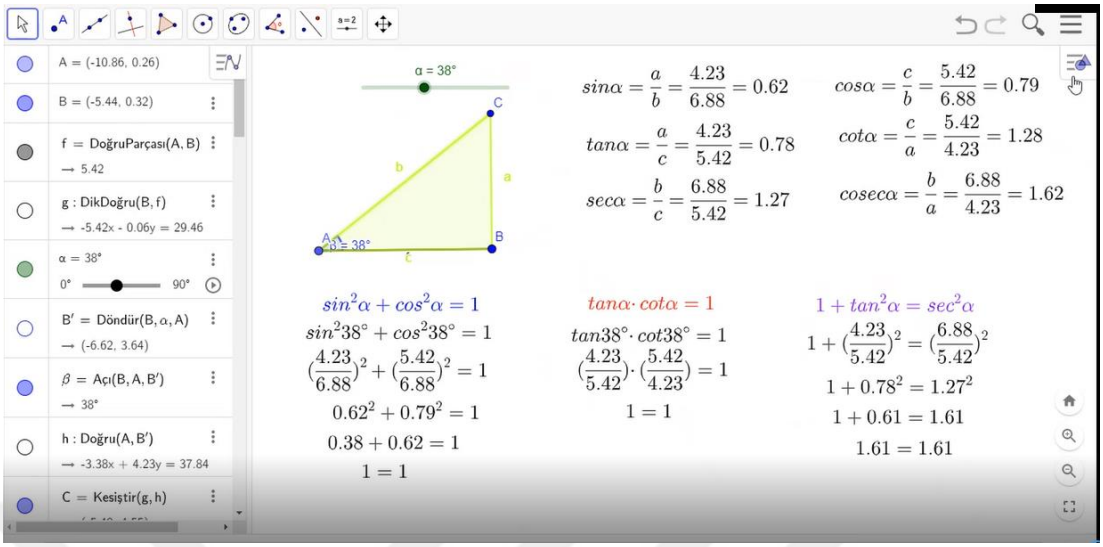


Şekil 98. Ö3'ün trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü

Katılımcı Ö4 diğer katılımcılardan farklı olarak $sin^2x + cos^2x = 1$ve $tanx.cotx = 1$ özdeşliklerine ek olarak $1 + tan^2x = sec^2x$ özdeşliğinin ve trigonometrik fonksiyonların tanımlarının yer aldığı bir etkinlik oluşturmuştur (Bknz. Şekil 99). Ö4 ilk olarak bir açısı sürgüye bağlı olacak şekilde bir dik üçgen oluşturmuş ardından özdeşlikleri dik üçgenin elemanları ile ilişkilendirerek etkinliğine metin olarak nasıl ekleyeceğini bilmediğini söyleyerek bir başka etkinliği inceleyerek bulmuştur. Ö4'ün metin aracı ile ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Yok, nasıl öğrendim? Youtube'a baktım bulamadım. Yanlış hatırlamıyorsam. Böyle GeoGebra etkinlik gibi arattım. Hani buna benzer bir şey kullanan olmuş mu diye. Sonra sürgünün değişimiyle sayıların değiştiği bir etkinlik buldum. O etkinliği açtım ve onun nasıl yaptığını, oradaki metinde ne olduğuna baktım. O şekilde buldum."*

Ö4 metin aracını kullanarak metni nasıl yazacağını öğrendikten sonra ise trigonometrik oranları dik üçgenin kenar uzunluklarına bağlı şekilde tanımlamış ve sırasıyla $sin^2x + cos^2x = 1$, $tanx.cotx = 1$ ve $1 + tan^2x = sec^2x$ özdeşliklerinin dik üçgenin elemanlarına bağlı şekilde ispatlarını göstermiştir. Ancak Ö4 etkinliğini tamamlasa da etkinliğin daha çok özdeşliklerin ispatlarını göstermeye yönelik olması matematiksel bilginin etkili şekilde gözlemlenmesini ve inşa edilmesini sağlamamaktadır.



Şekil 99. Ö4'ün trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü

Genel olarak, katılımcıların trigonometrik özdeşlikler konusu özelinde oluşturdukları etkinlikler incelendiğinde, katılımcıların $sin^2x + cos^2x = 1$ ve $tanx.cotx = 1$ özdeşliklerini GeoGebra programında gösterdikleri görülmüştür. Katılımcı Ö1'in GeoGebra yazılımını kullanarak trigonometrik özdeşlikler konusu ile ilgili hem birim çember içerisindeki dik üçgen üzerinde hem de herhangi bir dik üçgende, dik kenarların trigonometrik fonksiyonlar cinsinden ifadesini ve Pisagor teoremini kullanarak $sin^2x + cos^2 = 1$ ve $tanx.cotx = 1$ özdeşliklerini etkinlikte gösterdiği görülmüştür. Ö1'in etkinliklerinde sürgü aracını kullanarak açı değiştikçe özdeşliklerin birbirinden farklı açı değerleri için de gözlemlenmesini sağlaması, metin aracını kullanarak da değişen açılar için özdeşliklerin her zaman geçerli olduğunu ve işaret kutusu aracı ile özdeşliklerin ispatını ayrı şekilde gösterek bilginin adım adım gözlenmesini sağlayan bir etkinlik oluşturması TAB'ının kapsamlı olduğunu göstermektedir.

Katılımcı Ö2, Ö1'e benzer şekilde trigonometrik özdeşliklerden $sin^2x + cos^2 = 1$ ile $tanx.cotx = 1$ özdeşliklerini birim çember içerisindeki dik üçgendeki trigonometrik fonksiyonların tanımlarını ve Pisagor teoremini kullanarak GeoGebra üzerinde göstermesi TAB'ının varlığına kanıt olmakla birlikte önceki etkinliklerde de olduğu gibi metin aracını işlevsel olarak kullanmadan matematiksel bilgileri olduğu gibi formülsel şekilde etkinliğine eklemesi TAB'ının Ö1 kadar kapsamlı olmadığını göstermektedir. Katılımcı Ö3'ün, Ö1 ve Ö2'ye benzer şekilde $sin^2x + cos^2 = 1$ özdeşliğini birim çember üzerinde göstermesi TAB varlığına dair bilgi sunsa da metin aracını ve giriş çubuğunda yer alan toplam işlemini kullanırken sorun yaşaması, aynı zamanda TB bölümünde bahsedildiği gibi yazılımı Ö1 ve Ö2

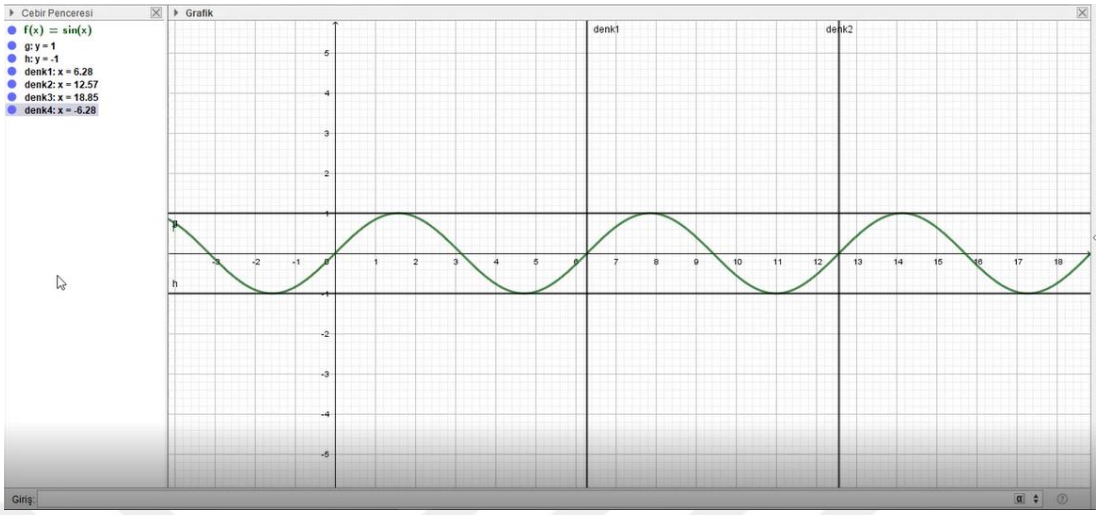
kadar etkili şekilde kullanamaması TAB'ının Ö1 ve Ö2 kadar kapsamlı olmadığını göstermektedir. Katılımcı Ö4'ün ise TB'sinde bahsedildiği gibi metin aracının işlevini ve yerini unutması, işaret kutusu aracının nasıl kullanıldığı hatırlayamaması, AB'sinde bahsedildiği gibi özdeşlik ve formüllerden toplam fark formüllerini hatırlamaması ve daha çok etkinliği özdeşliklerin ispatlarını göstermeye yönelik hazırlaması bu bağlamda AB'sini TB'sine diğer katılımcılar kadar etkili şekilde entegre edemediğini göstermektedir. Dolayısıyla Ö4'ün TAB'ının diğer katılımcılara göre daha az kapsamlı olduğu söylenebilir.

4.4.5. Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri ve Periyotları

Katılımcıların tirogonometrik fonksiyonların grafikleri ve periyotları konusundaki TAB'larını incelemek için ilk olarak GeoGebrayı kullanarak sinx, cosx, tanx, cotx trigonometrik fonksiyonlarının grafiklerini çizmeleri istenmiş ve bu fonksiyonların tanım ve değer kümeleri ile periyotları hakkında sorular sorulmuştur. Ardından katılımcılardan grafik ve periyot konuları özelinde etkinlik oluşturmaları istenmiştir.

Katılımcı Ö1, ilk olarak giriş çubuğunu kullanarak sinx, cosx trigonometrik fonksiyonların grafiklerini çizmiştir. Ö1 y=1 ve y=-1 doğruları çizerek sinx ve cosx fonksiyonlarının reel sayılardan [-1,1] kapalı aralığına tanımlı olduğunu ve x=π, x=2π, x=4π, x=-2π doğrularını çizerek cosx fonksiyonunun sinx fonksiyonunun ötelenmiş hali olduğunu ve 2π aralıkta bir grafiklerin kendisini tekrar ettiğini ifade ederek periyotlarının 2π göstermiştir (Bknz. Şekil 100).

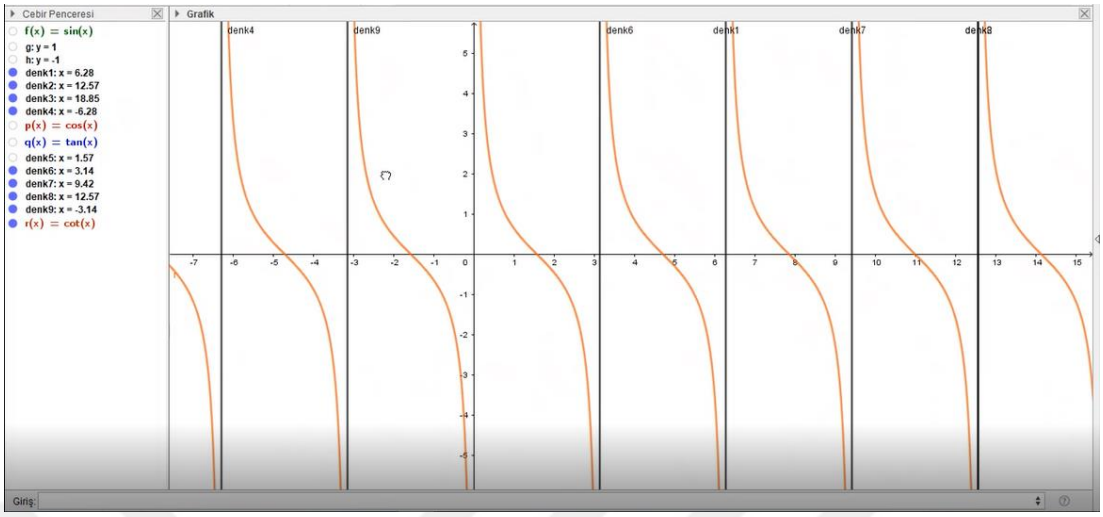
> *"Sinüs fonksiyonunun grafiğini direk giriş kısmına sinx yazarak başlayabilirim. Çizdiğim fonksiyonun tanım kümesi reel sayılar, değer kümesi [-1,1] arasındadır. Çünkü alabileceği değerler şöyle de gösterebileceğim gibi iki doğru arasında sıkışmış durumdadır. y=1 ve y=-1 doğruları arasında sıkışmış durumda. Periyodu da nedir, periyodu şöyle x=π yazayım, x=2π yazayım, x=4π yazayım hatta x=-2π yazayım. Periyodu da bu çizdiğim doğrular arasında sürekli kendini tekrar ediyor olmasıdır. Yani her 2π periyot arasında kendini tekrar ettiği için periyodu 2π diyebilirim."*



Şekil 100. Ö1'in sinx fonksiyonu ile ilgili çizimi

Benzer şekilde Ö1, giriş çubuğunu kullanarak tanx, cotx trigonometrik fonksiyonların grafiklerini çizmiştir. Ö1, x=π/2 doğrusunu çizerek tanx fonksiyonunun bu doğrunun tek katlarında da benzer şekilde tanımsız olduğunu göstermiştir. Benzer şekilde x=π, x=2π, x=-π, x=-2π, doğrularını çizerek cotx fonksiyonunun da tanımsız olduğu x değerlerini göstererek her π aralıkta bir grafiklerinin kendisini tekrar ettiğini göstererek tanx ve cotx fonksiyonlarının periyotlarının π olduğunu belirtmiştir (Bknz. Şekil 101).

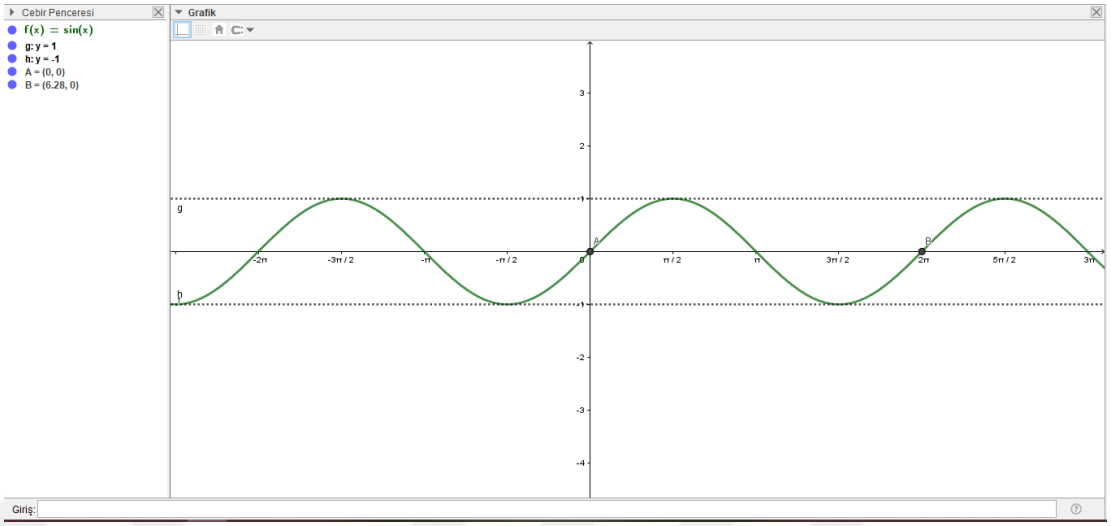
> *"Kotanjant üzerine konuşayım. cotx'de şöyle bir şey, sinüs ile kosinüs arasında nasıl bir ilişki varsa tanjant ve kotanjant arasında da benzer bir ilişki var diyebiliriz. Sinüs ve kosinüs benzer tanım ve değer kümelerine sahipti. Kotanjant ve tanjant da benzer değer kümelerine sahiptir ama tanım kümelerinde farklılık vardır. Ne bu, tanjantta ben demiştim ki π/2'nin tek katlarını tanımlayamıyorum. Kotanjantta da π'nin katlarını tanımlayamıyorum. cot0° mesela tanımsız bir değerdir. Ya da şu grafikte x=0 doğrusuna bakarsak kotanjant kesmiyor. Yani kotanjant π'de tanımsız. O yüzden tekrar söylemek gerekirse tanım kümesi reel sayılar fark π'nin katları değer kümesi de tüm reel sayılar diyebilirim. Periyot içinde yine tanjant gibi benzer, π periyotta kendini tekrar ediyor. Gördüğünüz üzere her π uzunlukta kendini tekrar ediyor."*



Şekil 101. Ö1'in cotx fonksiyonu ile ilgili çizimi

Katılımcı Ö2, Ö1'e benzer şekilde giriş çubuğunu kullanarak sinx fonksiyonunun grafiğini çizdikten sonra y=1 ve y=-1 doğrularını çizerek fonksiyonun 90+2kπ değerlerinde 1, 270+2kπ değerlerinde ise -1 değerini aldığını göstermiştir. Ardından x ekseni üzerinde grafiğin tekrar başa geldiği aralıkları noktalarla işaretleyerek periyodunun 2π olduğunu belirtmiştir (Bknz. Şekil 102). Ö2'nin sinx fonksiyonu için söylemleri şu şekildedir:

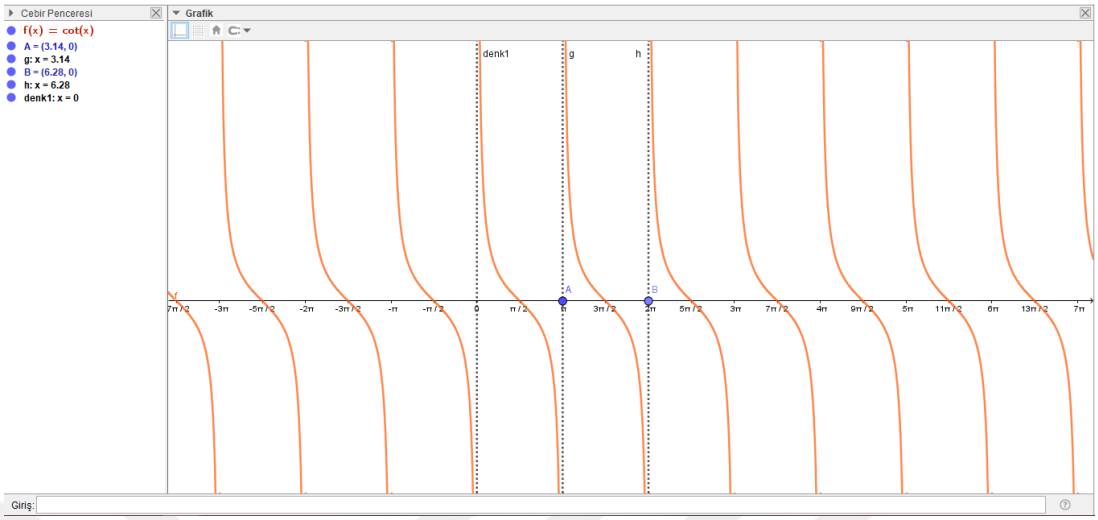
> *"...Sinüs fonksiyonunun hani hep bahsetmiştik ya birim çemberde 1 ile -1 arasında değer alır diye. Grafiğe dökünce bunu rahatlıkla görebiliyoruz. Sinüs fonksiyonun 0°, 180°'lerde x eksenini kestiği yani 0 değerine geldiğini görebiliyoruz...90+2kπ'lerde 1 olacağını, 270+2kπ'de -1 olacağını bu grafikte görüyoruz... Periyot bir örüntü ne diyeyim tekrar etmesi demektir. Bu aslında biraz daha küçülttüğümde sinüs fonksiyonu da bir periyodik örüntünün tekrarı gibi şeklindedir. Nasıl gösterebiliriz? Orijini ele aldığımızda bir nokta koyduğumuzda orijine, A noktasından başlayarak örüntünün bittiği noktaya, tekrar başa geldiği nokta şu noktadır bunu bu şekilde öğrencinin çok rahat bir şekilde görebileceğini söyleyebilirim."*



Şekil 102. Ö2'nin sinx fonksiyonu ile ilgili çizimi

Ö2 benzer şekilde GeoGebra yazılımını kullanarak cosx fonksiyonunun grafiğini çizmiş ve tanım, değer kümesi ve periyodunu göstermiştir. Ardından Ö2, giriş çubuğunu kullanarak tanx ve cotx fonksiyonlarının da grafiğini çizmiş ve asimptotlarını ve periyotlarını belirlemiştir (Bknz. Şekil 103). Örnek olarak Şekilde görüldüğü gibi cotx fonksiyonunun grafiğini çizdikten sonra dik doğru aracını kullanarak x=0, x=π, x=2π düşey asimptotlarını çizerek göstermiş ve düşey asimptotların arasındaki mesafeye bakarak periyodunun π olduğunu belirtmiştir. Ö2'nin söylemi şu şekildedir:

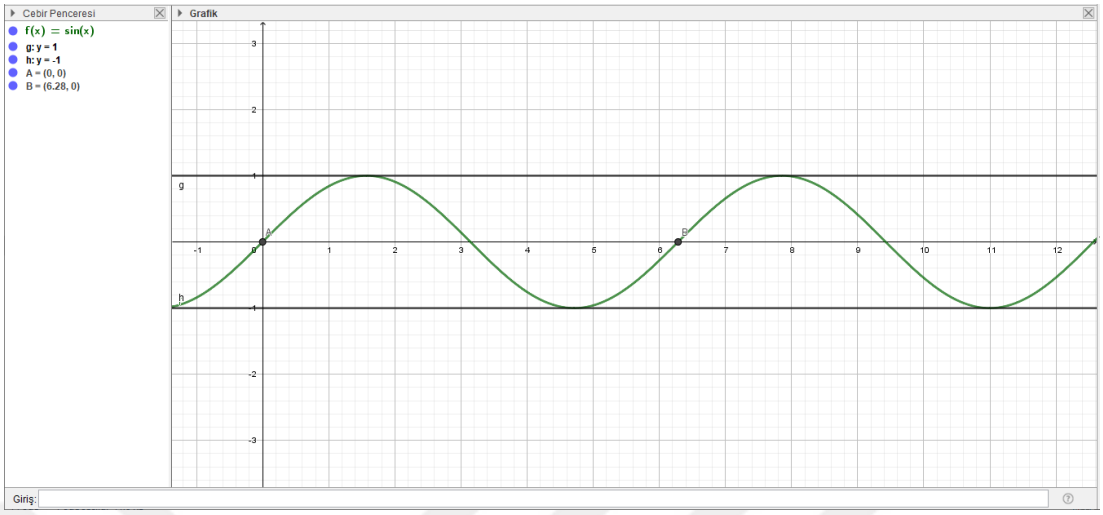
> *"Kotanjant da aynı şekilde açıkçası. Bu sefer tabi asimptotlar değişecek ve kotanjantı çiziyorum. S işareti yer değiştirdi bu sefer. Az önce π/2'de, - π/2'de düşey asimptotlarım vardı. Bu sefer baktığımızda 0°'ye, 180°'ye değmediğini görüyoruz. Ve buralarda yine ben çizeyim düşey asimptotlarımı… Tanjantta periyottan bahsetmeyi unuttuk kotanjantı da birlikte söyleyeyim. Aslında her ikisi de düşey asimptotları arasında tekrar ettiği için düşey asimptotların mesafesine, uzaklıklarına baktığımızda periyodu belirleyebiliriz hem tanjant için hem kotanjant için periyodumuz π bunu söyleyebiliriz. Bu şekilde periyodumuz. Yine kotanjantın birinci bölge kısmında pozitif ama dördüncü bölge kısmında negatif olduğunu görüyoruz. İkinci bölgeye geldiğimizde kotanjantın negatife yani -∞'a doğru gittiğini aynı şekilde onu birim çemberi düşünerekten yorumlayabiliyoruz.*



Şekil 103. Ö2'nin cotx fonksiyonu ile ilgili çizimi

Katılımcı Ö3 diğer katılımcılara benzer şekilde giriş çubuğunu kullanarak sinx ve cosx fonksiyonlarının grafiklerini çizmiştir. İki fonksiyon içinde grafiklerin tanım kümesinin (–∞,+∞) aralığı olduğunu göstermiş, ardından y=1 ve y=-1 doğrularını çizerek değer kümesinin [-1,1] kapalı aralığı olduğunu belirtmiştir. Periyodunu ise şeklin tekrar ettiği bir aralığı bulup iki nokta arasında göstermiştir (Bknz. Şekil 104). Ö3'ün grafiğini çizdiği sinx ve cosx fonksiyonları ile ilgili söylemleri şu şekildedir:

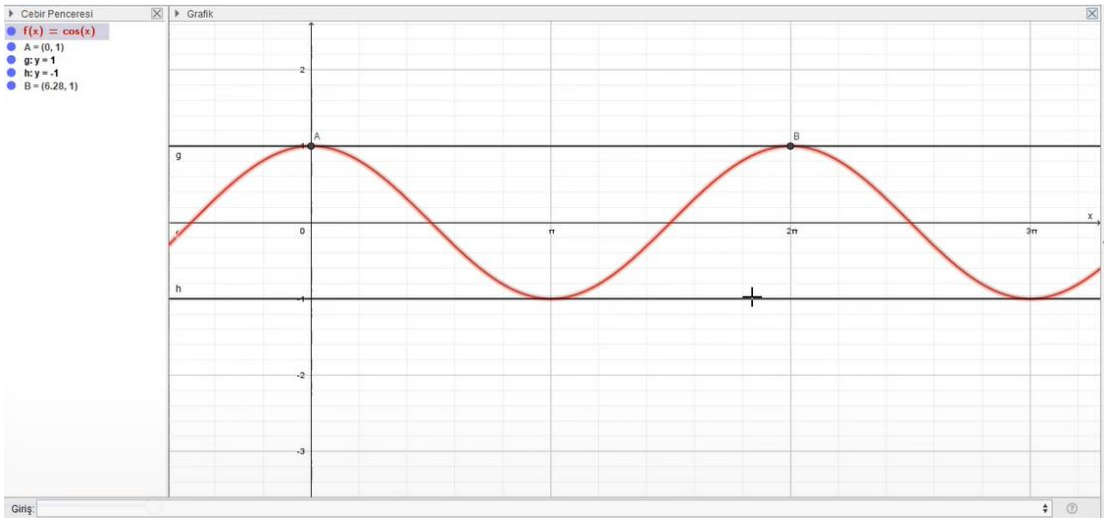
> *"Tanım kümesi +∞'dan +∞'a kadar. Tanım kümesinde bir kısıtlamam yok. Birim çember üzerinde de göstermiştik. 0° ile 360° arasında gidiyordu ve tekrar tekrar dönüyor ya. 360°'den sonra 400°'ye geldi 40° olarak devam ediyor. O yüzden (-∞,+∞) tanım kümesi. Değer kümesi de şöyle yaklaştırayım gözüksün. -1 ile 1 aralığında. Periyodu… Tekrar eden bir şekil var önümüzde. Aynı şekle tekrar nerde geldiğine bakarım. Şurda noktalar belirliyim. Mesela 0°'den başlatayım bu şekilde geliyor, tekrar şuraya geliyor. Şu aralık benim için periyot oluyor."*



Şekil 104. Ö3'ün sinx fonksiyonu ile ilgili çizimi

Ayrıca, Ö3 cosx fonksiyonunun tanım ve değer kümeleri ile periyodunu gösterdikten sonra, x ekseninin grafiğini radyan cinsinden göstermek istemiş ancak nereden yapıldığını unuttuğu için çok aramış, bulduktan sonra x eksenini radyan cinsinden gösterebilmiştir (Bknz. Şekil 105). Ö3'ün bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

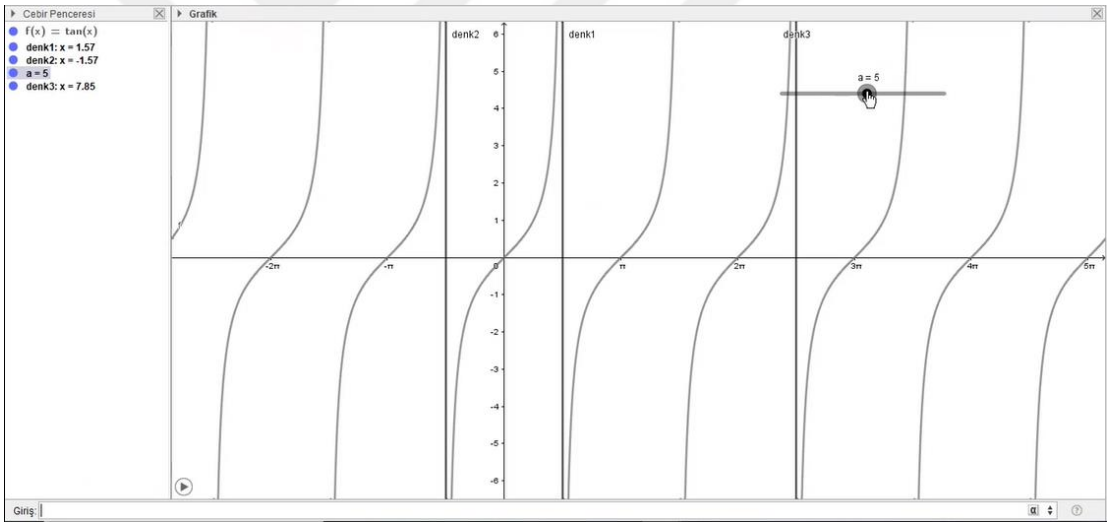
> *"Kosinüsüm bu. Yine aynı şekilde tanım kümem -∞'dan +∞'a gidiyor. Yine dik doğru ile göstereyim. -1 ile 1 aralığında aynı şekilde. Periyodunda da yine aynı şeyi yapıcam. Şeklin tekrar ettiği ikinci kısım olcak yani. Şu noktadan bu noktaya devam ettiği için periyot bu. Şunun grafiğini değiştirebiliyor muyum? (x ekseninin radyan cinsinden göstermeye çalışıyor.) Vardı çünkü biliyorum ama yerini unutmuşum. Bu şekilde. O zaman periyodum 2π olmuş oldu."*



Şekil 105. Ö3'ün cosx fonksiyonu ile ilgili çizimi

Ö3 giriş çubuğunu kullanarak tanx fonksiyonlarını da çizdikten sonra bir sürgü oluşturmuş ve bu sürgüye bağlı şekilde x=$\frac{\pi}{2}$'nin tek katları şeklinde asimptotları tanımlamıştır. Asimptotların hepsini aynı anda göstermek istemiş ancak tam olarak hatırlamadığı için Şekil 106'daki gibi bırakmış ve tanx'in tanım kümesinin (–∞,+∞) aralığından asimptotların çıkarılması ile oluşan küme, değer kümesinin ise (–∞,+∞) ve periyodununda π olduğunu göstermiştir. Ö3'ün bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Tanx'i oluşturdum. Şimdi bunun x= π/2 x=-π/2 asimptotları. π/2'nin tek katlarında benim asimptotlar oluşuyor. Hepsini tek tek çizmiyim. Asimptotları sürgüye bağlayabilirim. Bi deneyeceğim tam hatırlamıyorum böyle yapıp yapmadığımızı (Sürgüye bağlı asimptot denklemlerini oluşturuyor)…Hepsini nasıl gösteriyodum onu unuttum şuan. Ya da başka bir şeye mi bağlıyordum… Yani tanım kümem (–∞,∞)–π/2'nin tek katları demem gerekiyor. Değer kümem de –∞'dan +∞'a gidiyor. Periyodu da – π/2'den π/2'ye π kadar."*

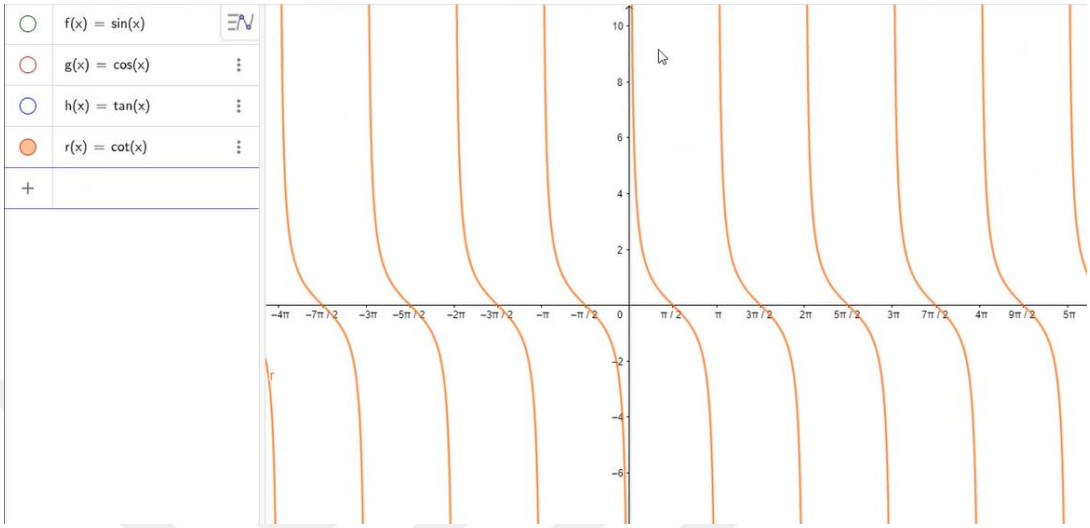


Şekil 106. Ö3'ün tanx fonksiyonu ile ilgili çizimi

Ö4 diğer katılımcılara benzer şekilde sinx, cosx, tanx ve cotx fonksiyonlarının grafiklerini giriş çubuğunu kullanarak çizmiş, tanım ve değer kümeleri ile periyotları ile ilgili açıklamada bulunmuştur. Örnek olarak Ö4'ün cotx fonksiyonu ile ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir (Bknz. Şekil 107):

> *"R(x)=cot(x) grafiğini incelediğimizde oluşan grafiğin az önceki tanjant grafiğine oldukça benzer olduğunu görüyoruz. 0°'den baktığımızda yukardan geliyor π/2'de x eksenini kesiyor aşağıya iniyor. Yine π ye geldiğimizde yukardan geliyor. 3π/2'de kesiyor. 2π'de en aşağıda sonsuza gidiyor. Yine π kadar mesafede grafik kendini tekrar ediyor. Demek ki cotx periyodu*

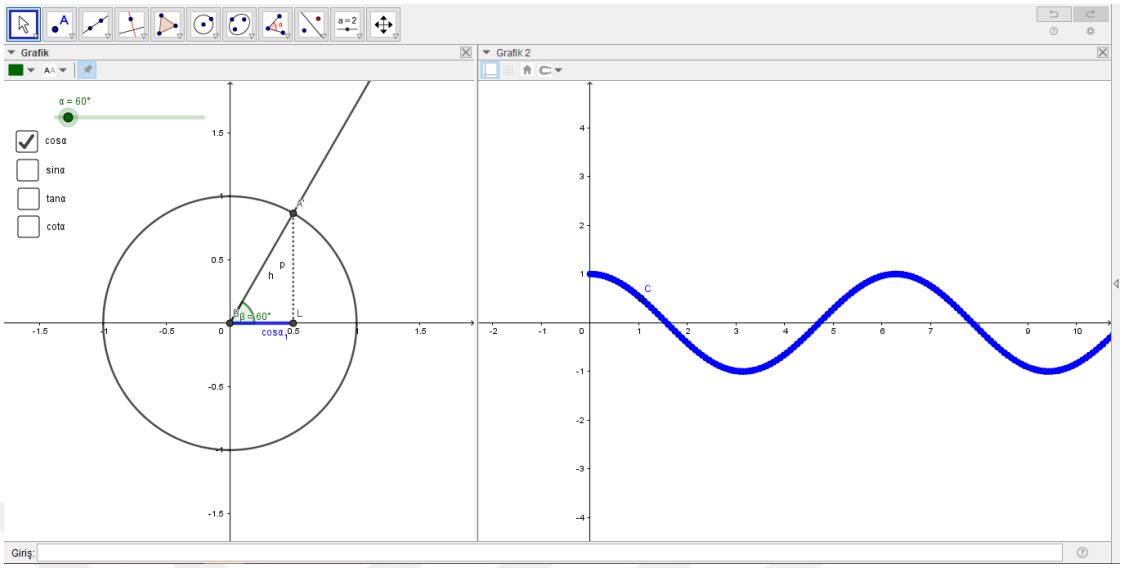
π kadar. Sonuç olarak sinx ve cosx 2π periyoduna sahipken, tanx ve cotx π periyoduna sahip olduğunu görüyoruz."



Şekil 107. Ö4'ün cotx fonksiyonu ile ilgili çizimi

Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların grafikleri konusu özelinde oluşturdukları etkinlikler incelendiğinde ise tüm katılımcıların benzer şekilde birim çember ve fonksiyonların grafiklerinin bir arada olduğu etkinlikler oluşturdukları görülmüştür. Katılımcı Ö1'in TAB'ı detaylı incelenecek olursa, Şekil 108'de görüldüğü gibi grafik 2 penceresini kullanarak trigonometrik fonksiyonların birim çemberdeki tanımları ile grafikleri arasındaki ilişkiyi göstermeyi hedeflediğini şu şekilde belirtmiştir:

"İlk olarak yine bir birim çemberden yola çıktım. Açıkçası ben bunda şöyle bir şey yapmayı planladım, hem birim çember üzerinde fonksiyonların o yaptığı hareketleri göstereceğim. İşte x=1 doğrusunun y=1 doğrusunun tanjant ve kotanjantı ifade ettiğini, birim çember üzerinde o çektiğimiz ışınla birim çemberin kesiştiği yerin apsisin ve ordinatların sinüs ve kosinüsü temsil ettiğini zaten öğrencilere çoktan söylemiş olacağım. Bununla grafikler arasında bir ilişki kurmak istedim. O yüzden GeoGebranın grafik 2 denen bir özelliğinden yararlanmak istedim. Sürgüyü oynattığımda hem grafik 1 penceresinde hem de grafik 2 penceresinde eşzamanlı olarak değişiklikler olacak."



Şekil 108. Ö4'ün sinx fonksiyonu ile ilgili çizimi

Ö1 etkinliği oluştururken, ilk olarak birinci grafik penceresinde sürgü aracını kullanarak bir açı sürgüsü oluşturmuş ve bu açıya bağlı olacak şekilde birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonları tanımlamıştır. Ardından giriş çubuğuna her bir açı değeri için trigonometrik fonksiyonların aldığı değerleri gösteren genel noktaları girerek grafik 2 penceresinde tanımladıktan sonra sürgüyü canlandırmış ve bu noktanın özelliklerinden olan izi göster özelliğini açarak fonksiyonların grafiklerinin grafik 2 penceresinde çizilmesini sağlamıştır. Bu etkinliğin inşası ile Ö1 sürgüyü sürükleyerek, açı değeri değiştikçe birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonların tanımları ile grafiklerinin çizimini aynı ekranda eş zamanlı olarak gözlemlenmesini sağlarken fonksiyonların tanımları ile grafiklerini aynı renk seçerek ikisi arasındaki ilişkinin daha iyi gözlemlenmesini sağlamıştır. Bununla ilgili Ö1'in söylemi şu şekildedir:

> *"Yani ikisinin eşzamanlı olarak gösterilmesine dikkat ettim. Yani kosinüs burada bir hareket yapıyorsa onun grafikte görünmesini istedim. Benim için buna başlama sebebim buydu. Yine renklendirmelere dikkat ettim renklerin aynı olmasına dikkat ederek anlamayı daha kolay kolaylaştıracağını düşündüm."*

Katılımcı Ö2, trigonometrik fonksiyonların grafikleri ile periyotlarının birbiri ile bağlantılı konular olduğunu ifade ederek bu konular için tek bir etkinlik oluşturmuştur (Bknz. Şekil 109). Ayrıca periyot konusu için farklı bir fikri olmadığını belirtmiş ve tekrar düşündüğünde ise esas ölçü ile ilgili bir çalışma yapılabileceğini söylemiştir. Ö2 nin bu konu ile ilgili söylemi şu şekildedir:

"Ben bunu grafik etkinliği olarak oluşturdum ama bence grafik etkinliği ile periyot birbirine bağlantılı ekstra olarak şunu söyleyelim; periyot için ayrı bir etkinlik oluşturmak aklıma gelmedi. Ne yapabilirdim? Çok fazla bilmiyorum. Belki şu anda düşündüğümüzde açıların esas ölçüsünü gösterebilirdik. Esas ölçülerinde yeniden 360°'den sonra yani 0° ile 360° arasında değiştiği için sonrasında ona bağlı değerleri bir tablo yardımıyla gösterip ona göre periyotları işaretleyebilirdik."



Şekil 109. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-2

Ö2 bu etkinliği oluştururken 2 noktaya dikkat ettiğini belirtmiştir. Bunlardan ilkinin, grafiklerinin periyotlarının radyan cinsinden ifade edilmesi nedeniyle x ekseninin radyan cinsinden göstermek olduğunu, diğer noktanın ise işaret kutusu aracını kullanarak her bir grafiği ayrı kutulara bağlamak olduğunu söylemiştir. Ö2'nin bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

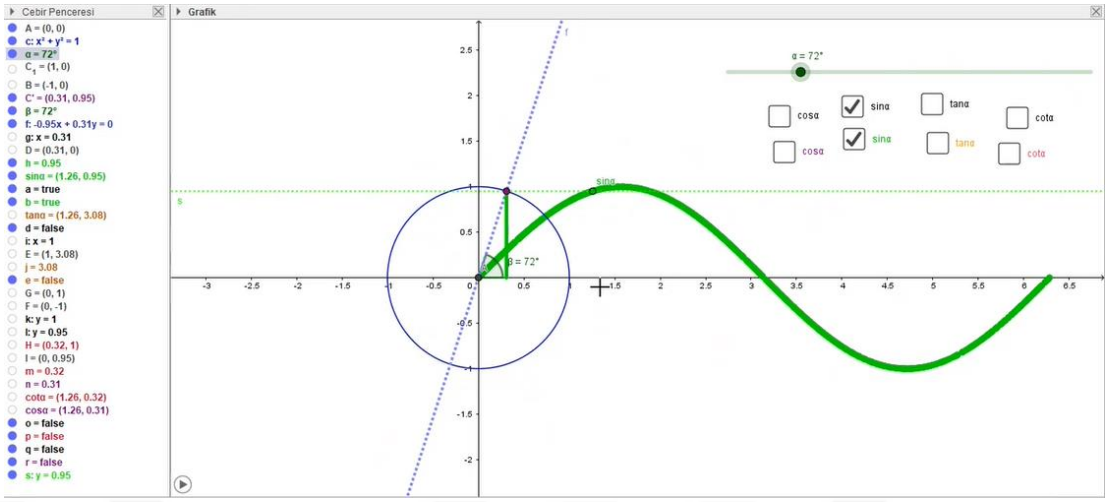
"Peki, ben neye dikkat ettim bunu oluştururken? İlk olarak periyodu nasıl isimlendiriyoruz? 0 ile 2π arasında sinüs ve kosinüs'ün değerlerini alabileceğini, tanjant ve kotanjant için de 0 ve π arasında değerler alabileceğini söylüyoruz. Dolayısıyla benim bahsettiğim sayılar; 1, 2, 3 değil, π, π/2, 3π/2, 2π, 5π gibi π'li aralıklar radyan cinsinden olduğu için, 1- x eksenini radyana bağlama gereği duydum. Bunun sebebi budur. 90°, 180°, 270° ve 360° gibi değerleri orada belirtme gereği duydum. 2- grafiklerin çok karışacağından dolayı her bir grafiği; kotanjant, tanjant, kosinüs ve sinüs, ayrı ayrı butonlara bağladım."

Ö2, Ö1'e benzer şekilde ilk olarak birinci grafik penceresinde sürgü aracını kullanarak bir açı sürgüsü oluşturmuş ve bu açıya bağlı olacak şekilde birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonları tanımlamıştır. Ardından giriş çubuğuna her bir açı değeri için

trigonometrik fonksiyonların aldığı değerleri gösteren genel noktaları girerek grafik 2 penceresinde tanımladıktan sonra sürgüyü canlandırmış ve bu noktanın özelliklerinden olan izi göster özelliğini açarak fonksiyonların grafiklerinin grafik 2 penceresinde çizilmesini sağlamıştır. Ayrıca Ö2, Ö1'den farklı olarak sürgünün özelliklerini değiştirerek sadece artan şekilde ayarlamış ve hareket hızını azaltarak daha yavaş hareket etmesini sağlayarak grafiklerin daha iyi gözlenmesini sağlamıştır. Ö2'nin etkinlik üzerinde sinüs fonksiyonunun grafiğinin izini açarak, fonksiyonun tanım ve değer kümeleri ile periyodunu incelediği örnek ile ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Tabi ki en başta, en başta, etkinliğin başında bir açı yardımıyla, sürgü yardımıyla bir açı oluşturdum ve açı üzerinde birim çemberde sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant'ı, trigonometrik oranları gösterdim ve sonrasında ben burada mesela, canlandırma yaparak, açayım şöyle. Sinüs açıldı. Sinüsün birim çember üzerinde -1 ile +1 arasında, tanım kümesini değer aldığını belirttim ve canlandırmayı yaparak da benim sinüs fonksiyonumun aslında 0'dan 2π'ye kadar s çizdiğini ve sonrasında bunun ötelendiğini; dolayısıyla öteleme işleminin kes yapıştır olduğunu, yani periyodunun 2π olduğunu belirttiğimi söyleyebilirim. Yine bunu diğer fonksiyonlar için de tek tek açtığımda söyleyebiliriz."*

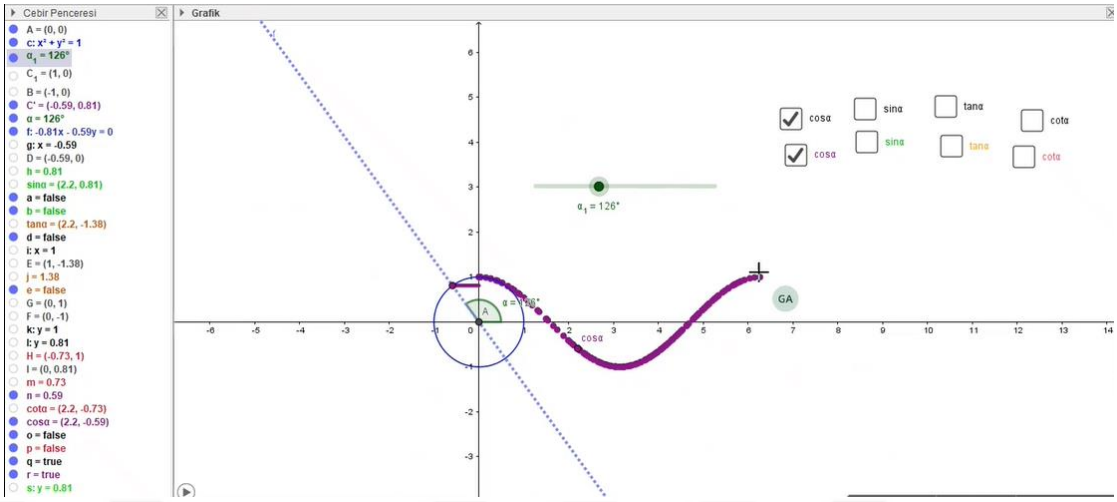
Ö3 de tüm katılımcılara benzer şekilde grafik 1 penceresinde sürgü aracını kullanarak bir açı sürgüsü oluşturmuş ve bu açıya bağlı olacak şekilde birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonları tanımlamıştır. Ancak Ö3 diğer katılımcılardan farklı olarak grafik 2 penceresini açmadan sürgüyü canlandırmış, grafiklerin izini açarak etkinlik üzerinde çizdirmiştir (Bknz. Şekil 110). Ö3'ün etkinlik üzerinde sin fonksiyonunun grafiğinin izini açarak, herhangi bir açı değerinde birim çember üzerinde sin fonkiyonunun aldığı değerin, grafik üzerindeki karşılığını y=1 doğrusunu çizerek gösterdiği örnek şu şekildedir:



Şekil 110. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-2

Ö3, diğer trigonometrik fonksiyonların da izini açarak grafiklerini çizdirdikten sonra benzer yorumda bulunarak fonksiyonların birim çember üzerinde aldıkları değerler ile grafiklerinin ilişkisini şu şekilde açıklamıştır (Bknz. Şekil 111):

> *"Aslında demek istediğim şey şu. Burda bir sinüs değeri oluşuyor. Bu sinüs değerini yan yana sağa akacak şekilde dereceyi büyüttükçe sağ tarafa gidiyor ve aynı hizada bi sinüs noktasını oluşturuyorum. Benim α, 0° ile 360° arasında olduğu için grafikte 0° ile 360° arasında bir grafik çıkıyor. Sürgüyü değiştirdiğim zaman haliyle bu da değişecek. Ama önce şu 0-360 arasında olarak gösterelim. Daha sonra atıyorum kosinüs alfayı açarım. cosα dediğim şey burada B noktasının x değeriydi. Aynı şekilde aynı hizada noktayı da getiriyorum. Onun da izini açayım. Şöyle oluşturduğumda şurda oluşan şey grafiğim oldu. Canlandırmayı da açabilirim burda. O şekilde de grafikleri oluşturabilirim. Tanjant ve kotanjantta öyle yapalım. Şuan oluşan şey de turuncular tanjant, pembe coanjant, yeşiller sinüs diğerleri cosisnüs oldu. Sadece grafiğe de odaklayabilirim şunları kapatırım mesela."*

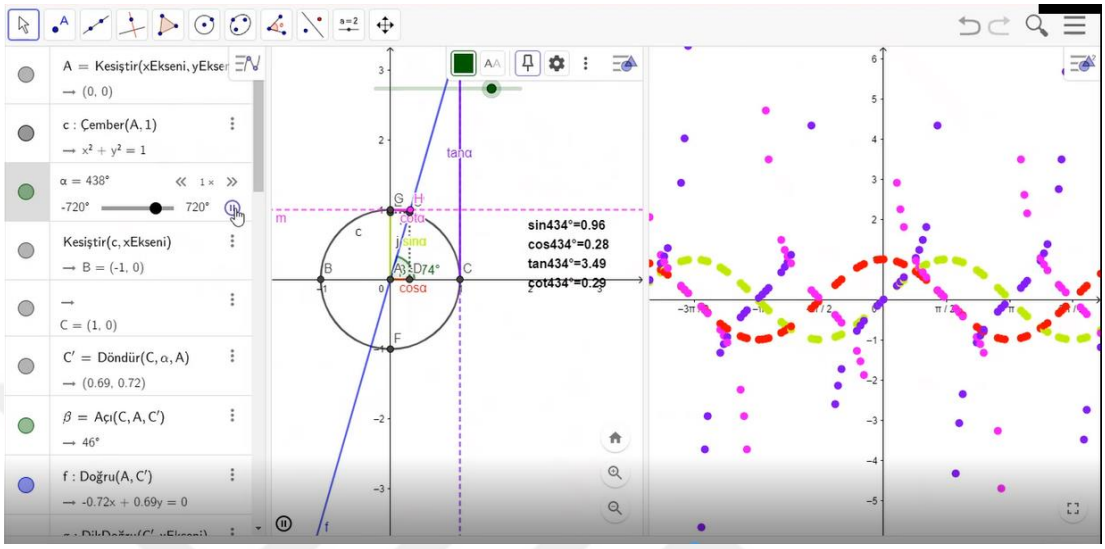


Şekil 111. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-3

Katılımcı Ö4 de diğer katılımcılara benzer şekilde oluşturduğu birim çemberde trigonometrik fonksiyon tanımladığı etkinliğinde grafik 2 penceresini açmış ve giriş çubuğuna her bir açı değeri için trigonometrik fonksiyonların aldığı değerleri gösteren genel noktaları tanımlamıştır. Ardından sürgüyü canlandırmış ve bu noktanın özelliklerinden olan izi göster özelliğini açarak fonksiyonların grafiklerinin grafik 2 penceresinde çizilmesini sağlamıştır. Ardından x ekseninin değerlerini radyan cinsinden oluşturmuş ve nesnenin özelliklerini değiştirerek trigonometrik fonksiyonların grafiklerini uygun isim ve renklerde göstermiştir. Sürgünün özelliklerini değiştirerek de daha geniş bir aralıkta grafikleri çizdirmiştir. Ancak diğer katılımcılardan farklı olarak TB'sinde de bahsedildiği gibi işaret kutusu aracını kullanmayı hatırlamadığı için grafikleri bir arada göstermiştir (Bknz. Şekil 112). Ö4 ün etkinliğin inşasına dair söylemleri şu şekildedir:

> *"Şimdi bu konuya dair etkinlik var benim hafızamda. Ben bunun ders için mi daha önce izledim veya yaptım ya da lisansta GeoGebrayla uğraşırken mi yaptık hatırlamıyorum. Ama kafamda bir etkinlik vardı. O etkinlik de şu. Ben zaten daha önce şu birim çember etkinliğini yapmıştım. Ben yine o etkinliği açtım. Ve dedim ki bu birim çember üzerinden grafikleri göstermek için 2. grafik penceresini açayım. Oradan da hani buradan sürgü oynattığımda birim çemberde değişim varken işte grafikler nasıl oluyor 2. grafik penceresinde göstereyim dedim. Ve bu şekilde daha iyi anlaşılır konu herhalde diye düşündüm. O yüzden grafik 2'yi açtım. Daha sonra rastgele noktalar belirledim. Bu noktaları tanımladım… Sinüs, kosinüs. İsim ve renklendirme yaptım. Sonra izlerini açıyorum hepsinin. Açıya geliyorum, açıya ne yapıyorum? Açı aralığını genişletiyorum. 360°'ydi normalde açı. -720° 'den 720° 'ye yapıyorum. Yani grafik daha bir geniş şekilde olsun daha yeri kapsasın. Sonra canlandırmaya alıyorum, bu şekilde oluyor. Sonra bu gözüme karışık geldi, ne yaptım? Kapattım birkaç tanesini. Evet sadece*

sinüsü açık bıraktım. Tekrar canlandırmayı açtım. Burada grafiği çiziyor. Bu şekilde bir etkinlik hazırladım."



Şekil 112. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü

Son olarak Ö4, grafiklerinin hareketlerinin değişiminin daha iyi gözlemlenmesi için sürgünün hızını da azaltmak istemiş ancak sürgünün özelliklerini nasıl değiştireceğini bulamamıştır. Ö4'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

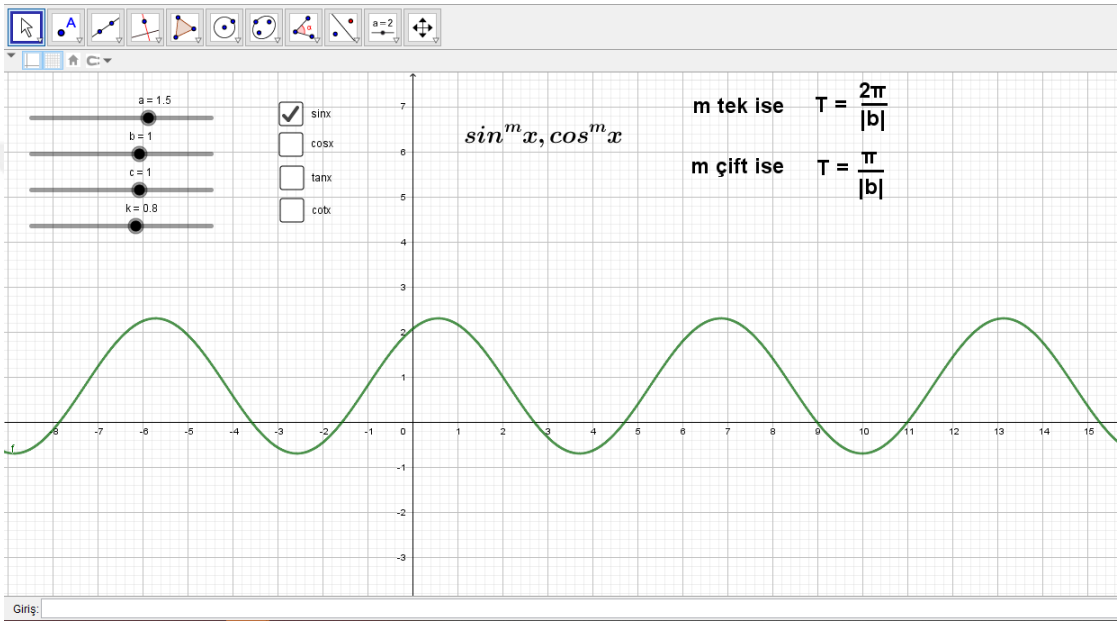
> *"Şu canlandırma hızını nereden ayarlayabilirdik? Tanjantta mesela çok şey oluyordu. Tanjantta çok hızlı ilerliyor. Böyle bir, o grafiği tam net vermiyor. Bu canlandırmayı daha yavaşa çekeyim diye düşündüm. Ama nereden yapılacağı aklıma gelmedi. Yanlış hatırlamıyorsam ben onu bulamadım bu etkinliği hazırlarken… Yani şu etkinlikte, yaptığımız etkinlikte düzenleyeceğim şey canlandırmanın hızını azaltmak ki daha hoş gözüksün."*

Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların periyotları konusu özelinde TAB'ları incelendiğinde ise, Ö1 ve Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların katsayı ve periyot ilişkisini içeren etkinlikler oluşturduğu, Ö2 ve Ö3'ün ise trigonometrik fonksiyonların grafik ve periyotları konuları özelinde tek bir etkinlik oluşturduğu görülmüştür.

Katılımcı Ö1'in trigonometrik fonksiyonların periyot konusu özelinde oluşturduğu etkinlik incelendiğinde, ilk olarak giriş çubuğuna asin(bx+c)+k şeklindeki trigonometrik fonksiyon denklemlerini sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının her biri için girerek 4 adet sürgü oluşturarak grafiklerinin çizmesini sağladığı görülmüştür. Ö1, farklı sürgüler sayesinde trigonometrik fonksiyonların değişimini eş zamanlı olarak sunarak sürgü

değeri değiştikçe fonksiyonların periyotlarının değişiminin gözlemlenmesini sağlamıştır (Bknz. Şekil 113). Ö1 in bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Aşağıya asin(bx+c)+k şeklinde fonksiyon tanımlıyorum. Burada dört tane sürgü oluşmuş oluyor. Ardından diğer kosinüs, tanjant ve kotanjant için de benzerlerini yapıyorum. Bunu yapmamın sebebi fonksiyonların periyotlarına nelerin etki ettiğini, neden etki etmediğini ve etki eden şeyler nasıl etki ediyor onları göstermek istedim."*



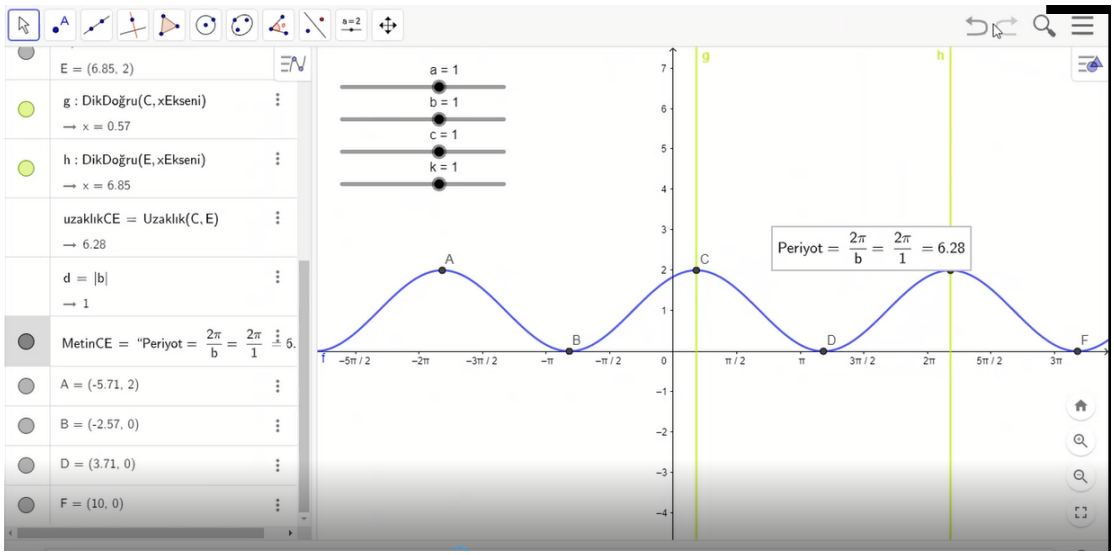
Şekil 113. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların periyotları etkinliği ekran görüntüsü-2

Ardından Ö1, metin aracı ile de periyot formülüne etki eden b katsayısını fonksiyonların denklemlerine bağlı şekilde metin olarak yazarak trigonometrik fonksiyonların periyodunu bulma formülünü etkinliğine eklemiştir. Son olarak işaret kutusu aracını kullanarak 4 adet isimleri sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant olan işaret kutuları oluşturmuş ve her trigonometrik fonksiyona ait bilgiyi bu kutularla eşleştirerek tek bir etkinlikte 4 trigonometrik fonksiyona ait bilgilerin sunulmasını sağlamıştır. Ö1'in bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Derslerde yazacağım kuralları yazdım açıkçası çift ve tek olma durumlarını yazıyorum. Ondan sonrasını sinüs kosinüs tanjant ve kotanjant grafiklerini bir işaret kutusuna bağlayıp o aşağıdaki kalabalığı daha da sade hale getirmeye çalışıyorum. Çünkü hepsi açık olduğu zaman sıkıntı oluyor biraz."*

Katılımcı Ö4 ise trigonometrik fonksiyonların periyotları konusu ile ilgili benzer 4 adet etkinlik oluşturmuştur. İlk olarak Ö1'e benzer şekilde giriş çubuğuna asin(bx+c)+k şeklindeki trigonometrik fonksiyon denklemini girerek 4 adet sürgü oluşturulmasını ve fonksiyonun grafiğinin çizilmesini sağlamıştır. Ardından sürgünün artışını 1 birim ve x ekseninin radyan cinsinden olacak şekilde değiştirdikten sonra uç nokta aracını kullanarak grafiğin uç noktalarını belirlemiştir. Periyodu göstermek için ise C ve E noktalarından geçen iki doğru oluşturmuş ve doğrular arasındaki mesafeyi ölçmüştür (Bknz. Şekil 114). Ö4'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"İlk başta sinx fonksiyonunu bu şekilde ifade ettim. Farklı katsayıları ya da içerisi farklı, işte +k gibi. Farklı sürgüleri olsun, farklı şekillerde olsun. Sadece sinx değil de her hali için olsun istedim ki, periyot bu hallerde nasıl değişiyor ya da değişmiyor mu anlaşılsın, görülsün diye bu şekilde ifade ettim. Hepsinde ilk başta yaptığım şey buydu. İşte asin(bx+c)+k kosinüs, kotanjant en başta bu şekilde yaptım. Sonra sürgüleri -5'ten 5 aralığında, artışları da 1, 1 artsın istedim. Hani normalde 0, 1 diye artıyor çünkü yanlış hatırlamıyorsam. Artışları bu şekilde yaptım, sonra sürgüleri açtım. Daha sonra ne yaptım? Sinüs için daha sonra uç noktaları belirledim. Uç noktaları belirledikten sonra da, x eksenini π cinsinden yaptım. Uç noktaları belirledikten sonra tekrardan bir bölüm için iki tane doğru belirledim. Burada mesela C ve E noktalarından geçen 2 doğru seçtim ki o aralık tekrar eden bölüm çünkü diye. Sonra ikisinin arasındaki uzaklığı belirledim."*



Şekil 114. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların periyotları etkinliği ekran görüntüsü-3

AB'sinde de bahsedildiği gibi Ö4 periyot formülünü tam olarak hatırlamadığını söylemiş dolayısıyla bu bağlamda AB'sinde eksiklik olduğu ortaya çıkmıştı. Ö4 GeoGebrada

oluşturduğu bu periyot konusu özelindeki etkinliğine, metin aracını kullanarak periyot bulma formülünü eklemek istemiş ancak formülü tam anlamıyla hatırlamadığı için hem eksik şekilde yazmış hem de formülde geçen 'b' katsayısının mutlak değerini göstermediğini sonradan fark ederek düzeltmiştir. Ayrıca TB'sinde de bahsedildiği gibi yazılımı etkili kullanamaması nedeniyle C ve E noktalarından geçen doğruları sabitlemek isterken de yazılımın özellikleri yeterince bilmeden hareket ederek deneme yanılma yoluyla amacına ulaştığı görülmüştür. Ö4'ün bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Sonra da uzaklık metninde de düzenleme yaptım şöyle. Uzaklık metnini bu şekilde düzenledim ve sürgüyü oynattığımda nasıl değişiyor gibi. Burada sonradan düzeltmeye gittim. 2π/b yazmıştım başta. O b'nin işte mutlak değer olması lazım. Bunu hata yaptığımı sonradan fark edip geri dönüp düzeltiyorum bunu. Bu şekilde sürgü değiştikçe a, b, c, k için nasıl oluyor gibi. Ben bunu yaparken E noktasından geçen doğru ilk başta E noktasının olduğu yerde kaldı. Onu algılayamadım ben öyle kaldığını. Sonra bir iki bir şey yaptım. Onu düzelttim."*

Ö4 sinüs fonksiyonu için etkinliği oluştururkenki gerçekleştirdiği eylemleri kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonları için de benzer şekilde gerçekleştirmiştir. Tanjant ve kotanjant fonksiyonunda periyotları göstermek için asimptotları nasıl çizebileceğini aramış ancak oluşturamayınca kökler aracını kullanarak grafiğin x ekseninde kestiği noktaları işaretlemiştir. Sinüs fonksiyonuna benzer şekilde iki noktayı kullanarak geçen doğruyu çizerek grafiğin benzer şekilde devam ettiğini ifade etmiş ve doğrular arasındaki mesafeyi ölçerek periyodunu göstermiştir. Ö4'ün bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Bunu kosinüs ve sinüsle aynı şekilde yaptım o yüzden geçiyorum. Tanjanta geldiğimde benim isteğim periyodu asimptotlar arasında göstermekti. Çünkü tam böyle bir bütün halinde ya asimptotlar arasında, öyle göstersem daha güzel olur diye düşünüyordum. Ama ben bir türlü asimptotları çizemedim. Yani hiçbir şekilde bunu yapamadım. O yüzden hani mecbur dedim köklerini bulayım, kökler aracını kullandım yani. Kökler aracını kullanıp kestiği noktalar. İki nokta arasında hani bir üste giden bir alta giden aynı şeyler tekrar ediyor sonuçta, bu da olur. Buradan geçen doğru çizdim."*

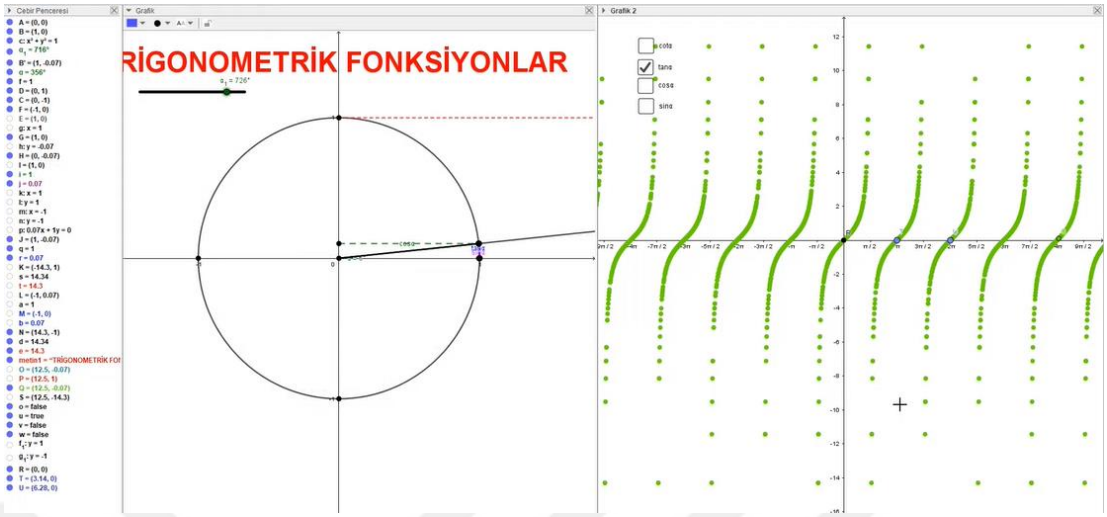
Ö4, Ö1'den farklı olarak etkinliğinde işaret kutusu aracını kullanmadığı için her trigonometrik fonksiyon için bu etkinliği benzer şekilde oluşturmuştur. Ö4'ün işaret kutusu aracının kullanımına dair söylemi şu şekildedir:

> *"4 tane trigonometrik fonksiyon için 4 ayrı etkinlik yaptım. Sebebi de bu göster kapat mevzusunu hatırlamamam. Eğer onu bilseydim ve bu çok aniden aklıma geldi bu etkinlik. Aklıma gelse hemen yapayım dedim. Hani tanjantta ait yapılanları bir düğmeye alıp göster*

kapat şeklinde, ayrı düğmelerle göster kapat olsa daha iyi olurdu. Ama bakınca da hani geçişleri hızlı bir şekilde yapılabilir yine 4 etkinliğin GeoGebrada. O rahatsız etti beni. Ya yine belki çok sıkıntı değil ama beni rahatsız ediyor. Göster kapat olsa daha şık olabilirdi."

Katılımcı Ö2 ve Ö3 ise trigonometrik fonksiyonların grafik ve periyotları konuları için tek bir etkinlik oluşturmuşlardır. Ö2 ve Ö3 oluşturdukları etkinlik üzerinde işaret kutularını ve noktanın izini açarak trigonometrik fonksiyonların grafiklerini çizdirmiş ve periyotlarını incelemişledir. Katılımcı Ö2 sinüs fonksiyonunun grafiğini incelediği örneğe benzer şekilde, tanjant fonksiyonunun grafiğini çizdirmiş ve grafiğin tanımsız değerlerinin olduğunu, grafiğin süreksiz şekilde devam ettiğini göstermiştir (Bknz. Şekil 115). Ardından grafiğin x ekseninin kestiği 0, π, 2π değerlerini işaretleyerek grafiğin aynı şeklinde devam ettiğini bu nedenle de periyodunun π olduğunu belirtmiştir. Ö2 nin tanx fonksiyonu ile ilgili söylemleri şu şekildedir:

"*Yeşil olarak tanjant grafiği çiziliyor. Tanjant grafiği de aslında yine s harfinin bir şekilde ötelenmiş hali. Peki, nereden nereye kadar? Bunun şöyle bir farklılığı var; diğeri kesiksiz sürekli bir grafik. Tanjant grafiği de tanımsızlık değerlerinin olduğu, daha doğrusu limitten baktığımızda sonsuza gittiği noktaların olduğu bir grafik dolayısıyla, kesikli, süreksiz bir grafik. Şimdi ben bu s harflerine baktığımda, π'de, 2π'de, 3π'de, 4π'de hep x ekseni üzerinden geçtiğini görüyorum. Ben x ekseni üzerinden geçen 0 noktasını işaretlediğimde buradan geçiyor, bir de nerden geçiyor? π'den geçiyor, 2π'den geçiyor. Baktığımda 0 ile π arasında π ile 2π arasında, 2π ile 3π arasında aslında hep oradan kesip oraya yapıştırmış noktayı, oradan kesip oraya yapıştırmış. Doğal olarak bu süreçte tekrar ettiğini görüyorum yani 2π-π'den veya 3π-2π'den veya π-0'dan hep π aralıklarla grafiğin tekrar ettiğini görüyorum. Dolayısıyla periyot da zaten tekrarlama demek aslında. Hangi aralıklarla tekrarlanıyor bu grafik? Bu da π olarak bunu söyleyebiliriz, öğrenci görebilir."*



Şekil 115. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-3

Katılımcı Ö3 ise trigonometrik fonksiyonlarının periyotlarının öğretiminin zor konulardan biri olduğunu düşündüğü ifade etmiş ve grafiklerin gösterimi için oluşturduğu etkinliğini periyotların gösterimi için geliştirmek istemiş ancak istediği gibi bir etkinlik oluşturamamıştır. Bu nedenle Ö3, hem konuyu zor bulması ve GeoGebrada eylemlerini tam olarak gerçekleştirememesi nedeniyle de etkinliğinin bu konu özelinde güçlü olmadığını düşündüğünü ifade etmiştir. Ö3'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Ama hayal ettiğim şeyi gerçekleştiremedim. O yüzden bir önceki grafik etkinliğimi periyotta da kullanırım diye düşünüyorum. Etkinliğim de bence çok güçlü değil. O yüzden çok güvenmiyorum etkinliğime… Biraz zaten yapmak istediklerimi de eksik yapmıştım hatırlıyorsun. O yüzden biraz benden kaynaklanabilir, biraz da trigonometrik oranların öğretiminde bence en zor kısımlardan biri, periyot kısmı. Oturmuyor çünkü çocukta, çok cebirsel kalıyor görselliğin dışına geçince. Mesela benim biraz daha görselliğe yönelmemin sebebi buydu."*

Sonuç olarak katılımcıların trigonometrik fonksiyonların grafikleri ve periyotları konusu özelinde TAB'ları incelendiğinde, benzer teknolojik eylemleri yaparak benzer etkinlikleri oluştursalar da TAB'larında farklılıklar olduğu görülmüştür. Katılımcı Ö1 ve Ö2'nin TAB'ına bakılacak olursa, grafik konusu özelinde oluşturduğu etkinliklerinde grafik 1 penceresinde birim çember ve sürgüye bağlı şekilde değişen trigonometrik fonksiyonları tanımladıktan sonra grafik 2 penceresini açarak birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonların tanımları ile grafiklerinin çizimini aynı ekranda eş zamanlı olarak gözlemlenmesini sağlayaması TAB'larının kapsamlı olduğunu göstermektedir. Ek olarak katılımcı Ö1 oluşturduğu trigonometrik fonksiyonların katsayı ve periyot ilişkisini içeren

etkinlik ile trigonometrik fonksiyonların değişimini eş zamanlı olarak sunarak sürgü değeri değiştikçe fonksiyonların periyotlarının değişiminin gözlemlenmesini de sağlamıştır. Dolayısıyla Ö1'in TAB'ının Ö2'den daha kapsamlı olduğu bu konu özelinde de görülmektedir.

Katılımcı Ö3 ise Ö1 ve Ö2'ye benzer eylemleri gerçekleştirse de teknolojiyi Ö1 ve Ö2 kadar etkili şekilde kullanamaması nedeniyle grafik 2 penceresini kullanmadan bir etkinlik oluşturmuştur. Dolayısıyla trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin çiziminin gözlemlenmesini ve sunulmasını Ö1 ve Ö2 gibi kadar etkili şekilde sağlayamamıştır. Bu nedenle Ö3'ün AB'sinin TB'sine entegrasyonu sonucu oluşan TAB'ının Ö1 ve Ö2 kadar kapsamlı olmadığı görülmektedir. Katılımcı Ö4'ün ise trigonometrik fonksiyonların grafik ve periyot konuları özelinde Ö1'e benzer etkinlikler oluşturduğu görülse de AB'sinde de bahsedildiği gibi periyot formülünü tam olarak hatırlamaması, TB'sinde bahsedildiği gibi teknolojiyi diğer katılımcılar kadar etkili şekilde kullanamaması ayrıca etkinliği sunarkenki söylemleri göz önüne alındığında AB'sini TB'sine etkili şekilde entegre edememesi dolayısıyla TAB'ının diğer katılımcılara göre daha az kapsamlı olduğu gözlemlenmiştir.

4.5. Teknolojik Pedagojik Bilgi (TPB)

Yapılan analizler sonucunda, katılımcıların söylemlerinden yola çıkarak trigonometri konusunda var olan TPB'leri 5 farklı başlık altında incelenmiştir: (1) zamandan tasarrufu, (2) anlamlı öğrenme, (3) kalıcı öğrenmeyi destekleme, (4) daha fazla sayıda örneklendirme ve (5) motive etme (Bknz. Tablo 28). Aşağıdaki her bir başlık katılımcıların söylemlerinden örneklerle incelenmiştir.

Tablo 28

TPB'ye yönelik başlıklar

TPB Başlıkları	**Ö1**	**Ö2**	**Ö3**	**Ö4**
Zaman tasarrufu	✓	✓		
Anlamlı öğrenme	✓	✓	✓	
Kalıcı öğrenmeyi destekleme	✓		✓	✓
Daha fazla sayıda örneklendirme	✓	✓	✓	
Motive etme		✓		

4.5.1. Zaman Tasarrufu

Katılımcıların söylemleri detaylı şekilde ele alındığında, katılımcı Ö1 ve Ö2 GeoGebra yazılımını kullanmanın öğretim aşamasında zamandan tasarruf sağladığını belirtmiştir. Örneğin, Ö1 trigonometrik fonksiyonların öğretimi için oluşturduğu etkinliğine ait yorumunda birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonlara örnek vermek için birim çemberi tekrar çizmek zorunda kalmadığını, GeoGebra yazılımı sayesinde tek bir çizim üzerinde trigonometrik fonksiyonları gösterebildiğini söylemiştir. Ö1 bunu kendi cümleleriyle şu şekilde ifade etmiştir:

> *"Kâğıt ve kalem kullanmaktan farkı kâğıt kalemde tek tek bunları göstermem gerekiyor. Defalarca birim çember çizmem gerekiyor burada tek bir çizim üzerinde bütün durumları eşzamanlı olarak gösterebiliyorum. Yani zamandan tasarruf etmemi de sağlıyor diyebilirim."*

Katılımcı Ö2 ise trigonometri öğretiminde teknoloji kullanma anlamında zamandan tasarruf etmeyi hem öğretmen hem de öğrenci açısından değerlendirmiştir. Ö2, trigonometrik fonksiyonların öğretimine ait oluşturduğu etkinliği için Ö1 ile benzer şekilde beyaz tahtayı kullanarak sınırlı sayıda birim çember çizerek x açısı oluşturabileceğini, GeoGebra yazılımının ise öğretmene zaman tasarrufu sağladığını belirterek teknoloji kullanımının matematiksel bilginin öğretimine olan etkisine değinmiştir. Ö2'nin bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Burada bir kere GeoGebra yani ya da matematik yazılımlarının akıllı tahtadan farklı olarak bir, öğretmen için zaman kolaylığı var. Şimdi bunu tahtada çizmeniz, tek tek bir açı almanız, herhangi bir ya da iki açıyı göstermeniz demek tahtaya çizmeniz belirli sayıda. Yani çok sınırlı sayıda açıları göstermeniz demek. Böyle GeoGebra etkinliğini kullandığınızda α sürgüsüne bağlı olarak 360° için de karşılaştırmaları yapabiliyorsun."*

Buna ek olarak Ö2 trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılmasına ait oluşturduğu etkinlik için (Bknz. Şekil 70) ise öğrencinin tahtada verilenleri kağıda geçirmekle zaman harcamasını engellediğini bu sayede öğrenciye de zaman tasarrufu sağladığını, aynı zamanda da dersin daha zevkli hale gelebileceğini ifade etmiştir. Burada Ö2'nin teknoloji kullanımının öğrencinin öğrenmesine olan etkisine ve matematik dersinin eğlenceli hale gelmesine katkı sağladığına değinerek teknolojik araçların kullanımının matematik öğretimini nasıl değiştirebileceğinin farkında olduğu görülmüştür. Ö2'nin bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

Öğrenci içinse tabi ki kâğıt üzerinde bunu çizecek, uğraşacak bir kere zaman kaybı. Kağıt ile uğraşmak zaman kaybı ve GeoGebranın daha teknoloji ortamında bir çözüm yapmanın daha zevkli olabileceğini öğrenci içinde düşünüyorum."

Katılımcı Ö1 ve Ö2'nin trigonometri öğretiminde teknoloji kullanımının, matematiksel bilgilerin teknoloji yardımı ile oluşturulması ve sunulması aşamasında zamandan tasarruf sağladığını belirterek teknolojinin öğretime olan etkisini bildikleri göstermektedir. Bu durumda Ö1 ve Ö2'nin öğretilecek trigonometri konusunu göz önünde bulundurarak ve teknolojik araçları kullanarak TPB'lerine yönelik kanıt sunmaktadır.

4.5.2. Anlamlı Öğrenme

Katılımcı Ö1, Ö2 ve Ö3 GeoGebra yazılımını kullanmanın öğrencilere dinamik bir ortamda geometrik çizimleri ve matematiksel bilgileri inceleme fırsatı sunarak, matematiksel bilginin anlaşılır olmasını, öğrencilerin matematiksel bilgiler arasında ilişki kurarak ezber yapmaktan kaçınmasını ve matematiksel genellemelere ulaşmasını sağladığını ifade etmiştir. Örneğin, Ö1 trigonometrik fonksiyonların öğretimi için oluşturduğu etkinlik (Bknz. Şekil 65) sayesinde öğrencilerin açı değiştikçe trigonometrik fonksiyonlardaki değişimi daha iyi görebileceklerini bu sayede fonksiyonlar arasında ilişki kurarak fonksiyonları birbirleri ile karşılaştırabileceklerini belirtmiştir. Burada Ö1 trigonometri öğretiminde teknoloji kullanımı ile matematiksel ifadeler arasında ilişkiler kurularak bilginin anlamlı öğrenilmesini sağlayabileceğini yani teknolojinin matematiksel bilginin öğrenimini nasıl değiştirebileceğini bildiği görülmüş dolayısı ile de TPB'si hakkında kanıt sunmuştur. Ö1 bunu kendi cümleleriyle şu şekilde ifade etmiştir:

"Yani açının değişmesi ile kosinüs, sinüs, kotanjant ve tanjantların yaptığı değişiklikleri öğrenci daha iyi görebilir. Bu fonksiyonlar arasında belki bir ilişki kurabilir. Bir sonraki etkinliğim işaret inceleme olacak ama mesela bu haliyle bile bir işaret inceleme üzerine yorum getirebilir. Yine fonksiyonları birbirleriyle kıyaslanabilir. Yani fonksiyonları daha iyi anlamasını sağlar diyeyim. Böyle bir katkısı olur."

Ö1 oluşturduğu bir başka etkinliğinde GeoGebra yazılımı üzerinde öğrencilerin trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin aldığı değerleri ve grafiklerin koordinat sisteminde nasıl ilerlediğini gözlemlemelerinin matematiksel bilginin zihinlerinde daha etkili şekilde oluşumundan bahsetmiştir. Burada da Ö2 anlamlı öğrenmenin teknoloji ile

gerçekleştirilmesine değinerek teknolojik araç kullanımının öğretime olan katkısının farkında olduğunu ve TPB'sinin varlığını göstermiştir. Ö1'nin bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Yani fonksiyonların grafiklerini anlamalarında bir katkısı olacağını düşünüyorum daha iyi anlamalarını daha iyi canlandırabileceklerini düşünüyorum. Sonra bu tanjant için tanımsız, neden tanımsız çünkü sonsuza doğru gidiyor. Bunu hani, onun neden olduğunu grafik üzerinde de neden yukarıya doğru gittiğini de daha iyi anlayabileceklerini düşünüyorum. Bu kadar."*

Buna ek olarak Ö1 trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin öğretimi için oluşturduğu etkinliğinde (Bknz. Şekil 121) trigonometrik fonksiyonların birim çemberdeki tanımı ile grafik 2 penceresindeki grafiklerini aynı renk olmasına dikkat ettiğini de belirtmiştir. Bununla ilgili olarak Ö1 etkinliğinde birim çember üzerinde sinx fonksiyonunu ile grafiğini aynı renk ile oluşturarak fonksiyon ve grafiğinin aldığı değerlerin değişiminin GeoGebra yazılımı üzerinde daha iyi gözlemlenmesinin sağlanarak matematiksel ifadeler arasındaki ilişki kurulmasını kolayaştırdığını ve anlamlı öğrenmenin gerçekleşmesini sağladığını belirtmiştir. Ö1 GeoGebra yazılımının renk özeliğini kullanarak da teknolojinin öğretime olan faydasına değinmesi TPB'sini destekler niteliktedir. Ö1'in bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Yani ikisinin eşzamanlı olarak gösterilmesine dikkat ettim. Yani kosinüs burada bir hareket yapıyorsa onun grafikte görünmesini istedim. Benim için buna başlama sebebim buydu. Yine renklendirmelere dikkat ettim renklerin aynı olmasına dikkat ederek anlamayı daha kolay kolaylaştıracağını düşündüm."*

Katılımcı Ö2 ise öğrenciye $sin^2x + cos^2x = 1$ özdeşliğinin her zaman sağlandığını beyaz tahtada göstermek için çok fazla örnek vererek işlem yapmak gerektiğini, GeoGebra yazılımını kullanmanın ise farklı açı değerleri için örnekler vererek öğrencinin matematiksel genellemeye ulaşmasını sağladığını ifade etmiştir (Bknz. Şekil 97). Bununla ilgili olarak Ö2 öğretilecek konuyu göz önünde bulundurarak ve teknolojinin etkili ve doğru şekilde kullanımına örnek gösterek TPB'sine yönelik kanıt sunmuştur. Ö2'nin bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Tabi yani beyaz tahtada böyle bir şey çizdik öğrenciye atıyorum β dedik buraya işte 40° dedik 50° dedik 52° dedik. Öğrenci 52° için sinüsü kosinüsü buldu. Hocam bu üçgende 52°'de burası kosinüs burası sinüs. Burada* $sin^2x + cos^2x = 1$ *onu*

görüyorum hocam diyecek. Ben bunu değiştirdim ne oldu, kosinüs değişti, sinüs çok büyük oldu hipotenüsüm yine 1. Bu sefer öğrenci bir düşünecek sinüsü bulmaya kalkacak kosinüsü bulmaya kalkacak belki işlem yapacak. Ancak GeoGebra üzerinde her açı değeri için bunu öğrenci rahatlıkla görebilecektir diye düşünüyorum. Kullanmasının özellikle genelleme için önemli olduğunu düşünüyorum."

Katılımcı Ö3 ise trigonometrik fonksiyonların işaretlerinin öğretimi için oluşturduğu etkinliğinde (Bknz. Şekil 88) teknoloji kullanılarak trigonometrik fonksiyonların işaretlerinin bölgelere göre gösterilmesinin ya da verilen bir trigonometrik fonksiyonun açı değerini dar açıya taşırken ki değişimi öğrencilerin gözlemlemelerini sağlanmanın onları ezber bilgiden uzaklaştırarak matematiksel bilginin nereden geldiği, altında yatan nedeni öğrenmelerini sağladığını söylemiştir. Burada Ö3'ün trigonometri öğretiminde teknoloji kullanımı sayesinde öğrencinin bilgiyi ezberlemesinin önüne geçerek anlamlı bir öğrenme oluşturalacağını yani teknolojik araçların matematik öğrenimini nasıl değiştirdiğini bildiğini, TPB'sinin varlığını göstermektedir. Ö3'ün bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

"Bence kavramsal öğrenmeyi de odaklıyor. Öbür türlü ezber oluyor çünkü. Biz hep şu şekilde öğrenmiştik ya; '1. bölge bütün, 2. bölge sınıf, 3.bölge kara tahta, 4. bölge coştu.' O şekilde +,- diyoruz ama neden öyle olduğunu bilmiyorduk. Onu bilmeyince biraz oturtmada, öğrencinin zihninde oturmasını ya da farklı bir... Mesela dönüşümleri, neden dönüşümlerde 180º yapınca + yapıyoruz, 270º yapınca - yapıyoruz ya da neden isim değiştiriyoruz ya da neden isim değiştirmiyoruz kısımları oturmuyordu. Çok ezber oluyordu. Biraz böyle en temelini, nereden geldiğini, nasıl olduğunu grafik ya da herhangi bir birim çember üzerinden gösterdiğimizde aslında diğer kısımları çok zorlanmadan öğretmeye hazırlıyor öğrenciyi."

Ö3 trigonometrik fonksiyonlarının grafiklerinin öğretimi için oluşturduğu etkinliğinde (Bknz. Şekil 76) ise, öğrencilerin eşzamanlı olarak birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonların tanımları ile grafiklerinin aynı ekranda görebilmelerinin fonksiyonunun aldığı değerler ile grafiklerini ilişkilendirmeleri konusunda etkili olduğunu ifade etmiştir. Ö3'ün trigonometri öğretiminde teknolojinin kullanımı ile matematiksel ifadeler arasında ilişki kurulmasına vurgu yaparak bilginin daha anlamlı şekilde öğrenilmesini sağlayacağını belirtmesi TPB'sini destekler niteliktedir. Ö3'ün bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

"İkisini ilişkilendirme konusunda daha etkili. Çünkü dinamik olarak ben şunu yapamam. Yani sinüsü gösterdiğim şey hem birim çember üzerindeki uzunluk olarak

sinüsü gösteriyorum hem de aynı grafik üzerinde bir tane tablo üzerinde göstermiş oluyorum. İki konuyu öğrenci aynı şey olduğunu birbirine bağlanması gerekiyor. Bunu biraz hani arasındaki geçişi bağlantılı olduğunu öğrencinin algılayabilmesi için bence eş zamanlı olarak görebilmesi gerekiyor. O yüzden böyle bir etkinlik oluşturdum.

4.5.3. Kalıcı Öğrenmeyi Destekleme

Katılımcı Ö1, Ö3 ve Ö4 GeoGebra yazılımının bilginin kalıcı öğrenilmesini desteklediğini söylemişlerdir. Bununla ilgili olarak Ö1 trigonometrik fonksiyonların işaretlerinin öğretimi için oluşturduğu etkinliğinde (Bknz. Şekil 84); dinamiklik özelliği sayesinde trigonometrik fonksiyonların aldıkları değerlerin ve işaretlerinin, teknolojinin görselleştirmeyi sağlaması nedeni ile daha iyi gözlemleneceğini belirtmiştir. Bu bağlamda ise matematiksel bilginin görselleştirilerek daha kalıcı şekilde inşa edilebileceğine değinmiştir. Burada Ö1'in teknoloji kullanımı ile trigonometri öğretiminin daha kalıcı hale getirilebileceğini yani nasıl değişebileceğini bildiği görülmüş dolayısı ile TPB'si hakkında kanıt sunmuştur. Ö1 bunu kendi cümleleri ile şu şekilde ifade etmiştir:

"Yani şeylerin açık ve net şekilde gözüktüğünü düşünüyorum. Tanjant ile sinüs arasındaki kotanjant ve sinüs arasındaki büyüklük farkını. Yine kosinüs burada negatif, kotanjant negatif. Mesela burada kotanjantın uzunluğu daha fazla ama negatif olduğu için daha küçük. Bunlar net bir şekilde gözüküyor. Öğrenciler bunları fark edecek. Akılda kalıcılığı daha fazla olacak ve mantığını daha iyi anlayacaklarını düşünüyorum fonksiyonların."

Ö1 trigonometrik fonksiyonların periyotlarının öğretimi için oluşturduğu etkinliğinde (Bknz. Şekil 67) de benzer şekilde GeoGebra yazılımının dinamiklik özelliği sayesinde asin(bx+c)+k tipindeki trigonometrik fonksiyona; a, b, c ve k katsayılarının etkilerini tüm trigonometrik fonksiyonlar için gözlemlenmesi sağlayacağını ve akılda kalıcılığı artıracağını ifade etmiştir. Ö1'in teknolojinin trigonometri öğretimine etkisine yönelik ifadesi TPB'sini destekler niteliktedir. Ö1'in bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

"Yani yine dinamik bir ortamda gördükleri için akıllarında daha çok kalacaktır. Bütün fonksiyonlar için görüyorlar ve aslında bütün fonksiyonlara benzer etki yaptığını görecekler b'nin. A, c ve k'nın etki etmediklerini görecekler bu sayede. Bu şekilde."

Katılımcı Ö3, Ö1'e benzer şekilde trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması için oluşturduğu etkinliğinde (Bknz. Şekil 91), dinamiklik özelliği sayesinde trigonometrik fonksiyonların aldıkları değerlerin ve işaretlerinin, teknolojinin görselleştirmeyi sağlaması nedeni ile daha iyi gözlemlenerek belirtmiştir. Bu bağlamda Ö3'ün de matematiksel bilginin görselleştirelerek kalıcı öğrenilebileceğine değinmesi sebebi ile teknolojinin trigonometri öğretimine etkisi ve TPB'si hakkında kanıt sunmuştur. Ö3'ün bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Şöyle uç noktalar dedik, 45°'nin üstü, 45°'nin altı olarak çizdiriyorum. Uç noktalarda kıyaslaması daha kolay çünkü net gözüküyor, daha basit geliyor. Görsel olarak daha rahat görebildikleri için büyüklük, küçüklüğü; akılda kalıcılık olarak daha fazla bence."*

Katılımcı Ö4 de benzer şekilde trigonometrik özdeşlikler için oluşturduğu etkinliğinde (Bknz. Şekil 99) sürgünün dinamiklik özelliği sayesinde açıyı değiştirdiğinde $sin^2x + cos^2x = 1$ özdeşliğinin her durumda 1 olduğunun görselleştirilmesini sağladığını belirtmiştir. Bu bağlam da Ö4'te teknolojinin trigonometri öğretiminde kullanımının matematiksel bilgisinin kalıcılığını sağlayacağına değinerek TPB'sine yönelik kanıt sunduğu görülmüştür. Ö4'ün bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Bu tarz etkinliklerin her konuya katkısı olur. Çünkü dinamikliği güzel bir şekilde veriyor. Ben tahtada bunu elimle de yazarım aynı şeyleri ama bu dereceler değişmez sabit kalır, örnek vermiş olurum. Burada dereceler değişse de özdeşliklerin değişmediğini çok çok net bir şekilde öğrenci görebiliyor. Bu yüzden tabiki de kalıcı öğrenmeyi sağlayacağı için yararı var."*

Ancak Ö4'e oluşturduğu farklı etkinlikler için öğretimde kullanılmasının ne gibi faydaları olabileceği sorulduğunda ise *"Yani, olayı anlaşılır kılıyor. Akılda kalıcı olmasını sağlıyor"* ifadeleri ile hep benzer söylemlerde bulunduğu ve aynı zamında da söylemlerini detaylandıramadığı görülmüştür. Bu durum Ö4'ün TPB'sinin sınırlı olduğunu göstermektedir. Ö4'ün bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Yani, olayı anlaşılır kılıyor. Akılda kalıcı olmasını sağlıyor diyebiliriz. Hepsini bir arada görme fırsatı sunuyor. Bunlar söylenebilir."*

4.5.4. Daha Fazla Sayıda Örneklendirme

Katılımcı Ö1, Ö2 ve Ö3 GeoGebra yazılımını kullanmanın matematiksel bilginin daha fazla örneklendirilmesini sağladığını söylemişlerdir. Bununla ilgili olarak Ö1, trigonometrik özdeşliklerle ilgili oluşturduğu etkinliğinde (Bknz. Şekil 95) trigonometrik özdeşlikleri ve ispatlarını olduğu gibi öğrencilere vermek yerine sürgü aracı sayesinde farklı açı değerleri için trigonometrik özdeşliklere çeşitli örnekler verilebileceğini belirtmiştir. Ö1, öğrencilerin çeşitli örnek durumlarını gözlemlemelerinin ise trigonometri öğrenimine katkısının olacağına değinmiş ve teknolojinin öğrenmeye olan etkisine yönelik bilgisinin olduğunu göstererek TPB'si hakında kanıt sunmuştur. Ö1'in bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Burada ispatımız var. Bir ispat görmek iyidir. Her zaman doğrudan vermeyi iyi bulmuyorum ben ispatlamayı bu tarz özdeşlikleri veya kuralları. Onun dışında yine birçok durumu görebiliyorlar. GeoGebranın dinamiklerinin bize kattığı bize sağladığı faydalardan biri de bu. Hani bu şekilde. Çok fazla durum görebildikleri için bir faydası olacağını düşünüyorum."*

Katılımcı Ö2 ise trigonometrik fonksiyonların işaretlerinin öğretimi için oluşturduğu etkinliğinde (Bknz. Şekil 89), öğrencilerin sürgü aracının dinamiklik özelliği sayesinde çeşitli açı değerleri için birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonların aldıkları değerleri ve bu değerlerin nasıl değiştiğini gözlemleyebilmelerini sağladığını ifade etmiştir. Burada Ö2, verilen çeşitli örnek durumlarını gözlemlemelerinin ise trigonometri öğrenimine katkısının olacağına değinmiş ve teknolojinin öğrenmeye olan etkisine yönelik bilgisinin olduğunu gösterek TPB'si hakında kanıt sunmuştur. Ö2 bunu kendi cümleleri ile şu şekilde ifade etmiştir:

> *"Yine her açı değeri için 1. bölgede sinüs ve kosinüsün daima 0'dan büyük olduğunu, 2. bölgede yine her açı değeri için sinüsün küçüldüğünü ama 0'dan büyük olduğunu, kosinüsün de negatif olduğunu,3. bölgede her ikisinin negatif, 4. bölge için kosinüsün büyüdüğünü ve pozitif olarak büyüdüğünü, sinüsün de küçüldüğünü ama zaten negatif olduğunu burada yine açıdan ve sürgü yardımıyla görebiliyoruz. Bunu tahtada gösterebiliriz eğer sadece işaretini inceliyorsak. 1. bölgede iki tane alfa açısı alırım rastgele. 2. bölgede alırım, 3'te alırım. Bunu gösterebilirim ama burada her açıyı çok rahat bir şekilde görebiliyoruz. "*

Ö2 bir başka etkinliğinde de benzer bir yorumda bulunmuştur. Sürgünün aralık değerini artırıp -1000º'den +1080º'ye olacak şekilde ayarlayarak, daha fazla açı değeri için

trigonometrik fonksiyonların tanımının ve grafiğinin incelenmesini sağlayacağını belirtmiştir. Ö2'nin bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Tabi ki, zaten'nın dinamiklik özelliğinden faydalanarak sürgüye çok büyük sayılar... Şu anda bile verdiğimiz -1000º'den +1080º'ye kadar, 2080 farklı açı değeri için inceleme yapıyoruz. Bu daha da büyültülebilir ya da küçültülebilir. GeoGebranın sürgü özelliğinden ve dinamiklik özelliğinden yararlanarak bunu çok faydalı bir şekilde kullanabiliriz diyorum."*

Katılımcı Ö3 ise farklı açı değerleri için trigonometrik fonksiyonları, tek tek beyaz tahtaya yazarak göstermektense, GeoGebra yazılımı ile sürgünün dinamiklik özelliği sayesinde çok farklı açı değerleri için trigonometrik fonksiyonun aldıkları değerleri öğrencilerin gözlemlemelerini sağlamanın trigonometri öğrenimi için daha etkili olacağını söylemiştir. Burada Ö3, katılımcı Ö1 ve Ö2'ye benzer şekilde teknoloji ve teknolojik araçların trigonometri öğretimine olan etkisini bildiğini göstererek TPS'sine yönelik kanıt sunmuştur. Ayrıca Ö3, teknolojiyi kullanırken matematiksel verileri tablo ile sunmayı düşündüğü belirterek teknolojinin materyallerle desteklenmesinin matematik öğretimine katkısı olabileceğini de belirtmiştir. Ek olarak Ö3'ün *"Öğrencinin düzeyine, öğrenciye okulunda daha önce anlatılan öğretim sistemlerine göre değişir bu tercihim. Kesin şunu yaparım, kesin bunu yaparım diyemem. Tamamen öğrenci odaklı buradaki kararım."* ifadeleri, trigonometri öğretiminde teknoloji kullanımı konusunda pedagojik ögeler barındırmakta ve TPB'sini destekler niteliktedir. Ö3 bunu kendi cümleleri ile şu şekilde ifade etmiştir:

> *"GeoGebrayı en çok tercih etme sebeplerimden birisi dinamiklik. Bu kadar şeyi, şuradaki değişimi ben sadece tahtaya yazarak gösteremem. Sadece bununla çocuğu aktarabilir miyim? Bence sadece bununla da aktaramam. Dediğim gibi yan tarafta bir tablo da olabilir. Hatta o tabloyu ben yan yana burada da oluşturabilirim. Yine bir tane metin seçip; sinüsleri oluşturup, atıyorum birkaç tane açı seçerim; 46º, 47º, α, ß, θ gibi birkaç tane açı seçip yan tarafa ben de oluşturabilirim… Öğrencinin düzeyine, öğrenciye okulunda daha önce anlatılan öğretim sistemlerine göre bu tercihim değişir. Kesin şunu yaparım, kesin bunu yaparım diyemem. Tamamen öğrenci odaklı buradaki kararım ama esneğim o konuda.*

4.5.5. Motive Etme

Katılımcı Ö2 GeoGebra yazılımını kullanmanın öğrenciyi derse motive edebileceğini, dersi daha zevkli hale getirebileceğini söylemiştir. Bununla ilgili olarak Ö2 GeoGebra yazılımı

sayesinde öğrencilerin derse daha aktif katılabileceklerini, imkanlar doğrultusunda ders dışında da öğrencilerin etkinlikleri inceleyip dersten önce konu ile ilgili fikir sahibi olabileceğini belirtmiş. Ayrıca Ö2 sadece GeoGebra için değil akıllı tahta kullanımı gibi genel olarak derslerde teknolojini kullanımının öğrencilerinin motivasyonunu artırabileceğini ifade etmiştir. Bu şekilde öğrencilerin ilgilerini çekerek dersi daha ilgili çekici, zevkli hale getirebileceğini yani trigonometri öğretiminde teknoloji kullanımının öğretimi nasıl değitriebileceğini bildiği, TPB'si hakkında kanıt sunduğu görülmüştür. Ö2'nin bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Trigonometrideki birim çember gibi ya da geometrideki diğer alanlarda özellikle GeoGebranın kullanılabileceğini ve öğrenci için derse daha çok katılabileceklerini, aynı zamanda böyle bir etkinliği öğrencilere attığımızda bilgisayarları olanlar için tabi şu anda hiçbir öğrencinin de ekonomik durumunu bilmiyoruz. Kendisi evde sürgüyü oynayarak inceleme yapabileceğini hani kitaptan bunun çalışın yerine bakın bakalım ne olmuş ne değişmiş. Böyle bir bakmalarının daha onlar için zevkli hale getirebileceğini de düşünüyorum açıkçası… Konudan bağımsız, trigonometri özelinde değil teknolojinin öğrencinin ilgi ve motivasyonunu artırdığını düşünüyorum. Bir tek GeoGebranın değil, akıllı tahtanın kullanılmasını kesinlikle düşünüyorum."*

Özet olarak bakıldığında Ö1, zaman tasarrufu, anlamlı öğrenme, kalıcı öğrenmeyi destekleme ve daha fazla sayıda örnek verme başlıklarına dair örnekler sunarak teknolojinin trigonometri öğretimine olan etkilerini ve öğretimi nasıl değiştirebileceğini bildiği dolayısı ile TPB'sinin kapsamlı olduğunu görülmüştür. Katılımcı Ö2'nin zaman tasarrufu, anlamlı öğrenme, daha fazla sayıda örnek verme başlıkları ve Ö1'den farklı olarak motive etme başlığı ile ilgili; katılımcı Ö3'ün ise, anlamlı öğrenme, kalıcı öğrenmeyi destekleme ve daha fazla sayıda örnek verme başlıklarına dair örnekler sunduğu görülmüştür. Ancak katılımcı Ö2 ve Ö3'ün PB'sinde eksiklikler olması nedeni ile TB'si ile etkili şekilde birleştiremediği dolayısı ile TPB'sinin Ö1 kadar kapsamlı olmadığı görülmüştür. Katılımcı Ö4'ün ise sadece kalıcı öğrenmeyi destekleme başlığına dair söylemde bulunması ve söylemlerinin daha çok yüzeysel olması TPB'sinin diğer katılımcılar kadar kapsamlı olmadığını göstermektedir.

4.6.Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi (TPAB)

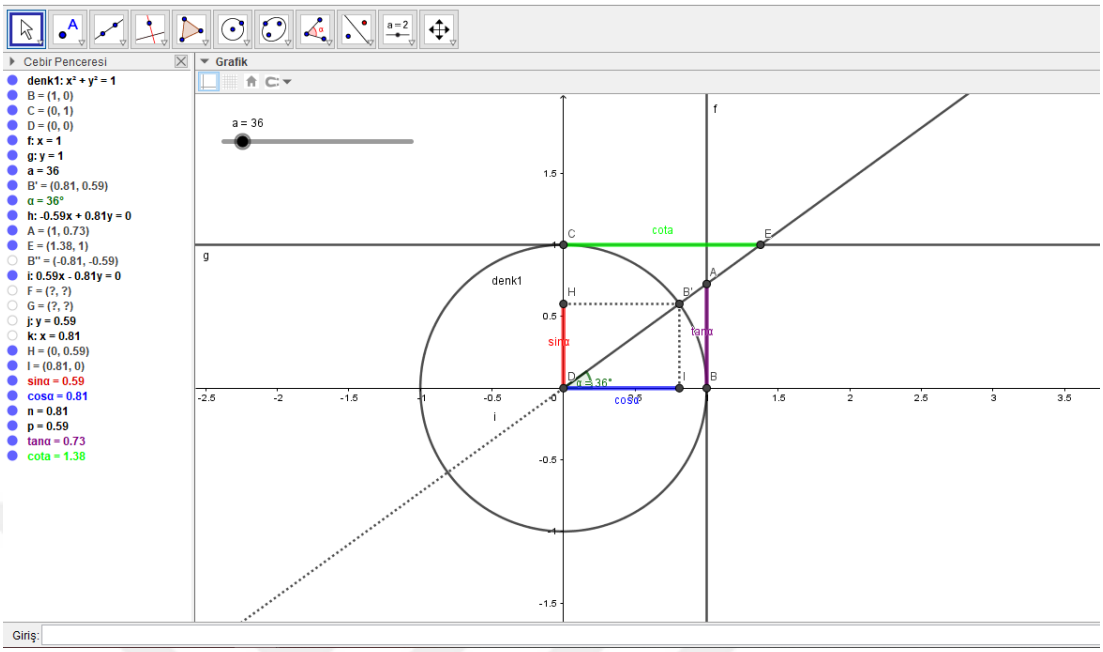
Bu bilgi türünde lisansüstü öğrencilerin GeoGebra yazılımını kullanarak trigonometri konusunu öğretme ve öğrenme sürecine dahil etme durumları ve buna yönelik söylemleri incelenmiştir. Bu bağlamda katılımcılardan sırasıyla GeoGebra yazılımını kullanarak trigonometrik fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonların işaretleri, trigonometrik

fonksiyonların karşılaştırılması, trigonometrik özdeşlikler, trigonometrik fonksiyonların periyotları ve trigonometrik fonksiyonların grafikleri konuları özelinde oluşturdukları etkinlikleri trigonometri öğretiminde nasıl uygulamayı planladıkları açıklamaları istenmiştir.

4.6.1. Katılımcı Ö1'in TPAB'ı

Ö1'in trigonometri konusunda TPAB'ını incelemek amacıyla trigonometrik fonksiyonların öğretimi ile ilgili oluşturduğu etkinliği nasıl uygulamayı planladığı sorulmuştur. Ö1 etkinliğin sınıf içerisinde farklı şekilde uygulamalarına örnekler vermiştir. Örnek olarak, Ö1 TAB bölümünde bahsedildiği gibi Şekil 116'da bulunan sürgüyü sürükleyerek açı değiştikçe trigonometrik fonksiyonların birim çember üzerindeki tanımlı olan yerlerini, işaretlerini, hareketlerini göstermiş ve öğrencilerden trigonometrik fonksiyonların hareketlerindeki değişim ile ilgili düşüncelerini paylaşmalarını isteyerek bunları not ettirmeyi planlamıştır. Ayrıca etkinliğe işaret kutuları eklemiş ve bu işaret kutularının öğrenci tarafından nasıl kullanılacağına değinerek etkinliğin dersi öğrenci merkezli hale getirerek de uygulanabileceğini göstermiş, pedagojik tekniklerle birleştirmiştir. Benimsenen kavramsal çerçeveye göre Ö1'in etkinliğin farklı uygulamalarına değinmesi, not ettirme stratejisine yer vermesi TAB'ını PB'si ile birleştirdiğini göstermektedir. Daha detaylı ele almak gerekirse Ö1 bu süreci aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

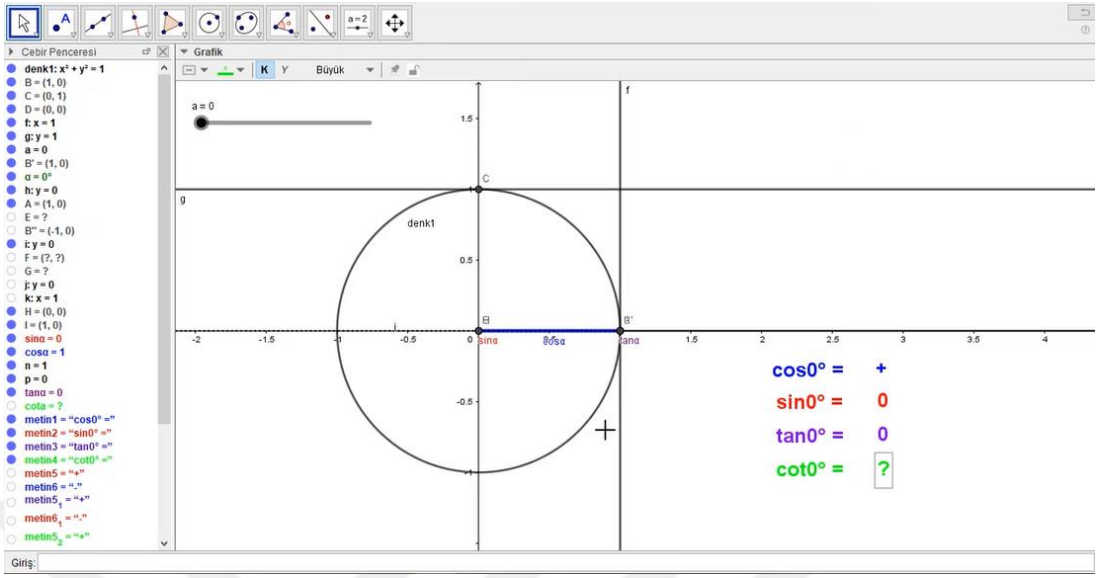
> *"Fonksiyonların yaptıkları hareketleri öğrencilere hissettirmek için mesela bunu kullanmak isteyebilirim. Örneğin 0^o ile 90^o arasında α açısı artarken, tanjant büyüyor, kotanjant küçülüyor, kosinüs küçülüyor, sinüs büyüyor. Öğrenci bunu çok güzel bir şekilde görebilir bunu… Hani sadece tahtada benim açıp oynamamdan ziyade bunu öğrencilerle paylaşabilirim. Tabi biraz daha etkileşimli hale getirilebilir. Mesela yan tarafa sinüs kosinüs tanjant ve kotanjant işaret kutucukları konur işte. Onu yaptıktan sonra öğrenci sinüse tıklar sadece ekranda sinüsle ilgili şeyler olur. Sadece sinüsü inceler. Bakar şöyle bir nerede artıyor, nerede azalıyor nerede pozitif nerede negatif… Öğrencilere de tahtada eğer kendim açıp uygulayacaksam sürgüyü oynattıkça nelerin değiştiğini not almalarını isterim. Burada alınabilecek bayağı bir sonuç var. Belki bu eğlenceli bir şeye de dönüşebilir, öğrencilerin verdiği cevaplarla puan kazanılabilir mesela o tarz bir oyun bile oynanabilir."*



Şekil 116. Ö1'in trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-4

Ö1'e trigonometrik fonksiyonların işaretlerinin öğretimi için oluşturduğu etkinliği nasıl uygulamayı planladığı sorulduğunda, öncelikle trigonometrik fonksiyonların aldığı değerlerle ilgili öğrencilerin dikkatini çekmeyi hedeflediği ve soru-cevap tekniğini kullanmayı planladığı görülmüştür. Örneğin, Ö1 Şekil 117'de bulunan sürgüyü 0º'ye sürükleyerek etkinlikte verilen metin kutularında trigonometrik fonksiyonların Şekil 118'de görüldüğü gibi "0" ve "?" değerlerini aldığı bölümler için öğrencilere *"Bunlar size ne anlam ifade ediyor?"* gibi sorularla öğrencilerin dikkatini çekerek cevap teknikleri kullandığı görülmüştür. Ayrıca öğrencilerden gelen cevapları (Örnek olarak: Hocam bu niye soru işareti oluyor? Sonsuz değil mi?) göz önünde bulundurmuş ve böylece sınıfta bir tartışma ortamı oluşturmayı hedefleyerek pedagojik tekniklerle birleştirmiştir. Ö1 teknoloji, pedagoji ve alan bilgilerini birleştirerek TPAB'ını kullanabildiğini göstermiştir. Ö1 bu süreci kendi cümleleri ile aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

> *"Daha çok orada sorular sorup burada cevaplandırmak üzerine yol izlerdim. Ama tabi burada da sorulabilecek sorular var. Mesela bunlar 0 değeri alıyor, kotanjant soru işaretini alıyor neden böyle olduğunu öğrencilere sorardım. Bunlar size ne anlamı ifade ediyor? Sence bu etkinlikte neden böyle bir şey var? Tarzında kafalarını gıdıklamak isterdim… Mesela '?' ve '0' ları soranlar olacaktır mutlaka. Hocam bu niye soru işareti oluyor, sonsuz değil mi tarzı sorular gelecektir. Onları öğrencilerle tartışmak isterdim. Başka arkadaşlarına yönlendirirdim önce ardından gelen cevaplarla ben de bir açıklama getirdim."*



Şekil 117. Ö1'in trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-5

Ö1'in teknolojiyi kullanarak sınıfta oluşturmayı planladığı tartışma ortamı öğrencilerin konu ile ilgili düşünmelerini dolayısı ile matematiksel bilginin öğrenilmesine ve akılda kalıcı olmasına katkı sağladığını ifade etmesi PB'sini TB'si ile birleştirerek TPB'sine yönelik kanıt sunmuştur. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların işaretlerinin öğretimini planladığı derste, öğrencilerin dikkatini çekmeyi hedefleyerek soru-cevap tekniğine yer vermesi TAB'ını PB'si ile birleştirebildiğini ayrıca teknolojiyi kullanarak tartışma ortamı oluşturmayı hedeflemesi, TPB'sini AB'si ile birleştirebildiğini göstermektedir. Ö1'in bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

> *"Yani tartışmak iyidir, hem akılda kalıcılığı arttırır mesela şunu söylemişti bu bunu söylemişti diye öğrencilerin akıllarında kalabilir bilgiler. Ayrıca karşıdakini çürütmek için düşünmek gerekebilir. Bu düşünme sürecinde de öğrenme gerçekleşir."*

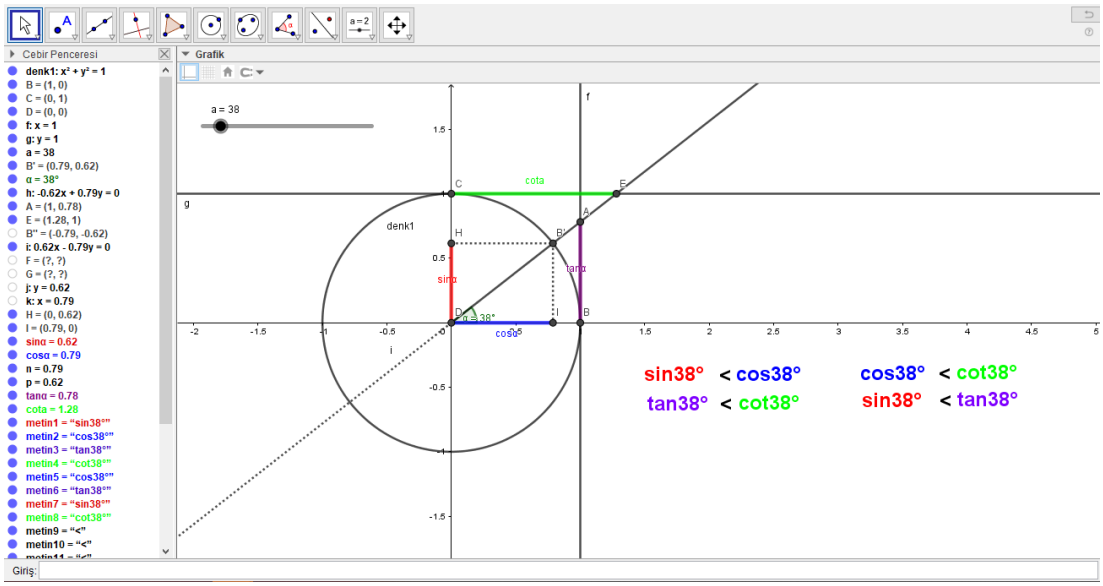
Ö1 Şekil 118'de verilen etkinliğinde trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması ile ilgili matematiksel bilgilerin görselleştirilerek gözlemlenmesini ve daha güçlü inşa edilmesini hedeflemiştir. Ö1'in, Şekil 118'de bulunan sürgüyü 36º'ye sürükleyerek, öğrencilerden oluşan açının trigonometrik değerlerini karşılaştırmaya yönelik fikir yürüterek düşüncelerini paylaşmalarını isteyeceği görülmüştür. Bununla birlikte Ö1'in öğrencilerden gelebilecek cevapları göz önünde bulundurarak (Örnek olarak: Mesela birisi derdi ki işte birinci bölgede sinüs her zaman tanjanttan küçüktür tarzı bir yorumda bulunabilir) ve öğrencilere ne gibi

cevaplar verebileceğini planladığını göstererek PB'sini, TB ve AB'si ile birleştirebildiği gözlemlenmiştir. Ö1'in buna yönelik söylemi aşağıdaki gibidir:

> *"Bunu da şöyle kullanırdım, öğrencilerin öncelikle bir fonksiyonlar arasındaki büyüklüklerine dair yorumlar isterdim. Ardından bu etkinlik üzerinde de doğrulamalar yapardım. Mesela birisi derdi ki işte birinci bölgede sinüs her zaman tanjanttan küçüktür tarzı bir yorumda bulunabilir ya da işte kosinüs şu aralıkta sinüsten büyük şurada sinüsten küçük şeklinde yorumlar yapardı. Ben de onları doğrulardım ya da yanlışlardım etkinlikler üzerinde."*

Ayrıca Ö1, öğrencilerin trigonometrik fonksiyonlarda karşılaştırma konusunu öğrenebilmeleri için öncelikle trigonometrik fonksiyonların birim çember üzerindeki tanımlarına yönelik bilgilerinin tam olması olması gerektiğini belirterek öğrencilerin ön öğrenmelerinin de önemine değinerek PB'sini, TB ve AB'si ile birleştirmiş ve TPAB'ını kullandığını göstermiştir. Ö1'in bununla ilgili söylemi aşağıdaki gibidir:

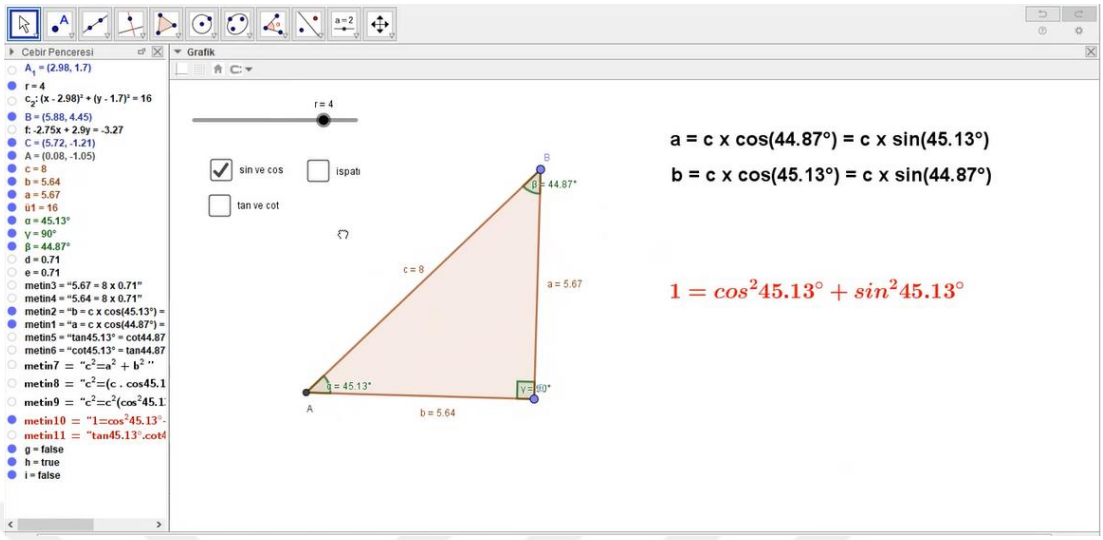
> *"Eğer sinüs kosinüs tanjant ve kotanjantı tam olarak anlamlandıramadıysa bu etkinlikten çok da bir şey anlayacağını düşünmüyorum. Çünkü tanjant neden burada kotanjant neden burada bir anlam ifade etmez ona. Ama eğer ona hâkim olduysa herhalde bir zorluk yaşamazlar diye düşünüyorum."*



Şekil 118. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların işaretleri etkinliği ekran görüntüsü-3

Ö1 trigonometrik özdeşlikler konusu özelinde hazırladığı etkinliklerden 2. sini (Bknz. Şekil 119) açı değişse de özdeşliğin her zaman geçerli olduğunun gözlenmesini sağlamak amacıyla oluşturmuştur. Ö1, ilk olarak Şekil 119'daki sürgüyü verilen aralıkta sürükleyerek, etkinlikte verilen ifadelerin her zaman geçerli olup olmadığı konusunda öğrencilerin dikkatlerini çekerek, düşünmelerini sağlamayı planlamıştır. Ö1, etkinliğin uygulanmasına yönelik söylemlerini detaylandırarak, TAB bölümünde de bahsedildiği gibi Şekil 119'da bulunan sin ve cos düğmesi ile ispat düğmesinde yazılanları açmış ve sürgüyü verilen değer aralığında sürükleyerek, verilen ifadelerin öğrenciler tarafından gözlemlenmesini sağlamayı hedeflemiştir. Aynı zamanda öğrencilerin düşüncelerini paylaşmalarını isteyerek pedagoji bilgisi ile birleştirmiştir. Ö1'in benzer eylemleri tan ve cot düğmesine tıklayarak da gerçekleştirdiği ve TAB'ını kullanarak etkinlikte özdeşliklerin ispatına yönelik açıklamalarda bulunduğu görülmüştür. Benimsenen çerçeveye göre Ö1'in etkinliğin uygulanma süreçlerine yönelik söylemleri, PB'si ile TAB'ını birleştirebildiğini göstermektedir. Bu süreci daha detaylı şekilde ele almak gerekirse, Ö1, bu süreci aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

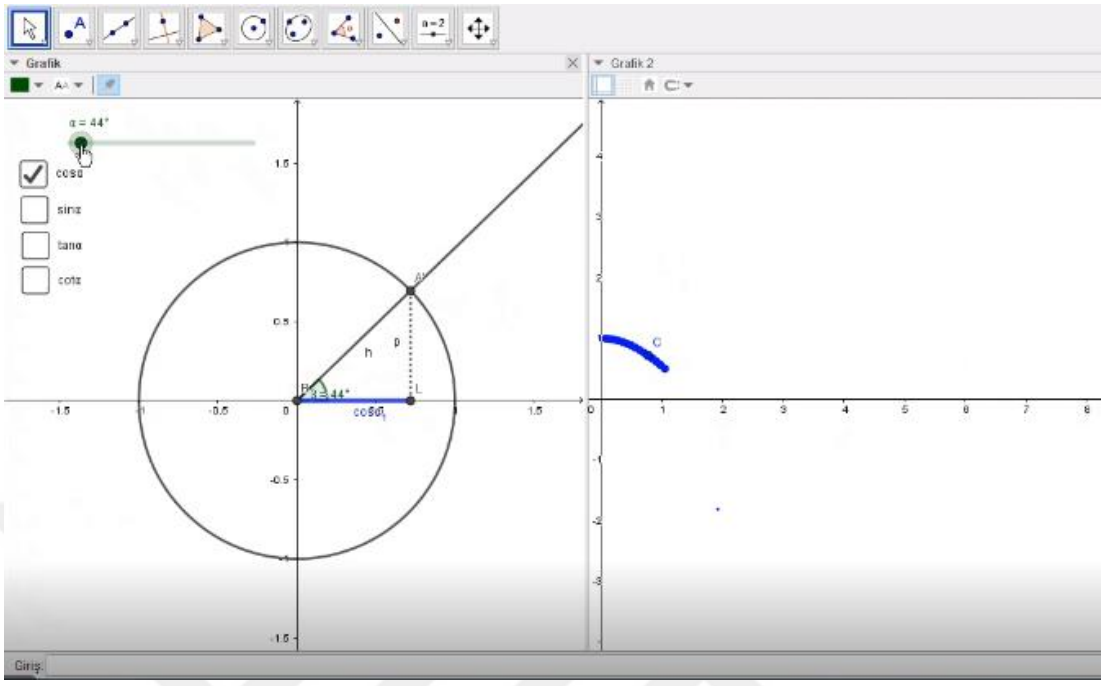
> *"Öğrencilere bu kırmızı ile gösterilen durumların her zaman sağlanıp sağlanmadığını sorarım ilk başta. Hayır diyen olursa nedenlerini açıklamasını isterim, evet diyen olursa da doğrulamasını isterim… İlk başta sinüs ve kosinüsün, hipotenüsün bu kenarları göstermede trigonometrik fonksiyonlar yardımıyla kullanılabildiğinden bahsederim. Ardından bu özdeşlikten bahsederim. İspatına basıldığında burada basitçe ispatımız var. Ve bu şekilde yapıldığından bahsedebilirim. Ardından tanjant ve kotanjantla ilgili tanjantın ve kotanjantın tanımlarından dolayı böyle a/b şeklinde bu üçgende tanımlandığını ya da b/a şeklinde seçtiğimiz açıya göre değişiyor. Bu tanımdan dolayı da doğal bir sonuç olarak da tanα ile cotα'nın çarpımının 1'e eşit olduğunu ifade ederim."*



Şekil 119. Ö1'in trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü-3

Ö1 trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin öğretimine yönelik planında ilk olarak öğrencilerden var olan bilgilerini kullanarak trigonometrik fonksiyonların grafiklerini oluşturmalarını amaçlamıştır. Ardından oluşturduğu etkinlik ile devam ederek TAB bölümünde de bahsedildiği gibi Şekil 120'de görülen sürgüyü 0º'ye sürükleyerek cos0º'ın 1 olduğunu, ardından sürgüyü verilen değer aralığında sürükleyerek cosx fonksiyonunun aldığı değerleri grafik 2 üzerinde göstererek açıklamış ve grafik 1 ile grafik 2 pencerelerinde verilen birim çember ile trigonometrik fonksiyonun grafiğinin ilişkisinin öğrenciler tarafından gözlenmesini sağlamayı hedeflediğini belirtmiştir. Ö1 bu süreci kendi cümleleri ile aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

> *"Öğrencilerin fonksiyonların grafiklerini öğrencilerin bir oluşturmalarını isterim, kendi başına denemelerini yapmalarını istedim. Kendileri bunlara yakın şeyler yapacaklarını belki tanjant ve kotanjant da zorlanabilirler ama bir şeyler deneyeceklerdir yanlışta olsa. Ardından bu fonksiyonları tek tek uygulama üzerinde gösterip tabi böyle akıcı olarak değil de yavaş yavaş vurgulayarak farklılıkları göstererek yavaş yavaş gösterip bir anlatım yaparım. Örneğin şuan ben α'mın 0° olduğunu biliyorum diye vurgulayıp kosinüsün 1 olduğunu göstererek ardından 45°'ye çekip $\sqrt{2}/2$ yaklaşık buralarda bir yerlerde. α=45° iken kosinüs değerim buraya geliyor. α=90°'ye geldiğinde cos0° oluyor diyerek bir anlatım tercih ederim. Bütün fonksiyonlar için. Önce öğrenciler bir denerler ardından bu grafik bu etkinlik üzerinde bir uygulamasını yapmış oluruz."*



Şekil 120. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü

Ö1 bu konudaki söylemlerini pedagojik açıdan detaylandırarak, öğrencilerin grafik 1 ve grafik 2 pencerelerinde eş zamanlı olarak hareket eden birim çember ve grafiklerin farklı şekilde hareket etmesi nedeniyle, konuyu anlamakta zorluk çeken öğrencilerin olabileceğine de değinmiştir. Bunun için ise Şekil 120'de bulunan cosα grafiği örneğinde de bahsedildiği gibi her bir trigonometrik fonksiyonun grafiğini ayrı ayrı ele alarak, sürgüyü sürüklediğinde çember üzerinde verilen açı değeri ile trigonometrik fonksiyonun aldığı değere vurgu yaparak konuya açıklık getirmiştir. Dolayısı ile Ö1'in TAB'ını ve PB'sini kullanarak öğretime yönelik yaptığı açıklamalar TPAB'ını kullanabildiğini göstermektedir. Ö1'in bununla ilgili söylemi aşağıdaki gibidir:

> *"Neyi anlamayabilirler, belki şu anda açı saat yönünün tersine gidiyor ama benim sağa taraftaki grafiğimde noktam sağa doğru ilerliyor. Aslında burada iki farklı yöne hareket varmış gibi göründü belki bu kafa karıştırıcı olabilir. Ama işte burada noktanın yerine değil de yapılan açıya ve kosinüsün aldığı değeri bakmayı vurgularsam açıklayıcı olacaktır diye düşünüyorum."*

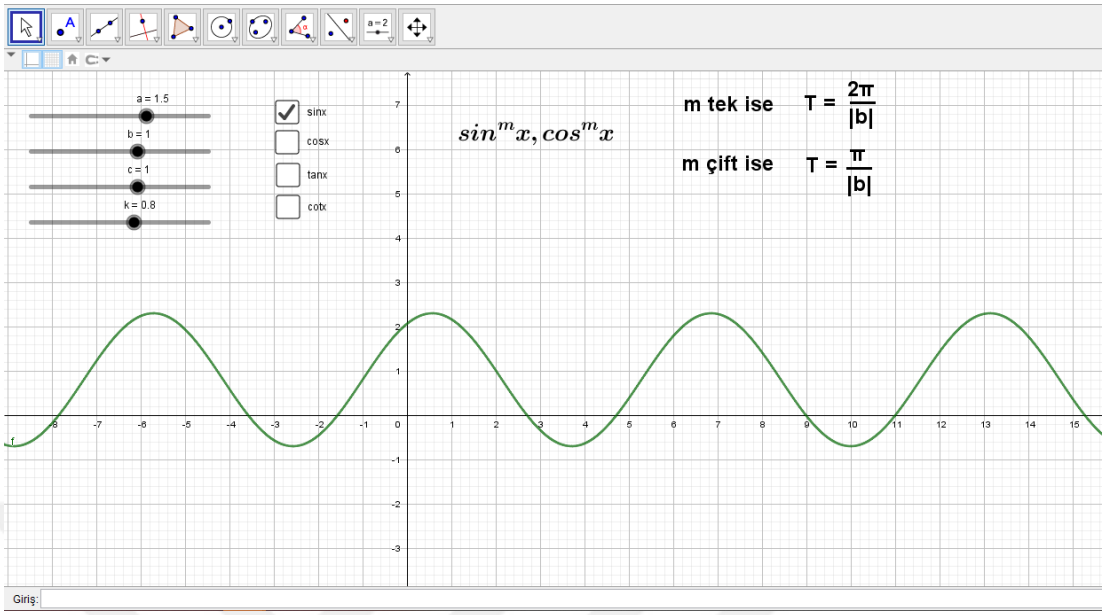
Ayrıca Ö1 GeoGebra yazılımının renk özelliğini kullanarak açı değeri değiştikçe grafik 1 ve grafik 2 pencerelerindeki trigonometrik fonksiyonların hareketlerinin eş zamanlı olarak daha iyi gözlemlenmesine ve konunun anlaşılır olmasına dikkat ederek, pedagoji ve teknoloji bilgilerini birleştirerek, TPB'sine yönelik de kanıt sunmuştur (Bknz. Şekil 120).

Dolayısıyla Ö1'in AB'sini TPB'sine entegre ederek, TPAB'ının kapsamlı olduğu tespit edilmiştir. Ö1'in bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Yani ikisinin eşzamanlı olarak gösterilmesine dikkat ettim. Yani kosinüs burada bir hareket yapıyorsa onun grafikte görünmesini istedim. Benim için buna başlama sebebim buydu. Yine renklendirmelere dikkat ettim renklerin aynı olmasına dikkat ederek anlamayı daha kolay kolaylaştıracağını düşündüm."*

Ö1'in trigonometrik fonksiyonların periyotlarının öğretimine yönelik planında ise ilk olarak periyot kavramını açıklayıp, periyot ile ilgili günlük hayattan örnekler verdikten sonra oluşturduğu trigonometrik fonksiyonların periyot etkinliğine geçeceği görülmüştür. Etkinliğin uygulanması aşamasında, Şekil 121'de bulunan sürgüyü sırasıyla verilen değer aralığında sürükleyerek, asin(bx+c)+k şeklindeki trigonometrik fonksiyonların a,b,c, ve k kat sayılarının grafiğe etkisini öğrencilerin gözlemlemesini sağlamayı hedeflemiştir. Aynı zamanda öğrencilere verilen sürgülerden hangilerinin trigonometrik fonksiyonunun periyoduna etki ettiği ile ilgili sorular yönelterek düşüncelerini paylaşmalarını isteyecektir. Etkinliğin devamında, öğrencilerle birlikte etkinlikte verilen trigonometrik fonksiyonların periyot hesabı formülünü kullanarak farklı trigonometrik fonksiyonların periyotlarını da hesaplamayı planlamıştır. Bu noktada Ö1'in teknolojik araçlar ile pedagojik yöntemlerden faydalanarak etkinliğin tasarlanması ve öğretimde nasıl kullanılacağı konusunda TPAB'ının kapsamlı olduğu tespit edilmiştir. Daha detaylı ele almak gerekirse Ö1 bu süreci kendi cümleleri ile aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

> *"Periyodun ne olduğunu ilk önce tanımlayıp sonra periyodun ardından belki periyodik fonksiyon örneği de verebilirim ya da bir periyodik hareket örneği verebilirim, günlük hayattan bile olabilir. Ardından bu etkinliği açıp sinüs ile kosinüs grafiğini biliyor olacaklar zaten bu etkinliğe geçildiğinde. İlk başta şöyle bildiğimiz sinx üzerinden çeşitli oynamalarla periyodun nasıl değiştiğini gösteririm bu şekilde. Şimdi baktığın zaman burada a değerini arttırıp azaltıyorum. Bu da benim sinüsümün boyunun uzamasına yani aldığı değerlerin aralığının değişmesine sebep oluyor. b değerini oynattığım zaman o daralma ve genişleme hareketini yapıyor. c'yi değiştirdiğim zaman öteleme hareketi yapıyor x ekseni üzerinde. k'yı değiştirdiğim zaman ise y eksenine paralel olacak şekilde öteleme hareketi yapıyor. Bunlardan hangilerinin periyodu etkilediğini sorarım öğrencilere. Sonrasında da periyodu nasıl hesaplayacağımızı artık formül yardımı ile isterim."*

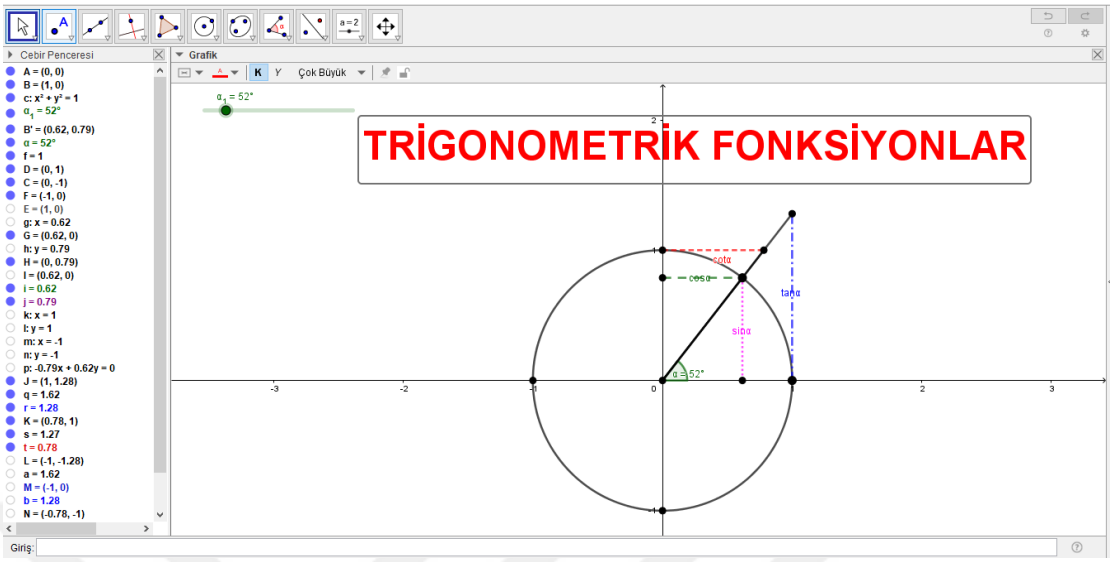


Şekil 121. Ö1'in trigonometrik fonksiyonların periyotları etkinliği ekran görüntüsü-3

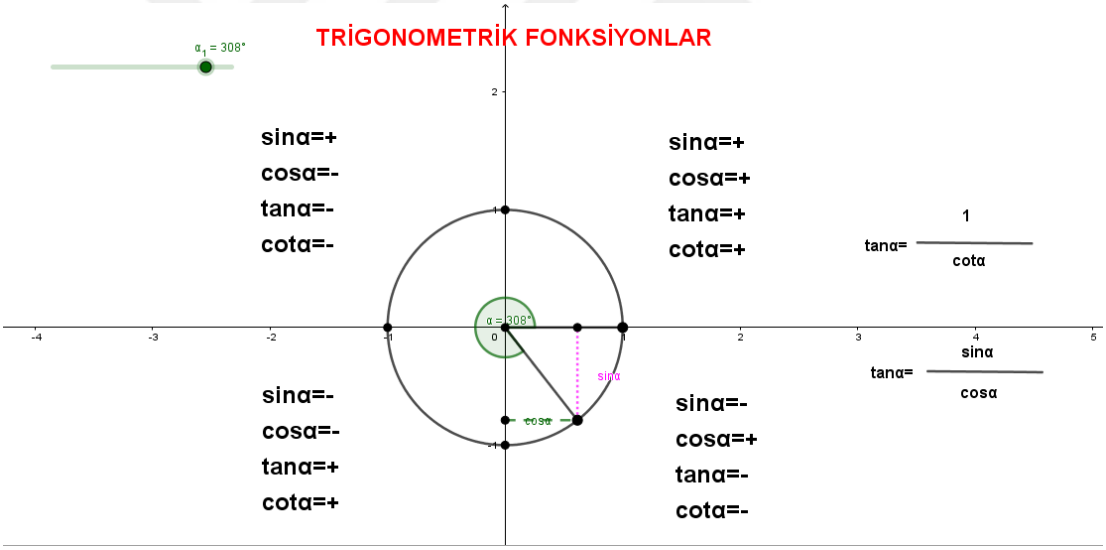
Özet olarak bakıldığında, katılımcı Ö1'in trigonometri konuları özelinde, teknolojiyi konuya kolaylıkla entegre edebildiği gözlemlenmiştir. Trigonometri konularına teknolojiyi nasıl entegre ettiğini ve entegre ettiği noktaları da ayrıntılı bir şekilde açıklamıştır. Ö1'in oluşturduğu etkinlikleri nasıl uygulamayı planladığı konusundaki açıklamalarında; öğrencilere yönelteceği sorulara, öğrencilerden gelebilecek ve öğrencilere vereceği cevaplara değinerek ve öğretime yönelik pedagojik tekniklere yer vererek PB'sini AB ve TB'si ile etkili şekilde birleştirmiştir. Bu nedenle de Ö1'in TPAB'ının kapsamlı olduğu tespit edilmiştir.

4.6.2. Katılımcı Ö2'nin TPAB'ı

Ö2'nin trigonometri konusunda TPAB'ını incelemek amacıyla trigonometrik fonksiyonların öğretimi ile ilgili oluşturduğu etkinliği nasıl uygulamayı planladığı sorulmuştur. Ö2 Şekil 122'de verilen etkinliğini, trigonometrik fonksiyonların tanımları, işaretleri ve karşılaştırılmasının öğretiminde uygulamayı planladığı, Şekil 123'te verilen trigonometrik fonksiyonlarının işaretleri konusunda oluşturduğu etkinliğini ise kullanmayacağı görülmüştür. Bunun sebebi, TAB bölümünde de bahsedildiği gibi Ö2'nin, Geogera yazılımının metin aracını birim çember ile etkileşimli şekilde kullanmadan bir etkinlik oluşturarak trigonometrik fonksiyonların işaretlerini vermesidir.



Şekil 122. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-3



Şekil 123. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların işaretleri etkinliği ekran görüntüsü-2

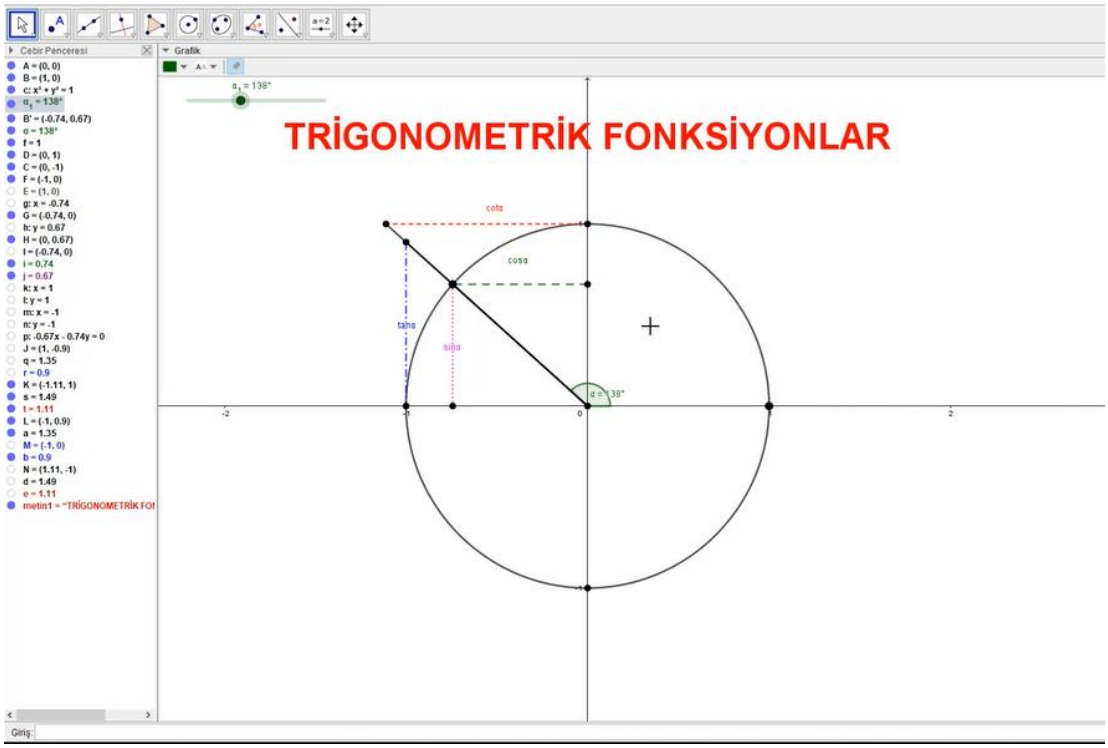
Katılımcı Ö2, Şekil 120'de verilen etkinliğini trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması konusunun öğretiminde uygularken öğrencilere sayısal örnekler üzerinden soru sorarak trigonometrik fonksiyonları kıyaslatmayı planlamıştır. Örnek olarak, Ö2 sürgüyü 30º'ye sürükleyerek öğrencilere *"Sin30° mi büyük tan30° mi?"* gibi sorular yönelterek, öğrencilerden düşüncelerini paylaşmalarını isteyecektir. Daha detaylı şekilde ele alırsak Ö2 bu süreci kendi cümleleri ile aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

> *"İşte 30° yapalım mesela bilindik bir açı şu anda. Burada sin30° mi büyük tan30° mi? Bunu öğrencilere sorabiliriz. Öğrenci burada aynı ikisi de birbirine paralel tabi ki. İkisi de P*

doğrusundan x eksenine dik uzaklık yapılarak elde ediliyor. Thales teoreminden de düşündüğümüzde tanjantın daha büyük olacağını görecek. Yine aynı mantıkla kosinüs mü kotanjant mı dediğimizde buradan kotanjantın daha büyük olduğunu görecek 30º için öğrenci… Bu gibi karşılaştırmalar kısmında öğrencilere kullandırabiliriz diye düşünüyorum."

Etkinliğin devamında, Ö2'nin 2. bölgedeki bir açı için trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılmasını öğrencilere nasıl öğreteceğini açıklayamadığı görülmüştür. Örnek olarak, Ö2 Şekil 124'te bulunan sürgüyü 138º'ye sürüklemiş ancak tan128 ile sin128 trigonometrik değerlerinin 2. Bölgede işaretlerinin farklı olmasını, yazılımı kullanarak öğrencilere nasıl aktaracağını bilmediği görülmüştür. Bununla ilgili olarak Ö2'nin "*Birim çemberi ya da GeoGebrayı kullanmadan anlatmam gerekiyor. Dolayısıyla buna nasıl bir çözüm getirmemiz gerekiyor? Onu çok bilmiyorum açıkçası."* ifadeleri Ö2'nin PB'si ile AB ve TB'sini etkili şekilde birleştiremediğini göstermiştir. Ö2'nin bununla ilgili söylemi aşağıda verilmiştir:

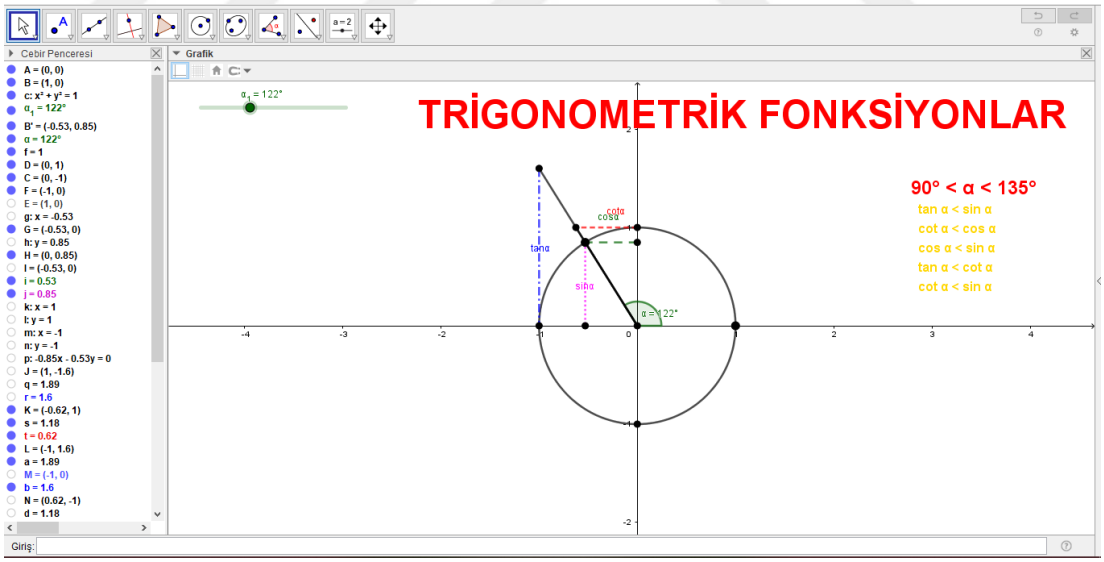
"İşte 138º burada tanjant mı büyük sinüs mü? Şimdi öğrenci buna bakıyor; hocam tanjant büyük. Neden? 1. bölgede aynı şey demiştiniz, hani Thales teoremi, tanjant büyük. Ama burada da işte… Bunu öncesinde birim çemberi ya da GeoGebrayı kullanmadan anlatmam gerekiyor. 2. bölgede sinüs pozitif ama tanjant negatif. Dolayısıyla bu şekil bu sefer seni yanıltıyor. Dolayısıyla buna nasıl bir çözüm getirmemiz gerekiyor? Onu çok bilmiyorum açıkçası."



Şekil 124. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-4

Ö2, Şekil 125'te bulunan trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliğini ise verilen bir açının trigonometrik değerinin, dar açı cinsinden yazılması konusunu öğrencilere kavrattıktan sonra konunun görselleştirilmesini sağlamak amacıyla kullanmayı düşündüğü görülmüştür. Örnek olarak, Şekil 128'deki sürgüyü 122º'ye sürükledikten sonra, sin122º'nin dar açı cinsinden eşitinin sin58º olduğunu belirtmiş ve etkinlik üzerinde göstermiştir. Ancak Ö2 her ne kadar öğretime yönelik yapacaklarından bahsetse de bu söylemlerini detaylandıramamış dolayısıyla trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması konusu özelinde TAB'ı kapsamlı olmasına rağmen, PB'sindeki eksiklik nedeni ile PB'sini TAB'ına etkili şekilde entegre edemediği görülmüştür. Ö2'nin bununla ilgili söylemi aşağıdaki gibidir:

> *"1. bölgeye indirmeyi gördükten sonra hani bu örnekler yapıldıktan ya da gösterildikten sonra bir GeoGebra üzerinde de bunun bir karşılaştırması, görselleştirilmesi olarak gösterilebilir diye düşünüyorum. 2, 3 ve 4. bölge için de açıkçası burada uzunluktan yola çıkmak yerine ben dediğim gibi burada 122º'nin atıyorum, ne olsun, sin122º'nin sin(180-58)º olduğundan yola çıkarak sin58º'nin ne olduğuna bakabilir. cos58º keza bakabilir. Ama tabi ki burada yapılması gereken sonrasında işaret eklemesidir. 2. bölgede eksi olduğu için. Bu şekilde anlatırım diye düşünüyorum."*



Şekil 125. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü-4

Bununla birlikte Ö2, bir açının trigonometrik değerininin, dar açı cinsinden yazılması konusunda öğrencilerin trigonometrik değerin işaretini belirleme özelinde zorluk yaşayabileceğini belirtmiştir. Ancak Ö2'nin trigonometri öğretimi ilgili herhangi bir tecrübesinin olmaması nedeniyle, bu zorluğu nasıl gidereceği hakkında fikrinin olmadığı görülmüştür. Ö2'nin bahsedildiği gibi PAB'ındaki eksiklik, TB'si kapsamlı olmasına rağmen

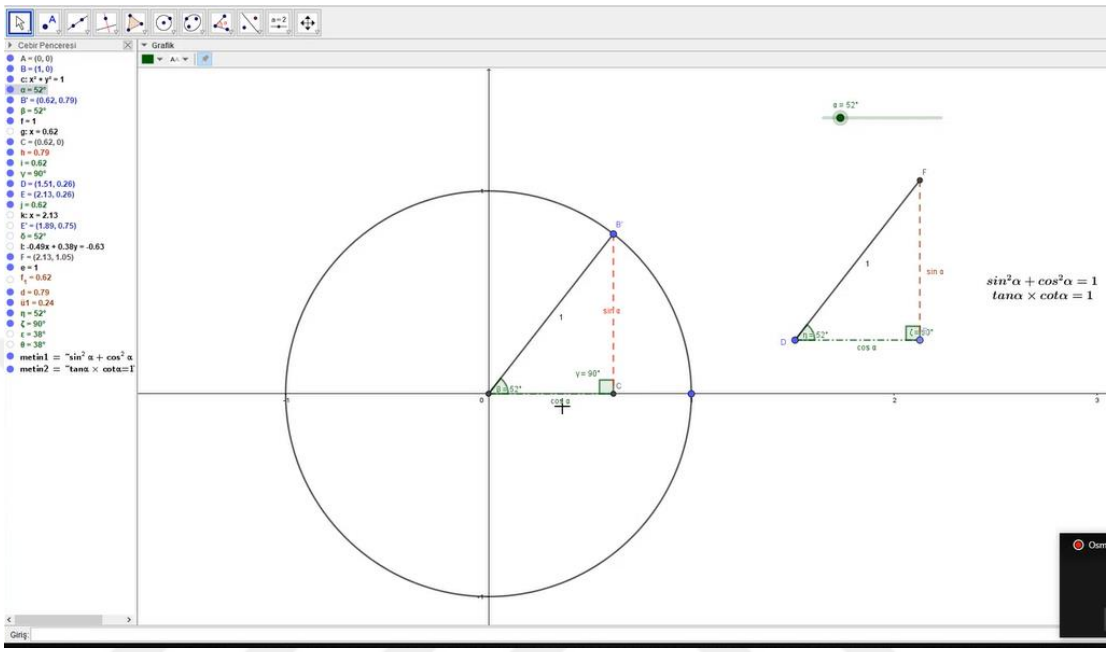
TB'sini PAB'ına etkili şekilde entegre edemediğini, dolayısı ile TPAB'nda eksiklikler olduğunu ortaya koymuştur. Bununla ilgili Ö2 ile gerçekleşen diyalog aşağıdaki gibidir:

> *Ö2: İndirgeme de açıkçası zaten trigonometri öğrencilik yıllarından kalma benim başta olmak üzere öğrencilerin çok sevdiği, anlayabildiği bir konu değil. Zaten geometri değil, matematik değil, trigonometri hiç değil. O dolayısıyla zaten başlı başına zor olduğunu düşünüyorum trigonometrinin. Ama birinci bölgeye indirgeme, onun üzerine işlem yapma, bunu yaparken de var birinci bölge indir gidi onu yapıyor o bu kez işareti unutuyor. Kaçıncı bölgedeydi, işaret neydi unutuyor. Yani indirgeme kısmında öğrencilerin zorlanabileceğini düşünüyorum.*
>
> *Araştırmacı: Mesela o kısmı öğrencilere hani daha iyi öğretebilmek için ne yapardın?*
>
> *Ö2: Zamanla göreceğiz diye bir cevap vereyim ona.*
>
> *Araştırmacı: Şu anda bir planın yok mu?*
>
> *Ö2: Planım değil, bir tecrübem yok diyelim.*

Ö2 trigonometrik özdeşliklerin öğretimi için oluşturduğu etkinliğinde, Şekil 126'da bulunan sürgü yardımı ile $sin^2x + cos^2x = 1$ özdeşliğinin her zaman geçerli olduğunun gözlemlenmesini sağlamayı planlamıştır. Bunun için Ö2, öğrencilere "*Pisagor teoremini kullanarak ne gibi bir sonuca ulaşabilirsin?"* şeklinde soru yönelterek öğrencilere daha önceden bildikleri Pisagor teoremi ile trigonometrik fonksiyonların tanımları arasında ilişkiyi fark ettirmeyi hedeflemiştir. Bu durumda Ö2'nin bilinenden bilinmeyene öğretim ilkesine göre hareket ederek PB'sini kullandığı görülmüştür. Ardından örnek olarak, Şekil 126'da bulunan sürgüyü 52º ye sürükleyerek, öğrencilere sin52º ve cos52º değerlerini dik üçgenin kenar uzunluğu olarak ifade edildiğini hatırlattıktan sonra sürgüyü verilen aralıkta sürükleyerek etkinlikte gerçekleşen değişikliklerle ilgili öğrencilere soru yönelteceği görülmüştür. Ancak bunun yanında, Ö2'nin konunun öğretimindeki tecrübesizliğine değinerek öğrencilerden gelebilecek cevaplar konusunda yeterli fikrinin olmadığı görülmüştür. Bu durum ise benimsenen kavramsal çerçeveye göre Ö2'nin PB'sini, TB ve AB'si ile etkili şekilde birleştiremediğini dolayısıyla TPAB'ında eksiklikler olduğunu göstermektedir. Ö2'nin bununla ilgili söylemi aşağıdaki gibidir:

> *"İlk etapta öğrenciye diyebilirsin direkt hani acaba, burada Pisagor teoremini biliyoruz, buradan Pisagor teoremini kullanarak ne gibi bir sonuca ulaşabilirsin? Öğrenci buradan 'Hocam, Pisagor teoremini kullanırsak orası dik açı olduğu için dik üçgen oluştuğu için dik kenarları uzunluklarının kareleri toplamı 1'e eşittir' bunu diyebilir. Ya da* $sin^2\alpha + cos^2\alpha =$ *1 der mi demez mi bilemiyorum. Bu tecrübesizlik açıkçası.* $sin^2\alpha$ *mı der yoksa* $sin\alpha$ *mı der*

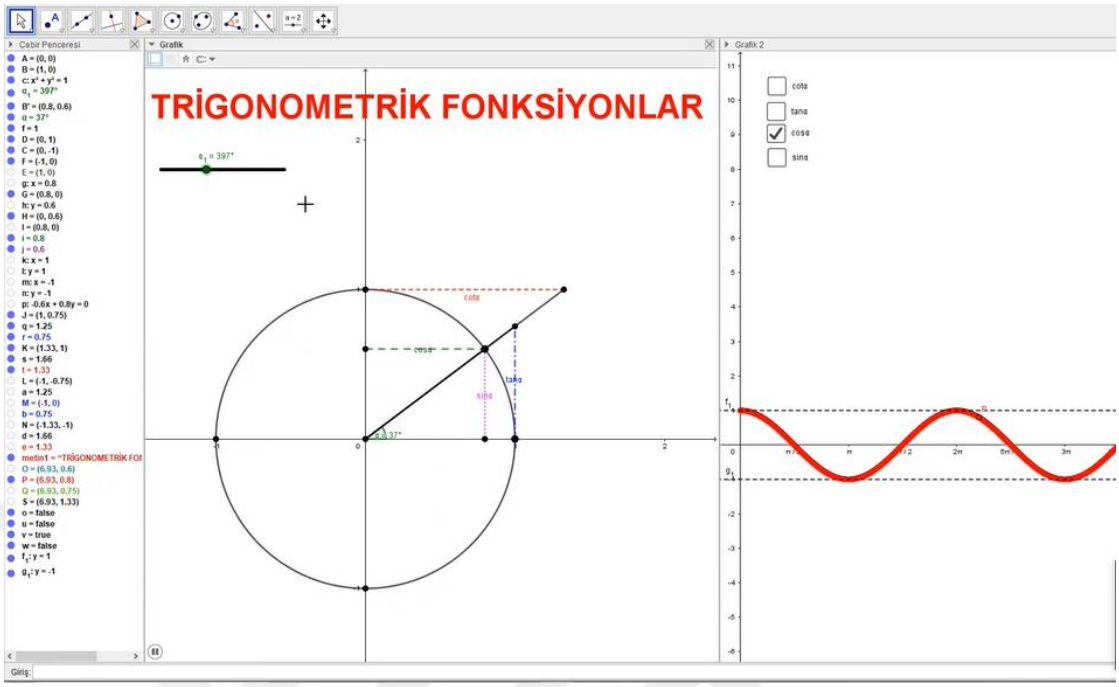
bunu bilemiyorum şu anda. Burada daima hipotenüsün 1 olacağını öğrenci görecektir program üzerinde. Ve sinüs ile kosinüsün kısaldığını, bölgelere göre yer değiştirdiğini görecektir. Kavrayacaktır diye düşünüyorum."



Şekil 126. Ö2'nin trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü-2

Ö2'ye trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin öğretimi için oluşturduğu etkinliği nasıl uygulamayı planladığı sorulduğunda ise ilk olarak derse beyaz tahtayı kullanarak başlayacağı, ardından öğretimi Şekil 127'de verilen etkinliği ile destekleceği görülmüştür. Beyaz tahtayı kullanırken, öğrencilerin bildiği trigonometrik değerlerden hareket ederek 0º ile 360º arasında trigonometrik fonksiyonların grafiğinin nasıl olacağını fikir yürüterek çizmelerini ?istemiştir. Ardından etkinliğine geçerek trigonometrik fonksiyonların grafiklerini öğrencilerin gözlemlemelerini sağlamayı hedeflediğini belirtmiştir. Ö2'nin bununla ilgili söylemi aşağıdaki gibidir:

"Elimizle de çizebiliriz, burada da gösterebiliriz. Şimdi böyle bir fonksiyonu neden ilk başta elimle çizerim diyorum onu belirteyim. Böyle bir fonksiyonu çizerken öğrenciye öncelikle en başta dediğim gibi öğrenciye en basit yoldan çizdirmeye çalışırım. Bu nedir öğrenci sin0°'yi biliyor, sin30º, sin145º, 60º, 180º, 90º, 135º gibi belirli açıları biliyor. Dolayısıyla o bildiklerinden yola çıkarak işte fonksiyonun belli noktaları işaretleyerek biraz o eğimi elleriyle çizilerek önce çizmelerini ister ardından bunun 2π'de sınırlı kalmaksızın bir örüntü şeklinde bir periyot şeklinde sürekli devam ettiğini GeoGebrada gösterebiliriz."



Şekil 127. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-4

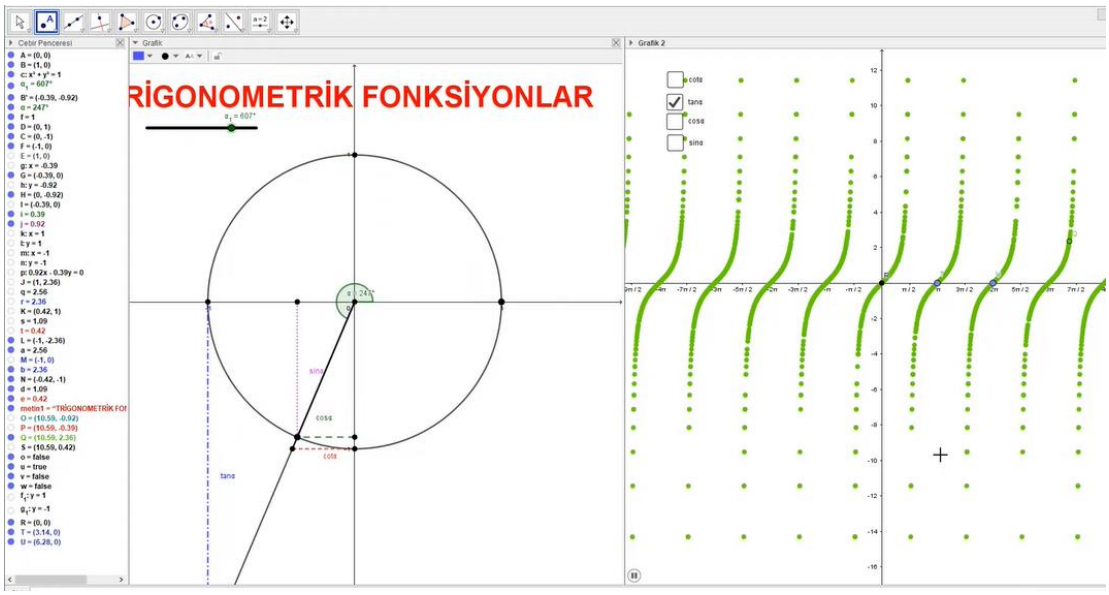
Ö2 Şekil 127'de verilen etkinliği nasıl uygulayacağına örnek olarak, TAB bölümünde de bahsedildiği gibi TAB'ını kullanarak sürgüyü canlandırmış, oluşan cosα fonksiyonunun koordinat sistemi üzerinde aldığı değerleri, tanım ve değer kümelerini, grafiğini göstermiştir. Ö2'ye öğrencilerin trigonometrik fonksiyonlarının grafikleri konusunda anlamakta güçlük yaşacaklarını düşündüğü bir yer olup olmadığı sorulduğunda ise koordinat sisteminde x ekseninin derece yerine radyan cinsinden yazılmasının öğrencilerin kafalarını karıştırabileceğini ifade etmiştir. Bu soruna çözüm olarak, bir tablo yardımı ile konuya açıklık getirmeye çalışacağı görülmüştür. Ö2 bahsettiği tabloda trigonometrik fonksiyonların farklı açı değerleri için aldığı değerleri vererek, Şekil 127'de verilen etkinlikte fonksiyonun grafiğini öğrencilere açıklamayı düşündüğünü ifade etmiştir. Ö2'nin bununla ilgili söylemi aşağıdaki gibidir:

> *"Bu tablo yardımıyla benim bu grafiği çizerken aslında grafikte hangi açıya, hangi sonucun karşılık geldiğini; şu açı değer için görüntü budur, bu açı değeri için sonuç budur şeklinde ifade edeceğim için x ekseninde artık açı değerlerini kullandığımı belirtirim diye düşünüyorum."*

Ö2'ye oluşturduğu etkinliği, trigonometrik fonksiyonların periyotlarının öğretiminde nasıl uygulamayı planladığı sorulduğunda ise tanjant fonksiyonu için öğretimi nasıl gerçekleştirmeyi planladığını açıklamıştır. Ö2 TAB bölümünde de bahsedilidği gibi grafik 2

penceresinde gerekli teknolojik eylemleri gerçekleştirerek, tanx fonksiyonunun grafiğini çizdirmiştir (Bknz. Şekil 128). Ardından grafiğin belli aralıklarla benzer hareketi yaptığına değinerek x eksenini kestiği 0, π, 2π gibi değerlere Şekil 128'de görüldüğü gibi nokta koyarak, grafiğin π aralıkta bir tekrar ettiğini öğrencilere göstermeyi hedeflemiştir. Öğrencilere belli açı değerleri (90, 270) için tanx fonksiyonunun alacağı değerleri ve fonksiyonun tanımsız, sonsuz yapan değerlerinin neler olacağını sorabileceğini belirtse de "*Açıkçası öğrenciye çok sormayı planladığım bir şey yok"* ifadesi ile sormayı planlandığı soruları pedagojik açıdan detaylandıramadığı görülmüştür. Dolayısıyla Ö2 Şekil 130'da verilen etkinliğini, trigonometrik fonksiyonların grafikleri ve periyotları konularının öğretiminde nasıl uygulamayı planladığını açıklarken, TAB'ının kapsamlı olduğuna dair kanıt sunsa da söylemlerini pedagojik açıdan detaylandıramamış, PB'sini TAB'ına etkili şekilde entegre edememiş, bir başka deyişle TPAB'ında eksiklikler olduğu tespit edilmiştir. Ö2'nin bununla ilgili söylemi aşağıdaki gibidir:

> **"***Açıkçası öğrenciye çok sormayı planladığım bir şey yok. Yine 0° ile 2π arasındaki örneği veririm diye düşünüyorum. Belirli açı değerleri için. Sonrasında 90°'de ne olacağını, 270°'de ne olacağını biliyorlar, onları sorabilirim diye düşünüyorum. Orada öğrenci hani 1/0'dan tanımsız mı diyecek, sonsuz mu diyecek onu sorarım diye düşünüyorum."*



Şekil 128. Ö2'nin trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-5

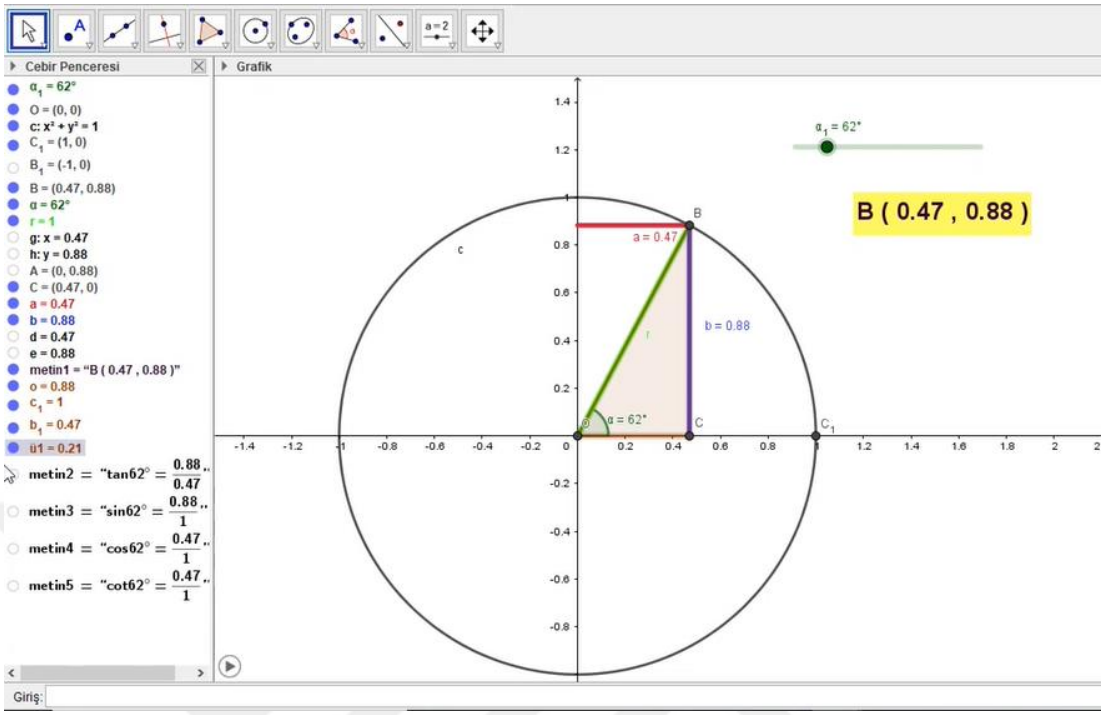
Özet olarak katılımcı Ö2'nin Ö1'e benzer şekilde trigonometri konuları özelinde, teknolojiyi konulara entegre edebildiği ve teknolojiyi entegre ettiği noktaları ayrıntılı bir şekilde açıklayabildiği görülmüştür. Ö2'nin, Ö1'den farklı olarak PB'sindeki eksiklik

nedeniyle oluşturduğu etkinliklerin öğretimini nasıl gerçekleştirmeyi planladığını detaylı şekilde açıklayamadığı görülmüştür. Ö2'nin trigonometri konularında TAB'ı kapsamlı olmasına rağmen, PB'sindeki eksiklik nedeni ile PB'sini TAB'ına etkili şekilde entegre edemediği, TPAB'ında eksiklikler olduğu tespit edilmiştir.

4.6.3. Katılımcı Ö3'ün TPAB'ı

Katılımcı Ö3'ün trigonometri konusunda TPAB'ını incelemek amacıyla trigonometrik fonksiyonların öğretimi için oluşturduğu etkinliğini derslerinde nasıl uygulamayı planladığı sorulmuştur. Ö3'ün ilk olarak, Şekil 129'da bulunan sürgüyü verilen aralıkta canlandırarak ve öğrencilere *"B noktasında ne oluyor?", "B noktası değişiyor ama neye göre değişiyor, rastgele mi değişiyor?"* gibi çeşitli soruları yönelterek etkinlik üzerinde gerçekleşen değişiklikleri fark ettirmeyi amaçlamıştır. Bu sorular ile öğrencilerden gelebilecek cevapları göz önünde bulundurarak, öğrencilere ne gibi cevaplar verebileceğine de değinmiştir. Daha detaylı şekilde ele alacak olursak, Ö3 bu süreci kendi cümeleri ile aşağıdaki gibi açıklamıştır:

> *"Aslında burada benim hareket ettirdiğim şey α, peki α'nın değişimine bağlı olarak ne değişiyor burada. İşte 'Çemberin yeri oynuyor mu?', 'B noktasında ne oluyor?', 'B noktası değişiyor ama neye göre değişiyor, rastgele mi değişiyor?'. Sonuçta B noktasının da çemberin üzerinde hareket ettiğini görmelerini istiyorum, çünkü çemberin üzerinde hareket ettikçe B noktasında sabit olan tek bir şey var; koordinatları değişiyor ama OB değişmiyor, yani r; yani yeşil çubuğumuz değişmiyor. Bunların değişmediğini görmelerini istiyorum. Yani ilk aşamada istediğim şey birim çemberin ne olduğunu hatırlamaları. Burada değişenler ne? Açı, B noktasının koordinatları, B noktasının yeri. Değişmeyenler ne? B noktasının gezdiği yer, çemberin üzeri. B noktasıyla O noktasının merkeze uzaklığı; yani 1, birim çember olarak."*

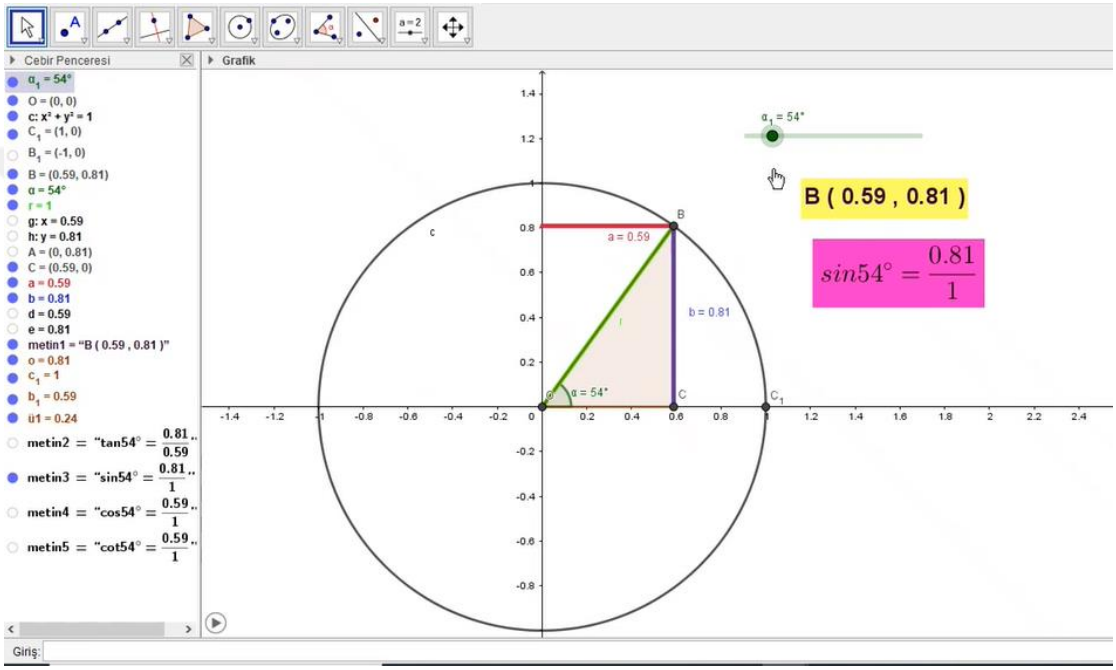


Şekil 129. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-4

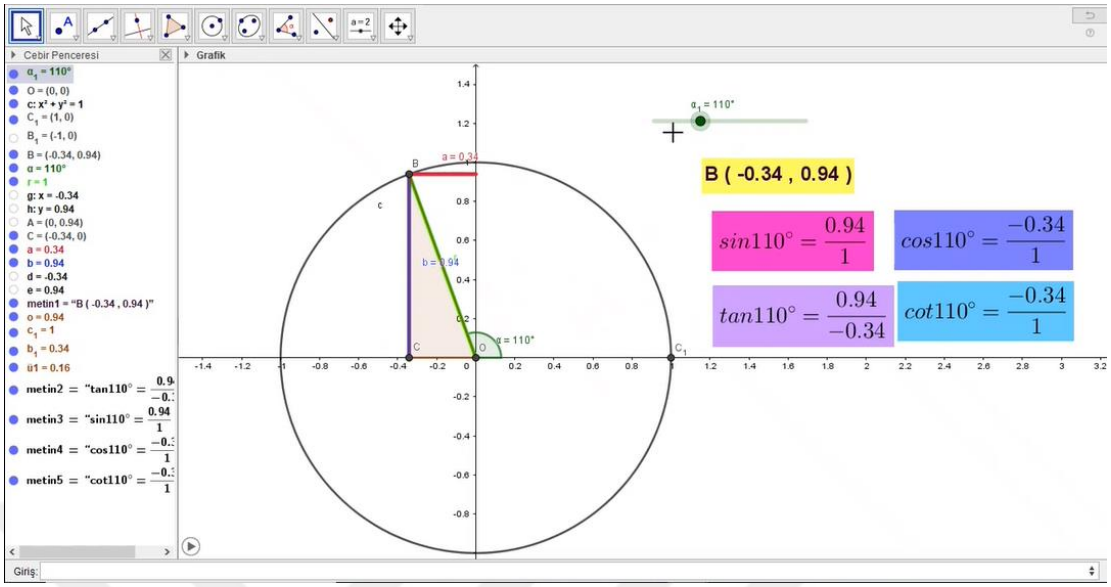
Devamında Ö3 beyaz tahta üzerinde, trigonometrik oran kavramını, dik üçgen ve oran kavramları ile ilişkilendirerek ve dik kenar, komşu kenar, hipotenüs gibi kavramlara değinerek tanımlamayı planlamıştır. Ö3'ün matematiksel kavramlar arasında ilişki kurarak açıklamalarda bulunması, AB'si ile PB'sini birleştirerek, PAB'ına yönelik kanıt sunmaktadır. Ardından etkinlik ile devam ederek, Şekil 130'daki sürgüyü verilen aralıkta sürükleyerek farklı bölgelerde birim çember üzerinde oluşan dik üçgende sinüs tanımına dikkat çekmeyi ve *"Sinüs nedir?", "Ne değişti? Yorumlayın"* cümleleri ile sinüs fonksiyonunun B noktasının ordinat değerine eşit olduğunu fark ettirmeyi amaçlamıştır. Tüm bölgelerde trigonometrik fonksiyonların tanımlanmasına dair benzer şekilde örnekler sunarak, öğrencilerin birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonların tanımlarını kavratmayı hedeflemiştir (Bknz. Şekil 131). Ö3'ün öğretimi nasıl gerçekleştirmeyi planladığını detaylandırarak açıklaması, öğrencilere yöneltmeyi düşündüğü sorulara değinmesi ve onlardan gelebilecek cevapları gözönünde bulundurması, benimsenen kavramsal çerçeveye göre PAB'ını TB'si ile birleştirebildiğini, TPAB'ını kullanabildiğini göstermektedir. Ö3'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki gibidir:

> *"…Sinüs nedir, nasıldır, B noktasına göre nasıl değiştireceğim?' gibi. 'Tamam, o zaman B var benim için. B noktasının y değeri var. Bir de r var. r hiçbir şekilde değişmiyor. O zaman ne oldu? b/1 olduğu için her şekilde aynı şeye denk geliyor.' deyip şuradan sinüsü açarız. O*

zaman ne oldu? Sinüs B noktasının y değerine eşit olmuş oldu. Aşağısı hiç değişmediği için sinüs değeri ile B noktasının y değeri birbirine eşit olmuş oluyor, ona bağlatırım. Aynı şekilde tanjant, kotanjant, kosinüs diye devam eder. Tek tek bu şekilde giderim. Mesela 'O zaman peki tanjant ne oluyor, kotanjant ne oluyor, kosinüs ne oluyor, o zaman hangi genellemelere ulaşırız?' gibi... En son varmak istediğim sonuç şu olur. O zaman şu genellemeyi istiyorum: Birim çember üzerinde 1. bölgede B noktasının y değeri sinüs'e eşittir. B noktasının x değeri kosinüs'e eşittir. B noktasının y/x'i tanjant, x/y'si benim için kotanjanttır."



Şekil 130. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-5



Şekil 131. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-6

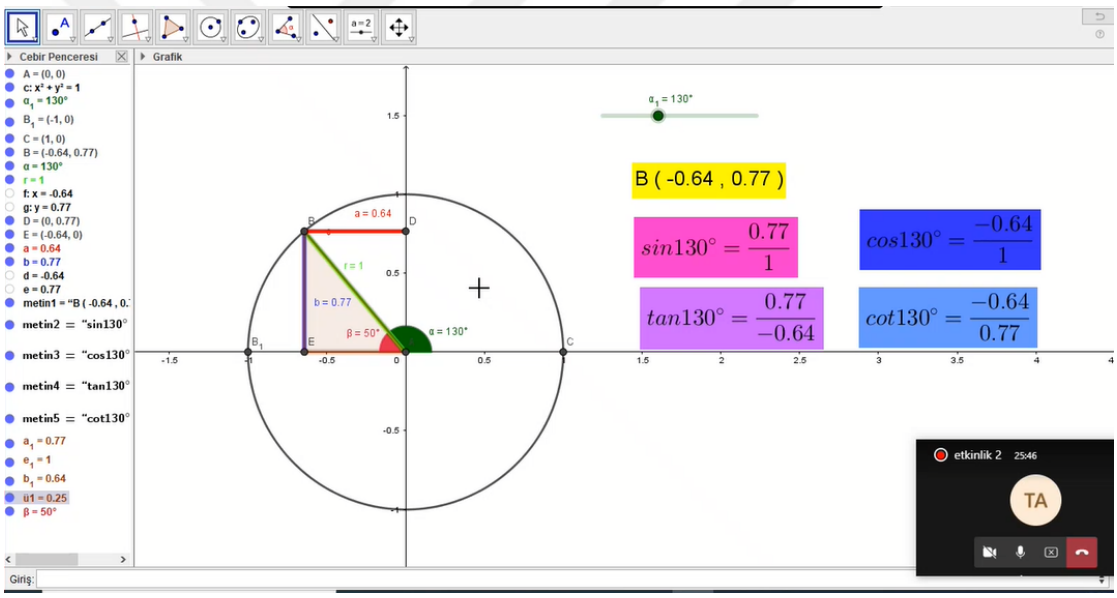
Ayrıca Ö3'ün derste kullanacağı materyalleri seçerken, öğrenci düzeyini ve öğrencinin daha önceki öğrenmelerine yönelik var olan deneyimlerini dikkate aldığı görülmüştür. Ö3'ün trigonometri konularına teknolojinin entegre edililerek öğretilmesi konusunda öğrencinin ihtiyaçlarına göre hareket edeceğini planlaması, TB'si ile PB'sini birleştirerek, TPB'sinin varlığını kanıt niteliğindedir. Ö3'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki gibidir:

> *"…Yani biraz daha akademik başarlarının yüksek olduğu sınıflarda fark etmelerinin çok zor olacağını düşünmüyorum. Düşük sınıflarda biraz sıkıntı olabilir… Çünkü öğrencilerin gerçekten alışık olmadığı bir ortamda bir şey anlatmaya çalışmak ya da alışık olmadığı bir yöntem ile bir şey anlatmaya çalışınca çocuğun önden bir önyargısı oluyo… Dediğim gibi; yine öğrencinin düzeyine, öğrencinin okulunda daha önce anlatılan öğretim sistemlerine göre bu tercihim değişir. 'Kesin şunu yaparım, kesin bunu yaparım.' diyemem. Tamamen öğrenci odaklı buradaki kararım ama esneğim o konuda."*

Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların işaretlerinin öğretimini de bir önceki etkinlikteki eylemlerine benzer şekilde gerçekleştirmeyi planladığı görülmüştür. Örnek olarak Şekil 132'de bulunan sürgüyü 1. bölgeden 2. bölgede yer alan açı değerlerine sürükleyerek sinüs fonksiyonu için *"2. bölgede nasıl bir değişim olmalı?", "Pozitiflik, negatifliği hakkında ne diyebilirim?"* gibi soruları öğrencilere yönelterek gerçekleşen değişiklikleri fark ettirmeyi amaçlamıştır. Bununla birlikte öğrencilerden düşüncelerini paylaşmalarını isteyerek ve bunu yaparken öğrencilere verebileceği ipuçlarından da bahsederek PB'sini kullanmıştır (Örnek

olarak: Sinüsü 1. bölgede konuşurken sadece B noktasının y değerine bağlamıştım. Şu an 2. bölgeye baktığımda 'B noktasının y değeri benim için her zaman nedir?). Bu durumda Ö3'ün TAB bölümünde de bahsedildiği gibi TAB'ını kullanarak PB'si ile birleştirebildiği yani TPAB'ını etkinliğin planlamasına yansıttığı görülmüştür. Ö3'ün bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

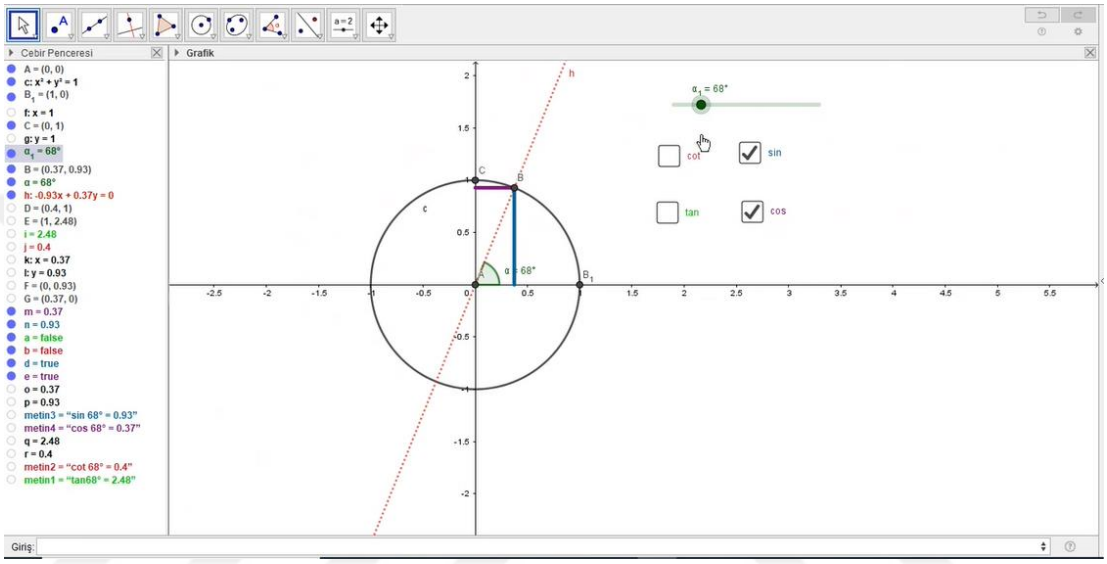
> *"Sonrasında 'O zaman 1. bölgedeki bütün hepsi pozitifken 2. bölgede nasıl bir değişim olmalı?, Sinüs ne olur?, Pozitiflik, negatifliği hakkında ne diyebilirim?' gibi sorular yöneltirim çocuklara. Sinüsü 1. bölgede konuşurken sadece B noktasının y değerine bağlamıştım. Şu an 2. bölgeye baktığımda 'B noktasının y değeri benim için her zaman nedir?' Pozitiftir, o zaman diyebilirim ki sinüs 2. bölgede benim için her zaman pozitiftir. Böyle bir genelleme isterim çocuklardan."*



Şekil 132. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-7

Ö3'e trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması ile ilgili oluşturduğu etkinliği nasıl uygulamayı planladığı sorulmuştur. Ö3'ün ilk olarak bir önceki etkinlikte öğrenciye verdiği matematiksel bilgiyi (trigonometrik fonksiyonların birim çember üzerindeki tanımlanması) hatırlatarak başlangıç yapmayı planladığı görülmüştür. Ardından Şekil 133'te bulunan etkinlikteki sin ve cos işaret kutularını açıp sürgüyü 0°'den 90°'ye sürükleyerek ve öğrencilere *"1. bölgede 0°'den 90°'ye doğru giderken sinüse ne oluyor?", "Peki sinüs büyürken kosinüse ne oluyor?"* şeklinde sorular yönelterek sinüs ve kosinüs fonksiyonlarındaki değişimi fark ettirmeyi hedeflemiştir. Ö3'ün bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

"Önce şuradan başlayayım; sinüs ve kosinüs'ü bu grafik üzerinde nasıl gösterebilirim? 'B noktasının y'si, B noktasının x'i' şeklinde konuşmuştuk öğrencilerle. O zaman sinüs dediğim şey benim B noktamın y'si, kosinüs dediğim şey de benim B noktamın x'idir. Şimdi şöyle kabataslak bir baksam.'1. bölgede 0°'den 90°'ye doğru giderken sinüse ne oluyor, birisi bunu bana açıklayabilir mi?' derim mesela. 0°'den 90°'ye doğru giderken benim sinüsüm büyüyor. 'Peki sinüs büyürken kosinüse ne oluyor?' bunu sorarım. Sinüs büyürken, kosinüs küçülüyor."



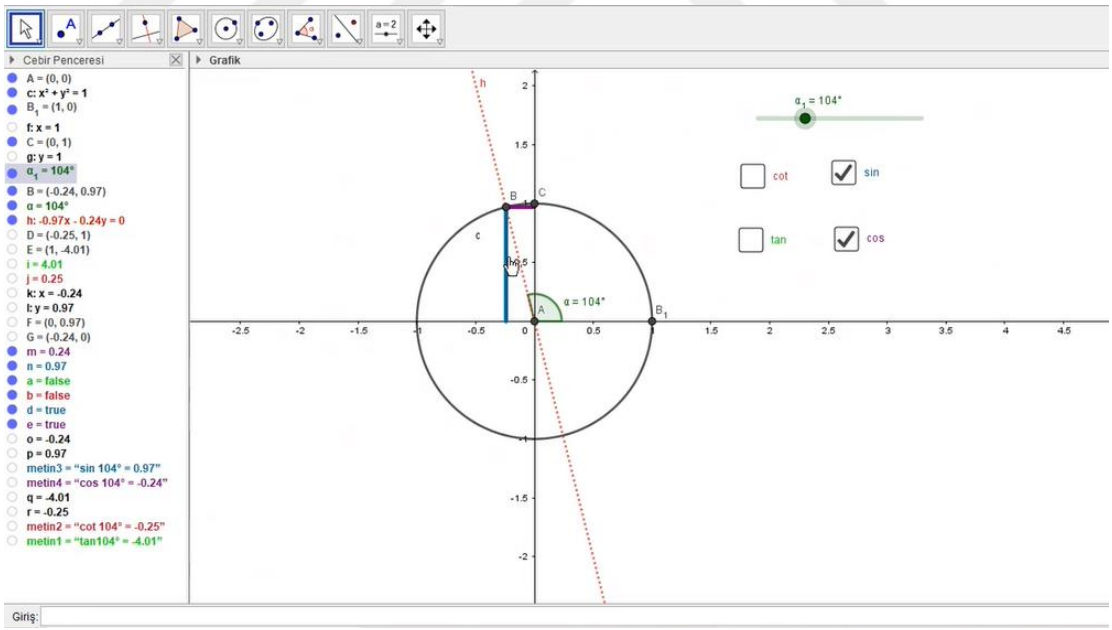
Şekil 133. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü-3

Devamında Ö3, sinüs ile kosinüs fonksiyonunun birbiri ile karşılaştırılması konusunda öğrencilerin genellemelere ulaşmalarını sağlamak amacıyla öğretime yönelik planını detaylandırmıştır. Örnek olarak, Şekil 133'te verilen sürgüyü 45º'ye sürükleyerek ve sin45º ile cos45º değerlerinin birbirine eşit olduğunu öğrenciye fark ettirdikten sonra, sürgüyü 45º den 90º'ye doğru sürükleyerek "*45°'nin üstüne çıktığımda kim büyük?"* benzer şekilde sürgüyü 0º-45º arasında sürükleyerek "*45°'nin altındayken kim büyük?"* şeklinde sorular yönelteceği görülmüştür. Ö3'ün bununla ilgili söylemi şu şekildedir:

"Sonra, öğrencilere derim ki hani; Biz ne yapmıştık? 0°'den 90°'ye doğru giderken kim büyüyordu, kim küçülüyordu? 0°'den 90°'ye doğru giderken sinüs büyüyor, kosinüs küçülüyor. Bunlar bir yerde eşit olmuyor mu? Hani normalde bir önceki etkinliğimizde gördük zaten, sin45° ile cos45°'nin birbirine eşit olduğunu biliyorduk. Bunlar 45°'de eşitse, eşitlendiği anda sinüs büyümeye, kosinüs de küçülmeye devam ediyorsa demek ki 45°'nin altındayken aslında kim büyük? Kosinüs büyük her zaman. 45°'nin üstüne çıktığımda kim büyük? Sinüs büyük. Bunu bu şekilde yorumlayabilir miyiz?'' deyip, öğrencilerle bir tur tartışıp; 'Bakalım o zaman eğer

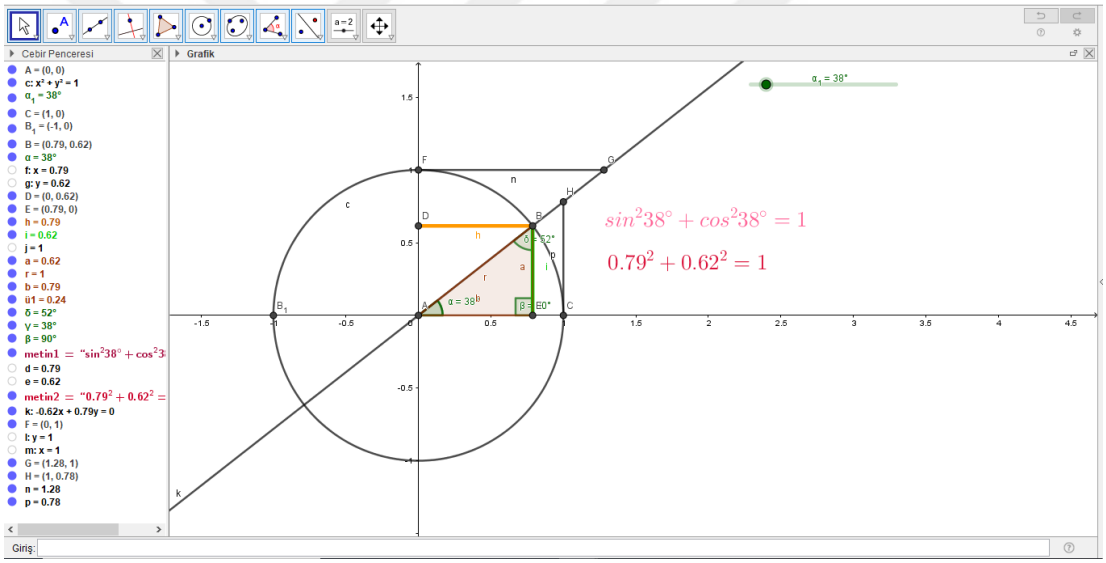
öyle miymiş gerçekten?' deyip şunları açıp, burada da gösteririm…45°'nin altındayken kim büyükmüş? Kosinüs büyükmüş. O zaman 45°'nin üstündeyken sinüs büyüktür, kosinüs küçüktür. 45°'nin altındayken sinüs küçüktür, kosinüs büyüktür gibi bir genellemeye varabilir miyiz?' derim, sorarım."

Ardından Ö3'ün koordinat sisteminin diğer bölgelerinde de sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının karşılaştırılmasını öğrencilere etkinlik üzerinde göstermeyi planladığı görülmüştür (Bknz. Şekil 134). Örnek olarak Şekil 134'te bulunan sürgüyü 104º'ye sürükleyerek ve öğrencilere sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını kıyaslarken *'Pozitiflik, negatifliğini de alıyor musunuz?'* ifadesi ile ipucuna da yer vermeyi planladığı görülmüştür. Ö3'ün tanjant ve kotanjant fonksiyonları için de benzer eylemleri tekrarlamayı planladığı görülmüştür. Dolayısı ile Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması konusunda öğretimi nasıl gerçekleştirmeyi planladığını detaylandırarak açıklaması, öğrencilere yöneltmeyi düşündüğü sorulara değinmesi ve onlardan gelebilecek cevapları gözönünde bulundurması, ipuçlarına yer vermesi benimsenen kavramsal çerçeveye göre PAB'ını TB'si ile birleştirebildiğini, TPAB'ını kullanabildiğini ve kapsamlı olduğunu göstermektedir.



Şekil 134. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması etkinliği ekran görüntüsü-4

Ö3 trigonometrik özdeşlikler etkinliğini ise $sin^2x + cos^2x = 1$ özdeşliğinin her zaman geçerli olduğunu göstermek amacıyla oluşturmuştur (Bknz. Şekil 135). Etkinliği, dersin kısa bir bölümünde özdeşliğin görselleştirilmesi sağlamak amacıyla uygulamayı planlamıştır. Ö3'ün Şekil 135'teki sürgüyü 38°'ye sürükleyerek TAB bölümünde de bahsedildiği gibi Pisagor teoremi ile trigonometrik fonksiyonların tanımları arasındaki ilişkiye değinerek $sin^2x + cos^2x = 1$ özdeşliğinin elde edildiğini kavratmaya çalışacağı görülmüştür. Ek olarak, koordinat sisteminde farklı bölgelere geçildiğinde trigonometrik fonksiyonların negatif değer almaları nedeni ile $sin^2x + cos^2x = 1$ özdeşliğinin her zaman geçerli olduğunu öğrencilerin anlamakta güçlük çekebileceklerini düşündüğünü belirtmiştir. Bu güçlüğü gidermek için ise sürgü yardımı ile koordinat sisteminde tüm bölgelerde $sin^2x + cos^2x = 1$ özdeşliğine örnekler vermeyi planlayarak PB'sini TAB'ı ile birleştirebildiği görülmüştür.

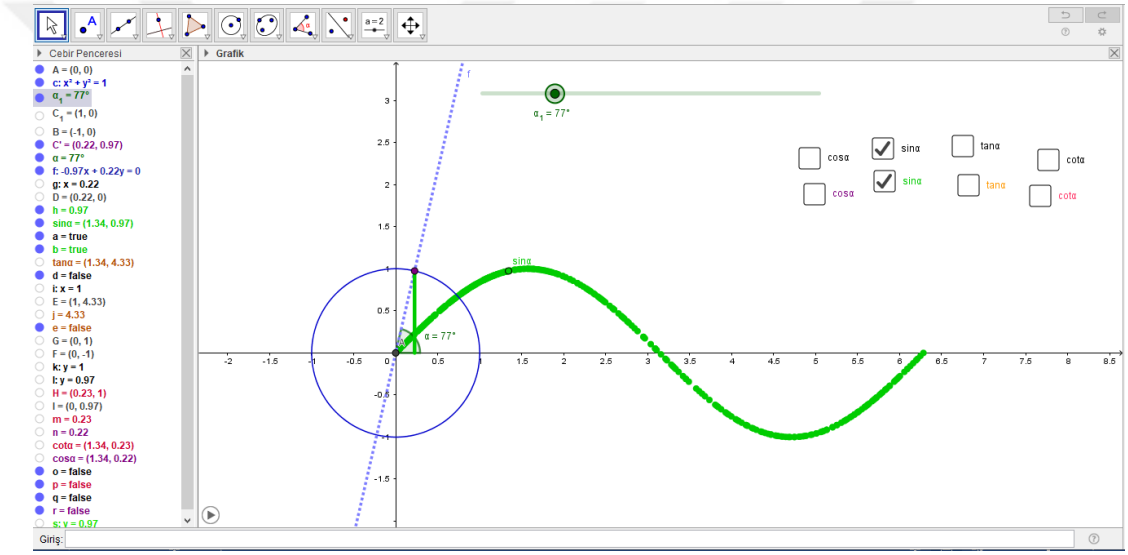


Şekil 135. Ö3'ün trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü-2

Ö3'e trigonometrik fonksiyonların grafikleri ile oluşturduğu etkinliği nasıl uygulamayı planladığı sorulmuştur. Ö3 Şekil 136'da verilen etkinliği ile öğrencilere birim çember ile trigonometrik fonksiyonun grafiği arasındaki ilişkiyi kavratmayı planlamıştır. Örnek olarak, Şekil 136'da bulunan sürgüyü verilen aralıkta sürükleyerek *"Sürgüyü hareket ettirdiğimde gördüğüm şey ne?", "Bu hareket ederken oradaki sinüs ne yapıyor, nasıl bir hareketi var?"* gibi soruları öğrencilere yönelterek etkinlik üzerinde gerçekleşen değişimleri öğrencilere fark ettirmeyi hedeflemiştir. Ancak TAB bölümünde bahsedildiği gibi Ö3'ün etkinliği oluşturuken grafik 2 penceresini kullanmaması nedeni bu konuda kapsamlı bir etkinlik oluşturamadığı görülmüş dolayısı ile sinx fonksiyonununda hareketinin de

gözlenmemesini etkili şekilde sağlayamamıştı. Ayrıca PB ve PAB bölümünde bahsedildiği Ö3'ün trigonometrik fonksiyonarın grafiklerini öğrencilere nasıl öğreteceği hakkında fikrinin olmaması ve dolayısıyla bu konuda öğretimi nasıl yapacağına dair söylemlerini detaylandıramaması AB, TB ve PB'sini bilgisini etkili şekilde birleştiremediğini dolayısı ile TPAB'ının kapsamlı olmadığını göstermektedir.

> *"Tamam önce sinüs için başlıyım mesela. Önce şunu söylerim. Şimdi burada sürgüyü hareket ettirdiğimde gördüğüm şey ne? Bunu biliyoruz zaten bu sinüs. Sonra gelirim sinüsü açarım. Şuan bu hareket ederken oradaki sinüs ne yapıyor? Bunu yorumlamalarını isterim. Bir hareketi var, nereye gidiyor, nasıl bir hareketi var? Bunu yorumlamalarını isterim."*

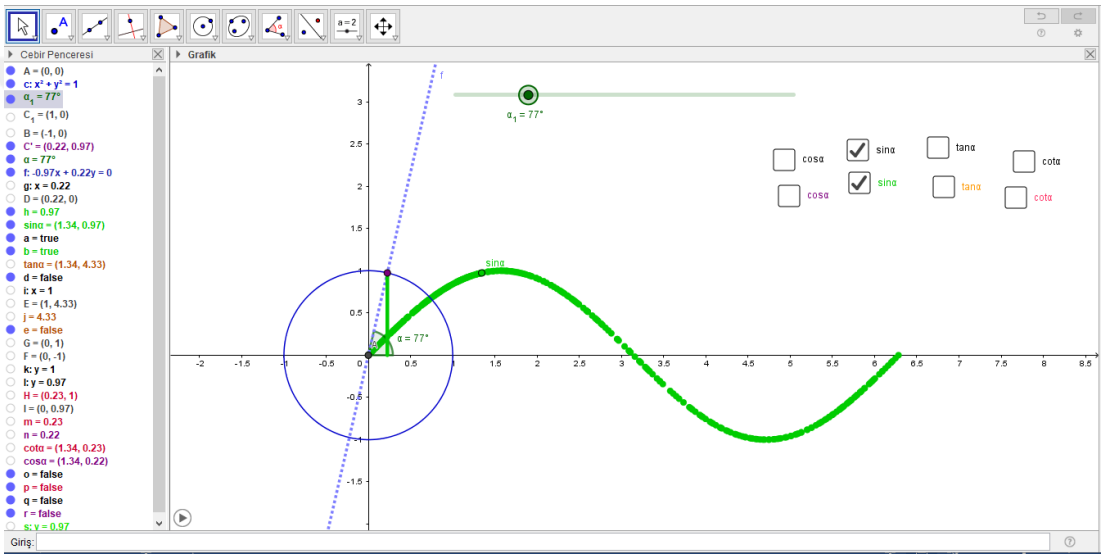


Şekil 136. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-4

Ö3'e trigonometrik fonksiyonların periyotlarının öğretimini nasıl gerçekleştirmeyi planladığı sorulmuştur. Ö3 ilk olarak PB ve PAB bölümünde de bahsedildiği gibi periyot kavramını günlük hayat ve matematikteki tanımını hatırlatarak derse başlamayı, ardından Şekil 137'de verilen GeoGebra etkinliği ile devam etmeyi planlamıştır. Örnek olarak, TAB bölümünde de bahsedildiği gibi Şekil 137'de verilen sinx fonksiyonunun izini açarak 0º ile 360º arasında grafiğini çizdirmiştir. Ardından sürgüyü 360º'den 365º'ye sürükleyerek öğrencilere *"Peki, 360º'den sonra neden ilerleme olmuyor? Ben 360º'den sonra ileriye gidersem bu grafik sizce nereye gider?"* şeklinde sorular yönelterek sinx fonksiyonunun periyodu ile ilgili fikir yürütmelerini sağlamayı hedeflemiştir. Ancak devamında ise Ö3'ün "*Burada öğrencilerden çok farklı cevaplar gelebilir"* diyerek öğrenciden gelebilecek cevaplara değinmediği ve öğretime yönelik söylemlerini detaylandıramadığı görülmüştür. Dolayısı ile

trigonometrik fonksiyonların periyotları konusu özelinde Ö3'ün AB, TB ve PB'sini etkili şekilde birleştiremediği, TPAB'ının kapsamlı olmadığını görülmüştür. Ö3'ün bununla iligli söylemi aşağıdaki gibidir:

> *"Peki, 360°'den sonra neden ilerleme olmuyor? Bunu bir sorarım öğrenciye. Peki, ben 360°'den sonra ileriye gidersem bu grafik sizce nereye gider? Aşağıya mı gider devam mı eder geri mi gelir? Geri gelir de diyebilir öğrenci. Şu açıyı 360°'den 365°'ye getirdiğimde şu sinα noktası nereye gelir sizce, öğrencilere bir sorarım. Burada öğrencilerden çok farklı cevaplar gelebilir."*



Şekil 137. Ö3'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-5

Buna ek olarak Ö3, trigonometrik fonksiyonların periyotları konusunun öğretimi özelinde hem kendisini hem de oluşturduğu etkinliği yetersiz bulduğunu ve bu konunun öğrenci öğrenmesi açısından da güç bir konu olduğunu düşündüğü görülmüştür. Ayrıca Ö3 lisans öğreniminden mezun olduktan sonra trigonometrik fonksiyonların periyotları konusu ile ilgili herhangi bir ders anlatımı yapmadığını, sadece lisans öğrencisi iken özel derslerde bu konuyu anlattığını ve çalıştığı özel kurumda bu konu ile ilgili öğrencilerin sordukları soruları çözdüğünü söylemiştir. Ö3'ün bu konu özelinde yeterli deneyiminin olmaması nedeniyle aşağıdaki söyleminde de bahsettiği gibi dersi planlayarak öğretimi nasıl gerçekleştireceğine dair çalışma yapması gerektiğini belirtmesi bu bağlamda TPAB'ınınn kapsamlı olmadığını destekler niteliktedir. Ö3'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki gibidir:

> *"Periyodu bu sene anlatmadım. Öğretmen olduktan sonra da anlatmadım galiba. Sadece soru çözümlerini yaptım. Etüt sistemi var dershanede. Öğrenci yapamadığı soruyu getiriyor, orada*

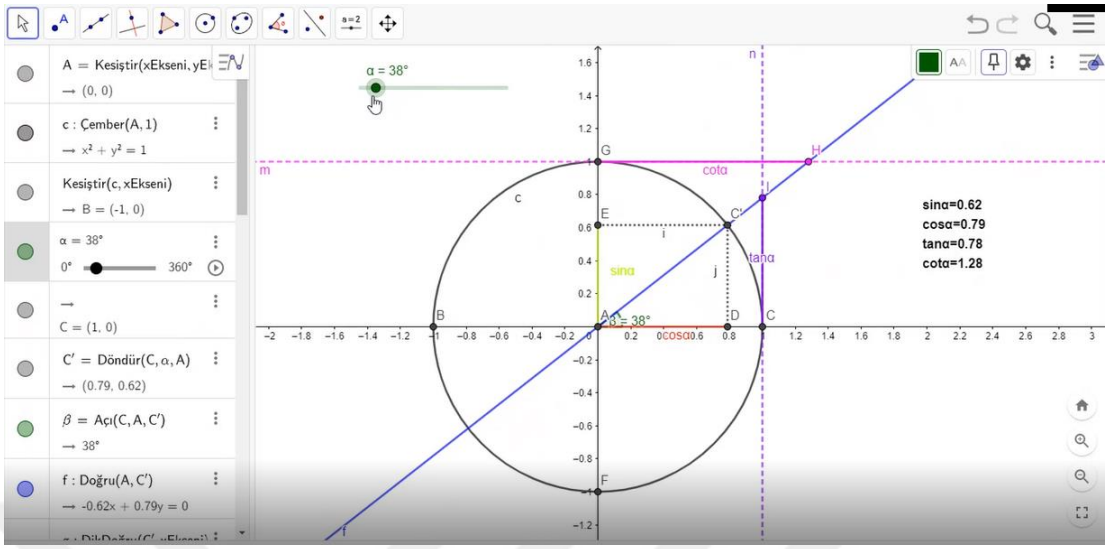
sorularını çözdüm. Sadece öğrenciyken anlattım diye hatırlıyorum. Üniversitede öğrenciyken, lisanstayken özel derste anlatmıştım… Üzerine çalışmam gerekir. Bunu şu anda 'laps' diye anlatır mıyım, düşünüyorum… Heralde anlatamam. Dersi planlamam gerekir. Periyodun hem daha zor öğrenileceğini düşündüğüm için, hem de şu anda etkinliği çok yeterli görmediğim için, yani amacıma tam hizmet etmiyor şu anda. Hem benden hem konudan kaynaklı. Buna muhtemelen ders planı yaparım. 'Burada bunu sorarım, şurada şunu sorarım...' gibi düzenlemem gerekir çünkü öbür türlü işin ucu kopuyor. Ben de dağılıyorum, öğrenci de dağılıyor, sıkıntı."

Özet olarak katılımcı Ö3'ün, Ö1 ve Ö2'ye benzer şekilde trigonometri konuları özelinde, teknolojiyi konuya entegre edebildiği gözlemlenmiştir. Ö3'ün; teknolojiyi kullanarak trigonometrik fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonların işaretleri ve karşılaştırılması, trigonometrik özdeşlikler konularında öğretimi nasıl gerçekleştirmeyi planladığını detaylandırarak açıklayabilmesi, öğrencilere yöneltmeyi düşündüğü sorulara değinmesi, onlardan gelebilecek cevapları göz önünde bulundurması, ipuçlarına yer vermesi PB'sini AB ve TB'si ile birleştirebildiğini, TPAB'ını kullanabildiğini ve bu bilgisinin kapsamlı olduğunu göstermiştir. Trigonometrik fonksiyonların grafikleri ve periyotları konularında ise öğretimi nasıl gerçekleştireceği hakkında fikrinin olmaması dolayısıyla da bu konuların öğretimine dair söylemlerini detaylandıramaması PB'sini AB ve TB ile etkili şekilde birleştiremediğini, TPAB'ının kapsamlı olmadığını göstermiştir.

4.6.4. Katılımcı Ö4'ün TPAB'ı

Katılımcı Ö4'ün trigonometri konusunda TPAB'ını incelemek amacıyla trigonometrik fonksiyonların öğretimi için oluşturduğu etkinliği nasıl uygulamayı planladığı sorulmuştur. Ö4 diğer katılımcılardan farklı olarak, Şekil 138'de verilen etkinliğini hazır olarak sınıfa götürmek yerine ders esnasında oluşturmayı planlamıştır. Bununla ilgili olarak öğrencilerin, geometrik şekillerin inşasını gözlemleyerek konuyu daha iyi anlamalarının sağlanabileceğini belirtmiştir. Ö4'nin bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

"Açıkçası ben etkinliği adım adım yapma taraftarıyım. Burada yaptım ya; en baştan dedim, en baştan çemberi çizdim, açıyı aldım C' noktası oldu. Açıyı çizdim. Adım adım, her adımı çizerek anlatma taraftarıyım. Direkt bunun üzerinde söylemek istemem. Çünkü şey de yok, zaman. 5 dakikada maksimum yapılabilecek bir şey. Renklendirmelerini falan saymazsak, onlar zaman harcıyor. 5-6 dakikada yapılabilecek bir şey olduğunu düşünüyorum temelde. O yüzden adım adım ilerleyerek yapmak daha mantıklı olur. Neyi, nereden ve neden yapıyoruz, belki daha iyi anlarlar."



Şekil 138. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonlar etkinliği ekran görüntüsü-4

Ö4 etkinliği sınıfta oluşturarak öğretimi gerçekleştireceğini belirtse de bu teknolojik eylemleri gerçekleştirirken öğretimi nasıl planlayacağını detaylandıramamıştır. Sadece, öğrencilere herhangi bir yönerge vermeden birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonları nasıl bulabileceklerini sormayı planlamıştır. Ayrıca Ö4'ün bahsedildiği gibi PB ve PAB'ında var olan eksiklik nedeniyle teknolojiyi kullanarak öğretimi nasıl gerçekleştireceğini bilmediği görülmüştür. Dolayısı ile AB, TB ve PB'sini etkili şekilde birleştirememiş bir başka deyişle TPAB'ında eksiklikler olduğu gözlemlenmiştir. Ö4'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki şekildedir:

> *"Şimdi 4. soru için yani trigonometrik oranların öğretimi için yapım aşamasında... Ne sorulur şu an kestiremiyorum… 'Ben buradan cosα'yı nasıl bulabilirim?' gibi. Çünkü işte hipotenüsü 1, AD kenarı/hipotenüs gibisinden, öyle sorular sorulabilir. Hani 'Bu açının kosinüsü buradan nasıl bulabilirim?', 'Sinüsü nasıl bulabilirim?' gibi sorular sorulabilir."*

Ö4, Şekil 138'de verilen etkinliği ile trigonometrik fonksiyonların işaretlerinin öğretimini de gerçekleştirebileceğini söylemiştir. Örnek olarak, sürgüyü verilen açı aralığında sürükleyerek öğrencilere *''90°'yi geçiyorum, ne oluyor? Nasıl hareket ediyor? Nerede hangisi negatif?"* şeklinde sorular yöneltebileceğinden bahsetse de bir önceki etkinlikte olduğu gibi sorularında yönergeye yer vermediği ve teknoloji kullanarak öğretimi nasıl gerçekleştirmeyi planladığını detaylandıramadığı görülmüştür. Dolayısı ile Ö4'ün PB'si ile TAB'ını etkili şekilde birleştiremediği yani TPAB'ında eksiklikler olduğu görülmüştür. Ö4'ün bununla ilgili söylemi aşağıdaki gibidir:

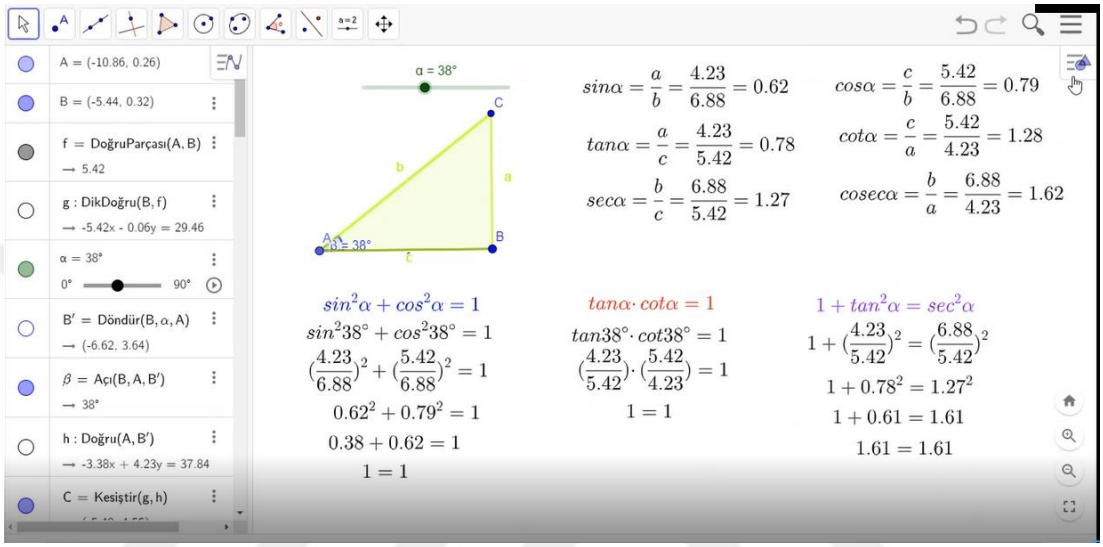
"Bu 5. soruda da pozitif, negatif olma durumu için de bu etkinlik üzerinden konuşulabilir. İşte '90°'yi geçiyorum, ne oluyor?' gibi, hani şu nerede pozitif nerede negatif hareket ettikçe. Bu canlandırmaya da alınabilir en baştan. 'Nasıl hareket ediyor? 'Nerede hangisi negatif? Nerede hangisi pozitif?' gibi konuşulabilir üzerinde."

Ö4 trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması konusunun öğretiminde ise öncelikle öğrencinin bildiği trigonometrik değerlerden hareket etmeyi planlamıştır. Örnek olarak, Şekil 138'deki sürgüyü 30º'ye sürükleyerek öğrencilerin trigonometrik fonksiyonların 30º'de aldıkları değerleri birim çember üzerinde gözlemlemelerini sağlayarak bunları karşılaştırmalarını isteyeceği görülmüştür. Ardından öğrencilerden düşüncelerini paylaşmalarını isteyerek benzer durumları 45º, 60º, 90º'ler için de gerçekeleştirmeyi planlamıştır. Ancak devamında, Ö4'ün "*Ben daha önce de söylemiştim bunu, ben derse hazırlıklı gitmeyi savunanlardanım. Buradaki hazırlıktan kastım, gerçekten hazırlık… Çat diye bunu anlatayım yapmam, belki belirli bir tecrübe sonrası bu yapılabilir bir şey ama şu an da böyle bir tecrübem yok."* ifadeleri öğretimi nasıl gerçekleştireceğini daha fazla detaylandıramadığını göstermiştir. Ayrıca AB bölümünde bahsedildiği gibi Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların karşılaştırması konusunda AB'sinde eksiklikler olduğu görülmüş, dolayısıyla AB, PB ve TB'si ile birleştiremediğinden TPAB'ının kapsamlı olmadığı tespit edilmiştir.

Ö4'e trigonometrik özdeşliklerle ilgili oluşturduğu etkinliğini (Bknz. Şekil 139) nasıl uygulamayı planladığı sorulduğunda ise etkinliğinde 3 farklı özdeşliği bir arada vermesi nedeniyle bu hali ile uygulamayı düşünmediği görülmüştür. Ö4 etkinliğine işaret kutuları ekleyerek ve her bir özdeşliği ayrı ayrı ekranlarda gözlemlenmesini sağlandıktan sonra uygulamayı planladığını belirtse de TB bölümünde de bahsedildiği gibi Ö4'ün işaret kutusu aracının kullanımını hatırlamadığı görülmüş, dolayısı ile etkinliğini istediği şekilde düzenleyememiştir. Ö4, etkinliklerin öğretimi konusunda ise *"Özdeşliği verip 'Bu doğru olabilir mi? veya 'Bunu ispatlayabilir misiniz?' gibi bir giriş sorusu sorulabilir. Sonrasında bunu sorarım dediğim bir şey yok şu an."* ifadesi ile sadece öğrencilere yöneltebileceği giriş sorularında bahsetmiş, öğretimi nasıl gerçekleştireceğini detaylandıramamıştır. Dolayısı ile Ö4'ün bahsedildiği gibi PB'sinde ve TB'sinde var olan eksiklikler nedeni ile AB'sini bu bilgileriyle birleştiremediği, TPAB'ında eksiklikler olduğu görülmüştür. Ö4'ün bununa ilgili söylemi aşağıdaki gibidir:

"Yani şimdi bu düzenlense güzel olur. Nasıl düzenlense? Mesela 3 tane özdeşlik var. Üçününki de ayrı ayrı verilse. Bu göster kapat kısmından bahsediyorum şu an. Hani $sin^2x + cos^2x =$

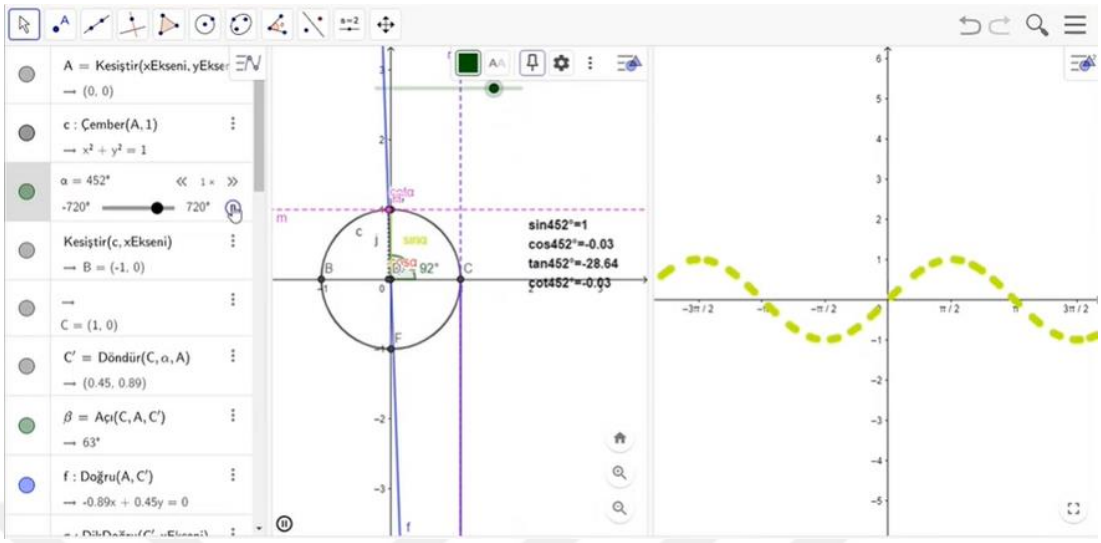
1 özdeşliği adım adım verilip diğer adımları tek tek sırasıyla açmak daha hoş olur diye düşünüyorum. Hep bu şekilde resim olarak vermektense ilerletmek daha hoş olur. Şu göster kapatı hatırlamıyorum… Özdeşliği verip 'Bu doğru olabilir mi? veya 'Bunu ispatlayabilir misiniz?' gibi bir giriş sorusu sorulabilir. Sonrasında bunu sorarım dediğim bir şey yok şu an."



Şekil 139. Ö4'ün trigonometrik özdeşlikler etkinliği ekran görüntüsü-2

Ö4'e trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin öğretimi için oluşturduğu etkinliği nasıl uygulamayı planladığı sorulmuştur. Örnek olarak, Ö4 Şekil 140'daki sürgüyü canlandırarak sinüs fonksiyonunun grafiğini çizdirmiş ve öğrencilerin grafik 1 ve grafik 2 pencerelerini gözlemlemelerini sağlayarak öğretimi gerçekleştirebileceğini belirtmiştir. Ö4'ten etkinliği nasıl uygulamayı planladığını detaylandırarak açıklaması istendiğinde ise etkinliği adım adım uygulayacağını söylese de bu adımlarda öğrencilere hangi soruları soracağından ya da öğrencilerden ne gibi cevaplar beklediğinden bahsetmemiştir. Dolayısı ile Ö4'ün PB'sini AB ve TB'si ile birleştiremediği yani TPAB'ının kapsamlı olmadığı görülmüştür.

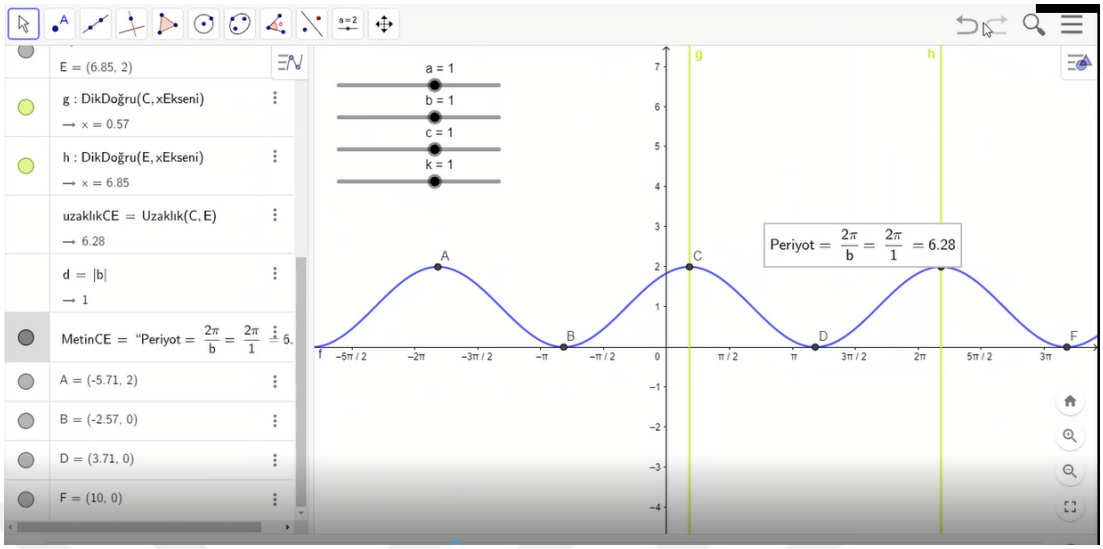
"Diğerlerini kapattım sadece sinüs açık kaldı. Sürgüyü oynattım, birim çemberde hareket etti aynı zamanda. Burada, metinde değerleri de görünüyor aynı zamanda. Ve yanda da, diğer pencerede de sinüsun grafiği oluşuyor. Yani bu şekilde anlatılabilir herhalde diye düşünüyorum… Adım adım işte mesela sinüs grafiği için, sinüsün grafiği bu şekildeymiş. Sırasıyla kapa aç. Sinüsu kapattım sonra kosinüsü açtım. Sonra kosinüsü tek başına bu şekildeymiş. Tanjant tek başına bu şekildeymiş gibi."



Şekil 140. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların grafikleri etkinliği ekran görüntüsü-2

Ö4'e trigonometrik fonksiyonların periyotlarının öğretimi için oluşturduğu etkinliği nasıl uygulamayı planladığı sorulmuştur. Ö4 Şekil 141'de verilen etkinliğini, öğrencilere periyot kavramı öğretilden sonra asin(bx+c)+k tipinde verilen bir trigonometrik fonksiyondaki kat sayıların periyoda etkisinin gözlemlenmesini sağlamak amacıyla uygulamayı planlamıştır. Bunun için etkinlikteki sürgüleri sırası ile kullanarak öğrencilere "*Gözlemlediğiniz bir değişim var mı? Ne yönde bir değişim var? Açıklar mısınız?"* gibi soracağı sorular yönelteceğinden bahsetse de devamında nasıl bir yol izleyeceğini açıklayamamıştır. Ö4'ün "*Derste hangi aşamasında kullanırım, önce neyi anlatırım falan yok şu an yani bende"* ifadesi de öğretimi nasıl gerçekleştireceğini detaylandıramadığını desteklemektedir. Dolayısı ile Ö4'ün diğer etkinliklere benzer şekilde bu etkinliğinde de PB'sini TB ve AB'si ile birleştiremediği, TPAB'ının kapsamlı olmadığı tespit edilmiştir.

> *"Bu etkinlik periyodu anlatmak için değil de periyodu anlattıktan sonra kullanılabilecek bir etkinlik bence. Katsayıların değişimiyle periyot nasıl değişiyoru göstermek asıl amacım. Bunu yaparken grafiğin nasıl değiştiğini de görüyorum… 'Gözlemlediğiniz bir değişim var mı? Ne yönde bir değişim var? Açıklar mısınız?' gibi. Bu tarz şeyler sorulabilir. Derste hangi aşamasında kullanırım, önce neyi anlatırım falan yok şu an yani bende."*



Şekil 141. Ö4'ün trigonometrik fonksiyonların periyotları etkinliği ekran görüntüsü-4

Özet olarak bakıldığında katılımcı Ö4'ün, trigonometri konuları özelinde, teknolojiyi entegre ederek etkinlikler oluşturduğu görülse de bahsedildiği gibi AB ve TB'sinde eksiklikler olduğu görülmüştü. Teknolojiyi kullanarak trigonometri konularının öğretimini nasıl gerçekleştirmeyi planladığını detaylandırarak açıklayamaması ise PB'sini TB ve AB'si ile etkili şekilde birleştiremediğini, TPAB'ında eksiklikler olduğunu ve kapsamlı olmadığı göstermiştir.

Sonuç olarak trigonometri konuları özelinde katılımcı Ö1'in; AB, PB ve TB'sini etkili şekilde birleşitirerek TPAB'ının kapsamlı olduğu, katılımcı Ö2'nin; PB'sinde eksiklikler nedeni ile PB'sini AB ve TB'si ile etkili şekilde birleştiremeyerek TPAB'ında eksiklikler olduğu, katılımcı Ö3'ün; trigonometrik fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonların işaretleri ve karşılaştırılması, trigonometrik özdeşlikler konuları özelinde AB, PB ve TB'sini birleştirerek TPAB'ını kullanabildiği ve kapsamlı olduğu, trigonometrik fonksiyonların grafikleri ve periyotları konuları özelinde ise PB'sindeki eksiklikler nedeni ile PB'sini AB ve TB ile etkili şekilde birleştiremeyerek TPAB'ının kapsamlı olmadığı, katılımcı Ö4'ün; AB, PB ve TB'sindeki eksiklikler nedeni ile bu bilgi türlerini etkili şekilde birleştiremeyerek TPAB'ında eksiklikler olduğu ve bu bilgisinin kapsamlı olmadığı tespit edilmiştir.

BÖLÜM V

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde bulgular yardımıyla araştırma problemine yönelik tartışma, sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

5.1. Tartışma

Bu tez çalışması kapsamında, matematik öğretmenliği lisansüstü öğrencilerinin trigonometri konusunda TPAB'ları detaylı olarak incelenmiştir. Ayrıca, lisansüstü öğrencilerinin alan, pedagoji ve teknoloji bilgilerinin, TPAB çerçevesinde yer alan her bir bilgi türünü nasıl etkilediği de incelenmiştir. Araştırma kapsamında, lisansüstü öğrencileri ile trigonometri konusundaki TPAB'larına ait her bir bilgi türünü ortaya çıkaracak görüşmeler yapılmış ve bu görüşmelerde var olan bilgi türleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Araştırma kapsamında katılımcıların trigonometri konusunda AB'lerini ortaya çıkarmak için trigonometrik fonksiyonların temeli olan fonksiyon ve özellikleri, açı çeşitleri, birim çember ve trigonometrik fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonların işaretleri, sıralanması, trigonometrik özdeşlikler, trigonometrik fonksiyonların periyot ve grafikleri konuları özelinde sorular sorulmuştur. Elde edilen bulgular sonucunda ilk olarak tüm katılımcıların fonksiyon ve özellikleri konusunda AB'lerinin yeterli olduğu görülmüştür. Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların dik üçgen ve birim çember üzerindeki tanımlarına dair AB'lerinin var olduğu görülürken bir katılımcının tanjant ve kotanjant fonksiyonlarını birim çember üzerinde çizerek gösterse de açıklayamadığı görülmüştür. Dolayısıyla öğretmenlerin birim çember ve trigonometrik oranlar konusundaki alan bilgilerinde eksiklikler olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu durum, Keser'in (2017) çalışmasının sonucunda belirttiği gibi bazı öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin birim çemberde sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarına göre daha iyi ifade edilmesi ile benzerlik göstermektedir. Ayrıca bu durum, Yiğit-Koyunkaya'nın (2016) çalışmasında tespit ettiği gibi öğretmenlerin trigonometrik oranlara ilişkin araçsal (kurala dayalı) anlayışa sahip olmaları ile Altıkardeş ve Yiğit-Koyunkaya'nın (2022) öğretmen adaylarının birim çember ve trigonometrik oranlar konularında, geometrik alışkanlıklarını kullanma konusunda yeterli düzeyde olmadıkları sonucuyla paralellik göstermektedir.

Katılımcıların derece, radyan ve esas ölçü kavramlarının tanımlanmasına dair AB'lerinin var olduğu görülmüştür. Ancak bir katılımcının derece ile radyan açı birimleri arasındaki ilişkiyi ezber bilgisini kullanarak açıklaması, başka bir katılımcının ise derece ile

radyan açı birimi arasındaki ilişkiyi veren orantıyı yanlış kurması AB'lerinde formüllere ve ezber bilgilere yer verdiğini göstermiştir. Dolayısı ile öğretmenlerin trigonometrideki açı birimlerinin ilişkisine yönelik alan bilgilerinde eksiklikler olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu durum, Fi'nin (2003) öğretmen adaylarının radyan ile derece açısı arasında ilişki kurarken sorun yaşadıkları sonucu ve Thompson ve diğerleri (2007) ile Yiğit-Koyunkaya (2016) çalışmalarında tespit ettiği gibi öğretmenlerin açı kavramına yönelik bilgilerinin sınırlı olduğu sonuçlarıyla paralellik göstermektedir.

Tüm katılımcıların trigonometrik fonksiyonların işaretlerinin belirlenmesi konusunda AB'lerinin yeterli olduğu görülmüştür. Birim çemberi kullanarak trigonometrik fonksiyonların değerlerinin değişimini ise üç katılımcı açıklayarak karşılaştırabilirken, bir katılımcının trigonometrik fonksiyonları karşılaştırmayı hatırlamadığını belirtmesi AB'sinde eksiklikler olduğunu ortaya koymuştur. Birim çember üzerinde alınan bir açının çemberi kestiği noktayı trigonometrik fonksiyonlar cinsinden belirtme ve verilen bir açının trigonometrik değerini dar açı cinsinden ifade etme konularında ise bir katılımcının, eylemlerinin bir kısmını ezber bilgisini kullanarak yapabildiği başka bir katılımcının ise yapamadığı görülmüştür. Bir başka AB bulgusu sonucu olarak, tüm katılımcıların $sin^2x + cos^2 = 1$, $tanx.cotx = 1$, $tanx = \frac{1}{cotx}$, $cotx = \frac{1}{tanx}$, $secx = \frac{1}{cosx}$, $cscx = \frac{1}{sinx}$ gibi trigonometrik özdeşlikleri bildikleri ve dik üçgen üzerinde gösterebildikleri görülmüştür. Yarım açı ve toplam fark formüllerini ise üç katılımcının bildikleri, bir katılımcının ise yarım açı formüllerini bildiği ancak toplam fark formüllerini hatırlamadığı bu nedenle AB'sinde eksiklikler olduğu tespit edilmiştir.

Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların periyotları ile ilgili bilgileri incelendiğinde ise tüm katılımcıların sinx, cosx, tanx, cotx trigonometrik fonksiyonların periyotlarını bildikleri ve grafik üzerinden açıklayabildikleri görülmüştür. Bunun yanında sin(ax+b) tipindeki trigonometrik fonksiyonların periyotlarının hesaplanmasında kullanılan periyot formülünü bir katılımcının hatırlamadığı, iki katılımcının ezbere bildikleri, sadece bir katılımcının ise örnek vererek formülü açıklayabildiği görülmüştür. Bu durum Fi'nin (2003) çalışmasında belirttiği gibi öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin trigonometride periyodiklik konusunda yeterli anlayışa sahip olmadıkları sonucu ile benzerlik göstermektedir. Ayrıca katılımcılardan bazılarının trigonometri konuları özelinde ezber bilgilere yer vermesi ve bazı bilgilerini hatırlamaması, Keser'in (2017) çalışmasında belirttiği gibi öğretmen adayları ve öğretmenlerin bazılarının anlamlı öğrenme yerine ezbere öğrenmeyi tercih ettiği, bazı kavramları ve bu kavramlar arası ilişkileri iyi kavrayamadıkları sonucu ile paralellik göstermektedir.

Son olarak tüm katılımcıların asin(bx+c)+k tipindeki bir trigonometrik fonksiyondaki a, b, c, k katsayılarının grafiğe etkilerini bildikleri görülmüştür. Ancak iki katılımcının, trigonometrik fonksiyonun x eksenindeki hareketinin katsayılar cinsinden ifadesini gösterirken hata yaptığı görülmüştür. Bu durum Keser'in (2017) çalışmasında olduğu gibi, bazı öğretmen adaylarının, trigonometrik fonksiyonların grafik çiziminde sorun yaşadıkları sonucu ile benzerlik göstermektedir.

Tüm AB bulguları sonucunda ise katılımcılardan birinin trigonometri konusunda oldukça kapsamlı AB'ye sahip olduğu görülmüştür. Bu durumun, katılımcının trigonometri konusuna olan ilgisi ve lisans öğrenimi boyunca bu konuda teknoloji destekli etkinlikler oluşturması ile ilgili olduğu düşünülmektedir. Dolayısı ile alan bilgisinin, öğretmenin konuya ilgisi ile ilişkisinin olduğunu düşünülmektedir. Ayrıca çalışmanın bir başka bulgusu olarak iki katılımcının AB'lerinin diğer katılımcılara göre daha kapsamlı olduğu görülmüştür. Bu durum, Dellalbaşı ve Soylu'nun (2012) çalışmasında az sayıda öğretmenin, öğreteceği konuyla ilgili alan bilgisinin yeterli düzeyde olduğunu tespit etmesi ile benzerlik göstermektedir.

Katılımcıların çalışma kapsamında herhangi uygulama yapmamaları nedeniyle trigonometri özelindeki bazı konuların öğretimine yönelik söylemlerinden ortaya çıkan PB ve PAB'ları incelenmiştir. Katılımcılardan birinin trigonometrik fonksiyonların öğretiminde öğrencilerin ön öğrenmelerini dikkate alarak, öğrencilere yönelteceği soru ve ipuçlarına yer vermesi PB'si ile AB'sini birleştirerek PAB'ının varlığına kanıt sunmuştur. Başka bir katılımcının ise öğretim deneyiminin olduğu trigonometri konularında PB ve PAB'a yönelik kanıt sunduğu görülse de öğretim deneyimine sahip olmadığı trigonometri konularında AB'ye sahip olsa da PB ve PAB'ında eksiklikler olduğu görülmüştür. Bu durum öğretim deneyiminin pedagojik bilginin yanı sıra alan bilgisini de desteklediğini göstererek AB ve PB'nin birleşiminden doğan PAB'ı etkilediğini ortaya koymaktadır. Bu duruma paralel olarak Lee ve Tsai'nin (2010) çalışmasına göre öğretim deneyimi olan öğretmenlerin pedagoji ve alan bilgilerinde yüksek yeterliliğe sahip olduklarını ortaya koymuştur. Katılımcılardan diğer ikisinin ise sınıf içi uygulama konusunda yeterli deneyime sahip olmaması nedeni ile hem trigonometri konu ve kazanımlarının sırasına hakim olmadığı hem de trigonometri konularının öğretimini nasıl gerçekleştireceği konusunda fikir sahibi olmadığı görülmüştür. Dolayısı ile genel olarak trigonometri konusunda PB ve PAB'larında eksiklik olduğu tespit edilmiştir. Ek

olarak bu iki katılımcıdan birisinin AB'sinde de eksiklikler olması nedeniyle AB ve PB'sini etkili şekilde birleştiremediği, PAB'ında eksiklikler olduğu tespit edilmiştir.

Katılımcıların TB'lerini ortaya çıkarmak için trigonometri konusu özelinde sorulan sorularda, GeoGebra yazılımını kullanma süreçleri incelenerek yazılımın araç çubuklarını nasıl kullandıkları ve araç çubuklarının işlevlerini bilip bilmedikleri detaylı olarak araştırılmıştır. Genel olarak katılımcıların trigonometri konusu özelinde sorulan sorular çerçevesinde dik üçgen, birim çember ve trigonometrik oranlarla ilgili GeoGebra yazılımını kullanarak çalışmalar yaptıkları ve etkinlikler oluşturdukları görülmüştür. Katılımcılar etkinlikleri oluşturulurken verilen ölçüde açı, sürgü gibi araçlar ile yazılımın dinamiklik özelliğinden faydalanmış; metin, işaret kutusu araçları ile de etkinliklerini desteklemişlerdir (bir katılımcı hariç). Ayrıca grafik penceresinin özelliklerini kullanarak x ve y eksenini hedeflediği özellikte ayarlayabilmiş, grafik 2 penceresini kullanarak birim çember ve trigonometrik fonksiyonların grafiklerini farklı pencerelerde eşzamanlı olarak (bir katılımcı hariç) göstermişlerdir.

Bunun yanında iki katılımcının, yazılımın bazı araç çubuklarının işlevlerini ve yerlerini unuttuğu görülmüştür. Örneğin bir katılımcı uzaklık ve uzunluk ölçme aracının yerini karıştırmış, metin aracının işlevini ve yerini unutmuş, işaret kutusu aracının nasıl kullanıldığı hatırlayamamış ve nesnenin özelliklerinden olan etiketi göster kapat, yakınlaştır uzaklaştır, nesneyi gösterme koşulu gibi özellikleri kullanmamıştır. Diğer katılımcı ise grafik 2 penceresini kullanmamış, grafik penceresinin özelliklerini kullanarak x ve y eksenini hedeflediği özellikle ayarlama ve işaret kutusu aracını kullanma konusunda zorluk çekmiştir.

TB bulgularına genel olarak bakıldığında katılımcılardan ikisinin yazılımın araç çubuklarının işlevlerini ve yerlerini iyi bildiği, kullanacağı araç çubuğunun yerini kolayca bulabildiği, GeoGebra yazılımını oldukça pratik bir şekilde kullandığı belirlenmiştir. Dolayısı ile TB'lerinin etkili ve trigonometri konusu özelindeki soru ve etkinliklerin çözümünde ve oluşturulmasında kapsamlı olduğu görülmüştür. Katılımcılardan birinin ise genel olarak yazılımın araç çubuklarının işlevlerini bilmesi, araç çubuklarını diğer katılımcılar kadar pratik şekilde olmasa da bularak kullanabilmesi nedeniyle TB'sinin yeterli olduğu görülmüştür. Katılımcılardan bir diğerinin ise bazı araç çubuklarının yerlerini karıştırması, bazılarının işlevini bilmemesi, GeoGebra yazılımını daha temel düzeyde kullanması; TB'sinin diğer katılımcılar kadar etkili olmadığını, trigonometri konusu özelindeki soru ve etkinliklerin çözümünde ve oluşturulmasında diğer katılımcılar kadar kapsamlı olmadığını göstermiştir.

Katılımcıların trigonometri konusunda TAB'larını ortaya çıkarmak için alan bilgileri ile hangi teknolojik aracı nasıl ve hangi amaçla kullandıkları detaylı olarak incelenmiştir. Bu bağlamda katılımcılardan GeoGebra yazılımını kullanarak sırasıyla trigonometrik fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonların işaretleri, trigonometrik fonksiyonların karşılaştırılması, trigonometrik özdeşlikler, trigonometrik fonksiyonların periyotları ve trigonometrik fonksiyonların grafikleri konuları özelinde etkinlik oluşturmaları istenmiştir.

Genel olarak katılımcılar trigonometri konusu özelinde oluşturdukları etkinliklerde, sürgü aracını kullanarak bir açı sürgüsü oluşturmuş ve bu açıya bağlı olacak şekilde birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonları tanımlamışlardır. Sürgü özelliği ile tek bir birim çember üzerinde birden fazla örnek vererek trigonometrik fonksiyonların birim çember üzerinde gözlemlenmesini sağlamışlardır. Aynı zamanda sürgünün dinamiklik özelliği sayesinde ise açı değiştikçe, trigonometrik fonksiyonların tanımlı oldukları yerleri, işaretleri ve değişimlerinin gözlemlenmesini sağlayarak AB'lerini TB'lerine entegre ederek kullanabildiklerini göstermişler başka bir deyişle TAB'larının varlığına kanıt sunmuşlardır. Ancak katılımcıların oluşturdukları etkinlikler detaylı şekilde incelendiğinde, benzer eylemleri yaparak benzer etkinlikler oluşturdukları görülse de TAB'larında farklılıklar olduğu tespit edilmiştir.

Örneğin, trigonometrik fonksiyonların tanımı ve karşılaştırılması konusunda AB'sinde eksiklik olan ve TB'si de diğer katılımcılar kadar kapsamlı olmayan bir katılımcının, trigonometrik fonksiyonların tanımı konusu özelinde oluşturduğu etkinliğini farklı trigonometri konularında da (fonksiyonların işaretleri ve karşılaştırılması) kullanılabileceğini ifade ederek yeni etkinlikler oluşturmadığı görülmüştür. Bu durumda katılımcının AB'si ile TB'sini etkili şekilde birleştiremediği dolayısıyla TAB'ının diğer katılımcılara göre daha az kapsamlı olduğu görülmüştür. Bu durum öğretmenlerin trigonometri konusunda TAB'ın kapsamlı olması için öncelikle AB ve TB'sinin kapsamlı olması gerektiğini göstermektedir.

Trigonometrik fonksiyonların işaretleri konusunda ise AB'si ve TB'si kapsamlı olan bir katılımcı, yazılımın dinamiklik özelliğini kullanmadan ezbere dayalı bir etkinlik oluşturarak AB'sini TB'sine etkili şekilde entegre edememiştir. Bu durum öğretmenlerin trigonometri konusunda TAB'ının kapsamlı olması için AB ve TB'sinin kapsamlı olması gerektiği gibi bu bilgi türlerinin etkili şekilde birleştirilmesi gerektiğini de göstermektedir.

Katılımcıların trigonometrik özdeşlikler konusu özelinde oluşturdukları etkinlikler incelendiğinde ise $sin^2x + cos^2x = 1$, $tanx.cotx = 1$ ve $1 + tan^2x = sec^2x$

özdeşliklerini GeoGebra programında gösterdikleri görülmüştür. Katılımcılardan birinin $sin^2x + cos^2 = 1$ özdeşliğini birim çember üzerinde göstererek TAB'ının varlığına dair bilgi sunduğu görülse de yazılımı kullanırken sorun yaşaması, TB'sini diğer katılımcılar kadar etkili şekilde kullanamaması, TAB'ının trigonometrik özdeşlikler konusu özelinde diğer katılımcılar kadar kapsamlı olmadığını göstermektedir. Katılımcının trigonometrik özdeşlikler konusunda AB'sinin kapsamlı olduğu göz önüne alındığında, bu durum öğretmenlerin trigonometri konusunda TAB'ın kapsamlı olması için AB'nin yanında TB'nin de gerekli ve önemli olduğunu göstermektedir.

Katılımcıların trigonometrik fonksiyonların grafikleri ve periyotları konularında oluşturdukları etkinlikler incelendiğinde ise tüm katılımcıların benzer şekilde birim çember ve trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin bir arada olduğu etkinlikler oluşturdukları görülmüştür. Katılımcılardan birinin trigonometrik fonksiyonların grafik ve periyot konuları özelinde diğer katılımcılara benzer etkinlikler oluşturduğu görülse de AB'sinde bahsedildiği gibi periyot formülünü tam olarak hatırlamaması, TB'sinde bahsedildiği gibi teknolojiyi diğer katılımcılar kadar etkili şekilde kullanamaması dolayısıyla AB'sini TB'sine etkili şekilde entegre edemediği ve TAB'ının diğer katılımcılara göre daha az kapsamlı olduğu gözlemlenmiştir. Bu durum, öğretmenlerin trigonometri konusunda TAB'ın kapsamlı olması için öncelikle AB ve TB'sinin kapsamlı olması gerektiğini ardından bu bilgi türlerinin etkili şekilde birleştirilmesi gerektiğini sonucunu desteklemektedir. Ek olarak katılımcının trigonometri konusunda TAB'ının az kapsamlı olması, GeoGebra yazılımını kullanarak trigonometri konularına yönelik farklı etkinlikler oluşturamadığını göstermektedir. Bu duruma benzer olarak Kırıkçılar (2017), öğretmenlerin dinamik bir yazılımla etkinlik hazırlama süreçlerinde TPAB kullanımını sergilemekte zorluk çektiklerini tespit etmiştir. Benzer şekilde Erduran ve Tataroğlu-Taşdan (2017) da öğretmen adaylarının matematik dersinde kullanılabilecek yazılımların farkında olmalarına rağmen kendilerinin bu yazılımları kullanma konusundaki yetersizliklerini dile getirerek teknolojiyi matematik eğitimine entegre etmede sıkıntılar yaşadığı sonucuna da ulaşmıştır.

TAB bulgularına genel olarak bakıldığında ise katılımcılardan birinin trigonometri konuları özelinde, var olan AB'sini TB'sini etkili şekilde entegre ederek oluşturduğunu etkinliklerde TAB'ının diğer katılımcılara göre daha kapsamlı olduğunu görülmüştür. Bu durumun katılımcının lisans öğrenimi boyunca derslerde ve ders dışı zamanlarında GeoGebra yazılımını kullanarak trigonometri konuları özelinde çalışmalar yapmış olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Dolayısı ile öğretmenlerin TAB'ının kapsamlı olmasının

teknoloji kullanım sıklığı ile ilgili olduğu söylenebilir. Buna benzer olarak Özgen ve diğerleri (2013), TPAB alt faktörlerinde teknoloji kullanım sıklığı algısına göre yapılan karşılaştırmalarda teknoloji kullanım sıklığı ile teknolojik bilginin yer aldığı yapıların ilişki içinde olduğunu ortaya koymuştur.

Katılımcıların söylemlerinden yola çıkarak trigonometri konusunda var olan TPB'leri 5 farklı başlık altında incelenmiştir: (1) zamandan tasarrufu, (2) anlamlı öğrenme, (3) kalıcı öğrenmeyi destekleme, (4) daha fazla sayıda örneklendirme ve (5) motive etme. Bu başlıkların oluşturulmasının sebebi; katılımcıların GeoGebra yazılımını öğretim aşamasında kullanımının zamandan tasarruf sağladığını, öğrencilere dinamik bir ortamda geometrik çizimleri ve matematiksel bilgileri inceleme fırsatı sunarak, matematiksel bilginin anlaşılır olmasını, öğrencilerin matematiksel bilgiler arasında ilişki kurarak ezber yapmaktan kaçınmasını ve matematiksel genellemelere ulaşmasını sağladığını, bilginin kalıcı öğrenilmesini desteklediğini, matematiksel bilginin daha fazla örneklendirilmesini sağladığını, öğrenciyi derse motive edebileceğini, dersi daha zevkli hale getirebileceğini belirtmesidir.

TPB bulguları sonucunda, katılımcıların yazılımı öğretimde kullanmanın daha çok; zaman tasarrufu, anlamlı öğrenme ve daha fazla sayıda örnek vermeyi sağladığına dair örnekler sunduğu görülmüştür. Tüm katılımcıların ise ortak olarak yazılımın kalıcı öğrenmeyi desteklediğine dair düşüncelerinin olduğu tespit edilmiştir. Katılımcılardan birinin, verdiği örnekler ve söylemlerinden teknolojinin trigonometri öğretimine olan etkilerini ve öğretimi nasıl değiştirebileceğini bildiği dolayısıyla TPB'sinin kapsamlı olduğu görülürken, diğer katılımcıların PB ve TB'sinde var eksiklikler nedeni ile TPB'sinde de eksiklikler olduğu tespit edilmiştir. Dolayısı ile öğretmenlerin trigonometri konusunda TPB'sinin kapsamlı olması için TB ve PB'sinin kapsamlı olması gerekmektedir.

Katılımcıların trigonometri konusunda TPAB'ını incelemek amacıyla trigonometri konuları özelinde oluşturdukları etkinlikleri nasıl uygulamayı planladıkları sorulmuştur. Katılımcılardan elde edilen veriler doğrultusunda trigonometri konusunda TPAB'larında farklılıklar olduğu görülmüştür. TPAB bulgularına bakıldığında, katılımcılardan birinin trigonometri konusu özelinde, teknolojiyi konuya kolaylıkla entegre edebildiği ve oluşturduğu etkinlikleri nasıl uygulamayı planladığı konusundaki açıklamalarında öğretime yönelik pedagojik tekniklere yer vererek PB'sini AB ve TB'si ile etkili şekilde birleştirmiş, TPAB'ının kapsamlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca katılımcının AB, PB ve TB'lerinin ayrı ayrı kapsamlı olduğu, bu bilgilerin ikişerli üçerli birleşimleri sonucu oluşan PAB, TAB, TPB ve TPAB'ının da kapsamlı olduğu görülmüştür. Bunun sonucunda ise öğretmenlerinin

trigonometri konusunda TPAB'ının kapsamlı olması için öncelikle tekli bilgi türlerinin (AB, PB, TB) kapsamlı olması gerektiği ve bu bilgi türlerinin etkili şekilde birleştirilmesi gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

Bir diğer katımcının; trigonometri konularında TAB'ı kapsamlı olmasına rağmen, PB'sindeki eksiklik nedeni ile PB'sini TAB'ına etkili şekilde entegre edemediği, TPAB'ında eksiklikler olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu durumda öğretmenlerin trigonometri konusunda TPAB'ının kapsamlı olması için AB ve TB'si kapsamlı olsa da PB'sinin de kapsamlı olması gerektiği ve bu bilgi türlerini etkili şekilde birleştirmesi gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Buna paralel olarak Yiğit-Koyunkaya ve Tataroğlu-Taşdan (2019), ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının TPAB düzeylerini incelediği çalışmasının sonucunda, öğretmen adaylarının var olan AB ile TB'lerini birleştirebildiklerini ancak bu bilgilerini hangi pedagojik tekniklerle birleştirecekleri konusunda sınırlı bilgiye sahip olduklarını tespit etmiştir. Benzer olarak Polly (2011) da matematik öğretiminde teknoloji kullanan öğretmenlerin TAB bilgisinde iyi olduklarını ancak PB'lerindeki eksikliğin PAB ve TPAB'larında eksikliğe neden olduğunu ortaya koyması elde edilen bulgular ile paralellik göstermektedir.

Bir başka katılımcının; trigonometrinin bazı konularında (trigonometrik fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonların işaretleri ve karşılaştırılması, trigonometrik özdeşlikler) TPAB'ı kapsamlı iken bazı konularda (trigonometrik fonksiyonların grafik ve periyotları) TPAB'ının kapsamlı olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Katılımcının trigonometrik fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonların işaretleri ve karşılaştırılması, trigonometrik özdeşlikler konularında AB, PB ve TB'ye sahip olduğu ve bu bilgilerini etkili şekilde birleştirebildiği, TPAB'ının kapsamlı olduğu görülmüştür. Ancak katılımcının trigonometrik fonksiyonların grafik ve periyotları konusunda AB'si ve TB yeterli düzeyde olmasına rağmen bu konularda herhangi bir öğretim deneyiminin olmaması nedeniyle PB'sinde eksiklik olduğu görülmüş, PB'sini AB ve TB'si ile etkili şekilde birleştiremeyerek PAB'ında ve TPAB'ında eksiklikleri olduğu tespit edilmiştir. Bu durum öğretim deneyiminin PB'nin yanı sıra AB'yi de desteklediğini göstererek PAB ve TPAB'ı da etkilediğini göstermektedir. Bu duruma paralel olarak Jang ve Tsai'ın (2012) çalışmasında öğretim deneyimi olan öğretmenlerin düşük olanlara göre TBAB düzeyinin daha yüksek olduğu tespit edilmiştir.

Bir diğer katılımcının ise, trigonometri konusu özelinde teknolojiyi entegre ederek etkinlikler oluşturduğu görülse de bahsedildiği gibi AB ve TB'sinde var olan eksiklikler TB'sini AB'sine etkili şekilde entegre edemediğini dolayısıyla TAB'ının diğer katılımcılara göre daha az kapsamlı olduğunu göstermişti. Ayrıca yine bahsedildiği gibi katılımcının

trigonometri konularının öğretimini nasıl gerçekleştireceğine yönelik güçlük yaşadığı görülmüş ve hem PB hem de PAB'ında eksiklikler olduğu tespit edilmişti. Dolayısı ile katılımcının AB, PB ve TB'lerinde var olan eksiklikler, bu bilgilerin birleşiminden doğan olan PAB, TAB, TPB'lerinin eksik olduğu dolayısıyla TPAB'ının da eksik olduğu ve diğer katılımcılar kadar kapsamlı olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu durum öğretmenlerin trigonometri konusunda TPAB'ının kapsamlı olması için öncelikle tekli bilgi türlerinin (AB, PB, TB) geliştirilmesi gerektiğini, ardından bu bilgi türlerinin etkili şekilde birleştirilmesi gerektiğini ortaya koymaktadır. Bu durum Pamuk ve diğerlerinin (2012) öğretmen adaylarıyla yaptığı araştırmasındaki temel alanlarda bilgi kazandırmanın yanı sıra bu bilgileri diğer bilgiler ile ilişki kurarak kullanabilmesinin önemli olduğu sonucuyla paralellik göstermektedir.

Ayrıca çalışmanın sonunda katılımcıların daha çok PB'lerinde eksiklik olduğu görülmüş ve bu durumun PAB ve TPAB'larını olumsuz etkilediği tespit edilmiştir. Bu durum Niess'in (2005) araştırmasında, öğretmen adaylarının teknolojiyle birlikte kullanılacak öğretimsel stratejileri konusunda yetersiz kaldıkları sonucu ile benzerlik göstermektedir. Katılımcıların hepsinin lisansüstü öğrenci olması ve öğretmenlik deneyimlerinin yok denecek kadar az olması göz önünde bulundurulduğunda bu durum öğretmen adaylarına lisans öğrenimi sırasında verilen pedagoji eğitiminin geliştirilmesi gerektiğini düşündürmektedir. İnce (2015) de bu görüşü destekler şekilde çalışmasında öğretmen adaylarına verilen pedagoji eğitimin geliştirilmesi gerektiğini vurgulamıştır.

Bununla birlikte bu çalışmaya katılan lisansüstü öğrencilerinin, aynı fakülteden mezun olmalarına rağmen TPAB'larında farklılıklar olduğu görülmüştür. Bu durum Karataş (2015) ve Burmabıyık (2014) çalışmalarına katılan öğretmen adaylarının eğitim süresince ortak süreçlerden geçmeleri nedeni ile fakülte türüne göre TPAB'larında anlamlı farklılık olmadığı düşünceleri ile ters düşmektedir. Bu doğrultuda hali hazırda yeni mezun olan geleceğin öğretmenlerinin fakültelerde aldıkları eğitimin içeriğinin geliştirilmesi gerekmektedir. Eğitim bilimleri fakültelerinin PAB açısından var olan sorunları (Kılıç, 2011) ve TPAB'ın gelişimi için öncelikle tek bilgi türlerinin gelişmesi gerektiği göze önüne alınırsa fakültelerin alan, pedagoji ve teknoloji derslerini öğrencilerin TPAB'ını geliştirmeye yönelik düzenlenmesi gerekmektedir. Fakülteler, geleceğin öğretmenlerini sadece hangi matematik kavramlarının teknoloji yoluyla en iyi öğrenildiği/öğretildiği konusunda bilgilendirmekle kalmamalı, aynı zamanda çeşitli farklı teknolojileri içeren ders planları geliştirme ve uygulama konusunda deneyim kazanmasını sağlamalıdır (Powers & Blubaugh, 2005). Ayrıca fakültelerden mezun

olmuş öğretmenlerin de hem hizmet öncesi hem de hizmet içi öğretmenlik eğitimleri ile çeşitli teknolojik araçların kullanımı, eğitimleri ile bütünleştirilerek desteklenmeledir (İdil & Narlı, 2022).

5.2. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada matematik öğretmenliği lisansüstü öğrencilerinin, trigonometri konusunda alan, pedagoji ve teknoloji bilgilerinin birbirinden farklı düzeyde olduğu dolayısıyla bu bilgi türlerinin ikişerli ve üçerli birleşimleri olan PAB, TAB, TPB ve TPAB'larında da farklılıklar olduğu görülmüştür. Aynı zamanda bu çalışma ile lisansüstü öğrencilerin tekli bilgi türlerinin (alan, pedagoji ve teknoloji bilgisi), teknolojiyi entegre edebilme becerilerinin, öğretmenlik tecrübelerinin, trigonometri konusuna olan ilgilerinin öğrencilerin trigonometri konusundaki TPAB'larını etkilediği sonucuna ulaşılmıştır.

Bu çalışma 4 lisansüstü öğrenci ile sınırlıdır. Katılımcıların yeni mezun öğretmen olmaları nedeni ile öğretmenlik deneyimleri çok sınırlı seviyededir. Dolayısı ile öğretmenlik deneyimi daha fazla olan katılımcılarla yapılacak çalışmalardan daha farklı sonuçlar elde edilebileceği düşünülmektedir. Bunun yanı sıra bu çalışmada, katılımcıların sınıf içi uygulama süreçleri gözlemlenememiş dolayısı ile öğretmenlerin PB'lerin (ve ilgili bilgi türleri) belirleme konusu çalışmanın sınırlılığı olarak ortaya çıkmıştır. Bu nedenle yapılacak olan yeni çalışmalarda, öğretmenlerin sınıf içi uygulama süreçleri ile birlikte TPAB'ları daha derin bir şekilde incelenebilir. Ayrıca bu incelemelerde öğretmenlerin, trigonometri konusunda var olan alan, pedagoji ve teknoloji bilgilerinin gelişimleri hedeflenerek PAB, TAB, TPB ve TPAB'larının gelişimleri amaçlanabilir. Bu incelemelerde öğretmenlerin TPAB'larını geliştirmek için çeşitli hizmet içi programlar, seminerler ve eğitimler de düzenlenebilir. Ek olarak, Shulman'ın (1987) önerisine göre her disiplinin kendine özgü alan ve pedagoji bilgisi olması nedeniyle matematikte yer alan farklı konular da ele alınarak öğretmenlerin, öğretmen adaylarının ve lisansüstü öğrencilerin TPAB'ları incelenebilir.

KAYNAKÇA

Ağaç, G. (2009). *Lise öğrencilerinin trigonometri öğrenme alanında grafik hesap makinesi kullanımının akademik başarıya ve problem çözme becerisine etkisi* [Yüksek lisans tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi].

Akkaya, E. (2009). *Matematik öğretmen adaylarının türev kavramına ilişkin teknolojik pedagojik alan bilgilerinin öğrenci zorlukları bağlamında incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi].

Akkoç, H. (2011). Investigating the development of prospective mathematics teachers' technological pedagogical content knowledge. *Research in Mathematics Education, 13*(1), 75-76. https://doi.org/10.1080/14794802.2011.550729

Akkoç, H. (2013). Integrating technological pedagogical content knowledge (TPCK) framework into teacher education. In *Conference of the International Journal of Arts and Science* (Vol. 6, No. 2, pp. 263-270).

Akkoç, H., & Akbaş-Gül, N. (2010). Analysis of a Teaching Approach Aiming at Eliminating Student Difficulties with Radian. *Ankara University, Journal of Faculty of Educational Sciences, 43*(1), 97-129. https://doi.org/10.1501/Egifak_0000001192

Akkoç, H., & Özmantar, M. F. (2012). A functional taxonomy of multiple representations: A tool for analysing Technological Pedagogical Content Knowledge. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 16-17 November, Cambridge*, 1-6.

Akyüz, D. (2016). Farklı öğretim yöntemleri ve sınıf seviyesine göre öğretmen adaylarının tpab analizi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 7*(1), 89-111.

Altıkardeş, E., & Yiğit-Koyunkaya, M. (2022). Katı cisimler konusuna yönelik tasarlanan teknoloji destekli bir öğretim sürecinin değerlendirilmesi. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 17*(1), 41-76. https://doi.org/10.17860/mersinefd.715862

Atasoy, E., Uzun, N., & Aygün, B. (2015). Dinamik matematik yazılımları ile desteklenmiş öğrenme ortamında öğretmen adaylarının teknolojik pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi. *Bartın University Journal of Faculty of Education, 4*(2), 611-633. https://doi.org/10.14686/buefad.v4i2.5000143622

Baran, E., & Canbazoğlu-Bilici, S. (2015). Teknolojik pedagojik alan bilgisi (TPAB) üzerine alanyazın incelenmesi: Türkiye örneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *30*(1), 15-32.

Blackett, N. (1990). *Developing understanding of trigonometry in boys and girls using a computer to link numerical and visual representations* [Unpublished doctoral dissertation]. University of Warwick.

Brown, S. A. (2005). *The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine* (Publication No. 3233908) [Doktoral dissertation, Illinois State University]. ProQuest Dissertations & Theses Global.

Brush, T., Glazewski, K., Rutowski, K., Berg, K., Stromfors, C., Hernandez Van-Nest,…Sutton, J. (2003). Integrating technology in a field-based teacher training program: The PT3@ ASU project. *Educational Technology Research and Development*, *51*, 57-72. https://doi.org/10.1007/BF02504518

Bornstein, N. (2020). Teaching transformations of trigonometric functions with technology. *Journal of Interactive Media in Education*, *2020*(1). https://doi.org/10.5334/jime.503

Bowers, J. S., & Stephens, B. (2011). Using technology to explore mathematical relationships: A framework for orienting mathematics courses for prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 285-304. https://doi.org/10.1007/s10857-011-9168-x

Bozkurt, A., & Cilavdaroğlu, A. K. (2011). Matematik ve sinif öğretmenlerinin teknolojiyi kullanma ve derslerine teknolojiyi entegre etme algilari. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *19*(3), 859-870.

Burmabıyık, Ö. (2014). *Öğretmenlerin teknolojik pedagojik içerik bilgilerine yönelik öz-yeterlilik algılarının çeşitli değişkenler açısından incelenmesi (Yalova İli Örneği)* [Yüksek lisans tezi, Sakarya Üniversitesi].

Cangül, H. A. (2022). *Okul öncesi öğretmenlerinin 21. yüzyıl becerileri ile teknolojik pedagojik alan bilgileri (TPAB) arasındaki ilişkinin incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi].

Chen, R. J. (2010). Investigating models for preservice teachers' use of technology to support student-centered learning. *Computers ve Education*, *55*(1), 32-42. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2009.11.015

Chmiliar, l. (2010). Multiple-case designs. A. J. Mills, G. Eurepas ve E. Wiebe (Ed.), *Encyclopedia of case study research* (pp. 582-583) içinde. SAGE Publications.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry ve research design: Choosing among five approaches (2. Baskı).* SAGE Publications.

Davis, C. E. (2003). *Prospective teachers' subject matter knowledge of similarity* (Publication No. 3137107) [Doktoral dissertation, North Carolina State University]. ProQuest Dissertations & Theses Global.

Dellalbaşı, O., & Soylu, Y. (2012). Jigsaw ve grup araştırması tekniklerinin ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin matematik derslerindeki akademik başarılarına etkisi. *The Journal of Academic Social Science Studies*, *5*(7), 229-245.

Delice, A., & Aydın, E. (2015). Trigonometri konusunda kavram yanılgıları ve çözüm önerileri. *researchgate. net*.

Demetgül, Z. (2001). *Trigonometri konusundaki kavram yanılgılarının tespit edilmesi* [Yüksek lisans tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi].

Demiraslan, Y., & Koçak-Usluel, Y. (2008). ICT integration processes in Turkish schools: Using activity theory to study issues and contradictions. *Australasian Journal of Educational Technology*, *24*(4). https://doi.org/10.14742/ajet.1204

Dikmen, C., & Demirer, V. (2016). Türkiye'de Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi Üzerine 2009-2013 yılları arasında yapılan çalışmalardaki eğilimler. *Turkish Journal of Education*, *5*(1), 33-46. https://doi.org/10.19128/turje.77632

Doğan, A. (2001). *Genel liselerde okutulan trigonometri konularının öğretiminde öğrencilerin yanılgıları, yanlışları ve trigonometri konularına karşı öğrenci tutumları üzerine bir araştırma* [Yüksek lisans tezi, Selçuk Üniversitesi].

Durmuş, S. (2004). Matematikte öğrenme güçlüklerinin saptanması üzerine bir çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *2*(7), 65-79.

Ekici, C. (2018). *Öğretmenlerin teknolojik pedagojik alan bilgisi (TPAB) ile sınıf yönetimi becerileri arasındaki ilişki (Çanakkale ili örneği)* [Yüksek lisans tezi, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi].

Emlek, B. (2007). *Dinamik modelleme ile bilgisayar destekli trigonometri öğretimi* [Yüksek lisans tezi, Selçuk Üniversitesi].

Erduran, A., & Tataroğlu-Taşdan, B. (2017). Matematik öğretmen adaylarının teknolojiye yönelik görüşlerinin ve teknolojiyi derslerine entegre etme süreçlerinin incelenmesi. *Eğitim Teknolojisi Kuram ve Uygulama* , *8*(1), 273-296. https://doi.org/10.17943/etku.341421

Ergene, B. (2011). *Matematik öğretmen adaylarının türev kavramına ilişkin teknolojik pedagojik alan bilgilerinin çoklu temsiller bileşeninde incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi].

Fi, C. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: Subjectmatter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy* (Publication No. 3097526) [Doktoral dissertation, The University of Iowa]. ProQuest Dissertations & Theses Global.

Garofalo, J., Drier, H., Harper, S., Timmerman, M.A., & Shockey, T. (2000). Promoting appropriate uses of technology in mathematics teacher preparation. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 1*(1), 66-88.

Gooya, Z., & Rabanifard, A. A. (2008). Students' conceptions of trigonometric concepts. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, ve A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*. (Vol 1 pp. 264). Mexico: Cinvestav-UMSNH.

Graham, C. R., Burgoyne, N., Cantrell, P., Smith, L., St. Clair, L., & Harris, R. (2009). TPACK development in science teaching: Measuring the TPACK confidence of in-service science teachers. *TechTrends, Special Issue on TPACK*, *53*(5), 70-79. https://doi.org/10.1007/s11528-009-0328-0

Grossman, P. L. (1990). The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education. Teachers College Press.

Guerrero, S. (2010). Technological pedagogical content knowledge in the mathematics classroom. *Journal of Computing in Teacher Education*, *26*(4), 132-139..

Güntekin, H., & Akgün, L. (2011). Trigonometrik kavramlarla ilgili öğrencilerin sahip oldukları hatalar ve öğrenme güçlükleri. *Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi 1*(40), 98-113.

Gür, H. (2009). Trigonometry Learning. *New Horizons in Education*, *57*(1), 67-80.

Haciomeroglu, E. S., Bu, L., Schoen, R. C., & Hohenwarter, M. (2011). Prospective teachers' experience in developing lessons with dynamic mathematics software. *InternationalJournal for Technology in Mathematics Education*, *18*(2), 71-82.

Harris, J., Mishra, P., & Koehler, M. J. (2009). Teachers' technological pedagogical content knowledge and learning activity types: Curriculum-based technology integration reframed. Journal of Research on Technology in Education, *41*(4), 393-416. https://doi.org/10.1080/15391523.2009.10782536

Hertel, J., & Cullen, C. (2011). Teaching trigonometry: A directed length approach. In *Proceedings of the 33rd annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 1400-1407).

Hicks, T. (2006). Expanding the conversation: A commentary toward revision of Swenson, Rozema, Young, McGrail, and Whitin. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *6*(1), 46-55.

İdil, F. H., & Narlı, S. (2022). A research on the interaction between technological pedagogical content knowledge and content knowledge for teaching of mathematics teacher candidates. *E-Uluslararası Pedandragoji Dergisi*, *2*(1), 33-47.

İnan, C. (2009). *Yapılandırmacı öğrenme yaklaşımının öğrencilerin trigonometriyi öğrenme düzeylerine ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisi* [Doktora tezi, Dicle Üniversitesi].

İnce, B. (2015). *Matematik öğretmenlerinin teknolojinin öğretim süreçlerine entegrasyonunda yaşadığı güçlüklerin teknolojik pedagojik alan bilgisi (TPAB) çerçevesinde belirlenmesi* [Yüksek lisans tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi].

İşman, A. (2002). Sakarya ili öğretmenlerinin eğitim teknolojileri yönündeki yeterlilikleri. *Sakarya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, (3).

Jang, S. J., & Tsai, M.F. (2012). Exploring the TPACK of Taiwanese elementary mathematics and science teachers with respect to use of interactive whiteboards. *Computers and Education, 59*(2), 327-338. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.02.003

Kabakci-Yurdakul, I., Odabasi, H. F., Kilicer, K., Coklar, A. N., Birinci, G., & Kurt, A. A. (2012). The development, validity and reliability of tpack-deep: A technological pedagogical content knowledge scale. *Computers and Education, 58*(3), 964–977. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.10.012

Kabakçı-Yurdakul, I., & Odabaşı, H. F. (2013). Teknopedagojik eğitim modeli. Kabakçı-Yurdakul, I. (Ed.), Teknopedagojik eğitime dayalı öğretim teknolojileri ve materyal tasarımı (s. 40-67) içinde. Anı Yayıncılık.

Kafyulilo, A., Fisser, P., Pieters, J., & Voogt, J. (2015) ICT Use in science and mathematics teacher education in Tanzania: developing technological Pedagogical Content Knowledge. *Australasian Journal of Educational Technology*, *31*(4). https://doi.org/10.14742/ajet.1240

Kaleli-Yılmaz, G. (2015). Türkiye'deki teknolojik pedagojik alan bilgisi çalışmalarının analizi: Bir meta-sentez çalışması. *Eğitim ve Bilim* , *40*(178), 103-122. https://doi.org/10.15390/EB.2015.4087

Kaleli-Yılmaz, G., Ertem, E., & Güven, B. (2010). Dinamik geometri yazılımı Cabri'nin 11.sınıf öğrencilerinin trigonometri konusundaki öğrenmelerine etkisi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *1*(2), 200-216.

Karasu, F. (2019). *Türk dili ve edebiyatı öğretmenlerinin teknopedegojik alan bilgisi (tpab) yeterliliklerinin çeşitli değişkenler bakımından incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Atatürk Üniversitesi].

Karakuş, D. (2019). *Ders imecesi yöntemiyle matematik öğretmeni adaylarının teknolojik pedagojik alan bilgilerinin gelişimlerinin incelenmesi: Trigonometri örneği* [Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi].

Karataş, A. (2015). *Lise öğretmenlerinin Fatih Projesi'ni uygulamaya yönelik teknolojik pedagojik alan bilgisi yeterliliklerinin incelenmesi: Adıyaman ili örneği* [Doktora tezi, Sakaraya Üniversitesi].

Karataş, İ., Pişkin-Tunç, M., Demiray, E., & Yılmaz, N. (2016). Öğretmen adaylarının matematik öğretiminde teknolojik pedagojik alan bilgilerinin geliştirilmesi. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 16*(2), 512-533. https://doi.org/10.17240/aibuefd.2016.16.2-5000194940

Kaya, E. (2014). *Birleştirilmiş sınıflı ilkokullarda görev yapan öğretmenlerin teknolojik pedagojik alan bilgisi seviyelerinin belirlenmesi* [Yüksek lisans tezi, Fırat Üniversitesi].

Kaya, Z., & Yılayaz, Ö. (2013). Öğretmen eğitimine teknoloji entegrasyonu modelleri ve teknolojik pedagojik alan bilgisi. *Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi*, *4*(8), 57-83.

Kaya, Z., Emre, İ., & Kaya, O. N. (2010). Sınıf öğretmeni adaylarının teknolojik pedagojik alan bilgisi (TPAB) açısından öz-güven seviyelerinin belirlenmesi. 9. *Sınıf Öğretmenliği Eğitimi Sempozyumu*, *20*(22), 643-651.

Kendal, M., & Stacey, K. (1998). Teaching trigonometry. *Aust Math Teach*, *54*(1), 34–39.

Kissane, B., & Kemp, M. (2009). *Teaching and learning trigonometry with technology*. 14th Asian Technology Conference in Mathematics. https://researchportal.murdoch.edu.au/esploro/outputs/conferencePaper/Teaching-and-learning-trigonometry-with-technology/991005543486707891#file-0

Keser, S. (2017). *Matematik öğretmen adaylarının trigonometri kavramına ilişkin bilişsel yapılarının incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi].

Kılıç, Ç. (2011). Küreselleşen Dünyada Dijital Bölünme Sorunu. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *13*(1), 81-91.

Kırıkçılar, R. G. (2017). *Matematik öğretmenlerinin dinamik bir yazılım ile etkinliklerini hazırlarken teknolojik pedagojik alan bilgisi kullanım durumlarının incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Bülent Ecevit Üniversitesi].

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *9*(1), 60-70.

Koehler, M. J., Mishra, P., & Yahya, K. (2007). Tracing the development of teacher knowledge in a design seminar: Integrating content, pedagogy and technology. *Computers ve Education*, *49*(3), 740-762. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2005.11.012

Kurt, H., Ekici, G., Aksu, Ö., Aktaş, M., & Gökmen, A. (2013). Öğretimde planlama ve değerlendirme dersinin öğretmen adaylarının öz-yeterlik algısına etkisinin incelenmesi. *Milli Eğitim Dergisi*, *43*(200), 28-48.

Kültür, M. N., Kaplan, A., & Kaplan, N. (2008). Ortaoğretim Öğrencilerinde Trigonometri Öğretiminin Değerlendirilmesi. *Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17, 202-211.

Lee, M. H., & Tsai, C. C. (2010). Exploring teachers' perceived self efficacy and technological pedagogical content knowledge with respect to educational use of the World Wide Web. *Instructional Science, 38,* 1-21. https://doi.org/10.1007/s11251-008-9075-4

Marchi, D. J. (2012). *A study of the understanding of the Sine function through representations and the process and object perspectives* [Unpublished master's thesis]. Ohio State University.

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Rico, L. (2019). Meaning and understanding of school mathematical concepts by secondary students: The study of sine and cosine . *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(12). https://doi.org/10.29333/ejmste/110490

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], (2018). Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı. Ankara.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A new framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Moore, K. C. (2009). Trigonometry, technology, and didactic objects. In S. L. Swars, D. W. Stinson ve S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1480-1488). Atlanta, GA: Georgia State University.

Moore, K. C. (2010). *The role of quantitative reasoning in precalculus students learning central concepts of trigonometry* (Publication No. 3425753) [Doktoral dissertation, Arizona State University]. ProQuest Dissertations & Theses Global.

Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 225–245. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9450-6

Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 102–138. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.1.0102

Mutluoğlu, A. (2012). *İlköğretim matematik öğretmenlerinin öğretim stili tercihlerine göre teknolojik pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi].

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston: VA: Author.

Niess, M. L. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: developing a technology pedagogical content knowledge. *Teaching and Teacher Education*, *21*(5), 509-523.

Niess, M. L. (2006). Guest Editorial: Preparing teachers to teach mathematics with technology. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *6*(2), 195-203.

Nyikahadzoyi, M. (2015). Teachers' knowledge of the concept of a function: A theoretical framework. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13, 261-283. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9486-9

Ottenbreit-Leftwic, A., & Ertmer, P. A. (2010). Exemplary technology-using teachers: Perceptions of factors influencing success. *Journal of Computing in Teacher Education*, *23*(2), 55-61. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2010.06.002

Ozgun-Koca, S. A., Meagher, M., & Edwards, M. T. (2010). Preservice teachers' emerging TPACK in a technology-rich methods class. *Mathematics Educator*, *19*(2), 10-20.

Özdemir, N. & Erduran, A. (2019). Matematik öğretmenlerinin teknolojik pedagojik alan bilgisine ilişkin yeterliliklerinin değerlendirilmesi. *Manisa Celal Bayar Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *7*(1), 29-47.

Özgen, K., Aygün, N., & Hazanay, H. (2017). Lise öğrencilerinin trigonometrik fonksiyonlarda grafik çizme becerileri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *11*(2), 52-81. https://doi.org/10.17522/balikesirnef.373141

Özgen, K., Narlı, S., & Alkan, H. (2013). Matematik öğretmen adaylarının teknolojik pedagojik alan bilgileri ve teknoloji kullanım sıklığı algılarının incelenmesi.*Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi, 12* (44), 31-51.

Özgen, K., Aygün, N., & Hanazay, H. (2017). Lise öğrencilerinin trigonometrik fonksiyonlarda grafik çizme becerileri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED), 11*(2), 52-81. https://doi.org/10.17522/balikesirnef.373141

Patton, M. Q. (2014). *Qualitative research & evaluation methods: Integrating theory and practice*. Sage Publications.Pamuk, S., Ülken A. & Dilek N. Ş. (2012). Öğretmen adaylarının öğretimde teknoloji kullanım yeterliliklerinin teknolojik pedagojik içerik bilgisi kuramsal perspektifinden incelenmesi. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi. 9*(17). 415-438.

Peker, Ö. (1985). *Ortaöğretim kurumlarında matematik öğretiminin sorunları, matematik öğretimi ve sorunları.* TED Yayınları.

Polly, D. (2011). Developing teachers' technological, pedagogical, and content knowledge (TPACK) through mathematics professional development. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *18*(2).

Ruthven, K. (2009). Towards a naturalistic conceptualisation of technology integration in classroom practice: The example of school mathematics. *Education ve Didactique, 3*(1), 131-159. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.434

Sevgi, S. (2020). *Trigonometrik fonksiyonların grafiklerini yorumlama konusunun GeoGebra ile tasarlanmış etkinliklerle öğretiminin öğrencilerin akademik başarısına ve kalıcılığa etkisi* [Yüksek lisans tezi, Atatürk Üniversitesi].

Schmidt, D. A., Baran, E., Thompson, A. D., Mishra, P., Koehler, M. J., & Shin, T. S. (2009). Technological pedagogical content knowledge (TPACK): The development and validation of an assessment instrument for preservice teachers. *Journal of Research on Technology in Education, 42*(2), 123-149. https://doi.org/10.1080/15391523.2009.10782544

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-23. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Steckroth, J. J. (2007). *Technology-enhanced mathematics ınstruction: Effects of visualization on student understanding of trigonometry* (Publication No. 3282501 [Doktoral dissertation, University of Virgina]. ProQuest Dissertations & Theses Global.

Taş, A. (2013). *Lise öğrencilerinin trigonometri konusu özelinde bilgi düzeylerinin incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Erciyes Üniversitesi].

Thompson, K. (2007). *Student's understanding of trigonometry enhanced through the use of a real world problem: improving the instructional sequence* (Publication No. 3280913) [Doktoral dissertation, Illinois State University]. ProQuest Dissertations & Theses Global.

Thompson, P. W., Carlson, M. P., & Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4–6), 415–432. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9054-8

Timur, B., & Taşar, M. F. (2011). Teknolojik pedagojik alan bilgisi öz güven ölçeğinin (TPABÖGÖ) Türkçe'ye uyarlanması. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 10*(2), 839-856.

Türkyılmaz, T. (2018). *Öğretmen adaylarının teknolojik pedagojik alan bilgisi (tpab) düzeylerinin öğrenme stratejileri ve düşünme stilleri açısından incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Amasya Üniversitesi].

Usta, B. (2021). *Sınıf öğretmenlerinin teknolojik pedagojik alan bilgisi (tpab) ve hizmet içi eğitim durumlarının incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi].

Usta, E., & Korkmaz, Ö. (2010). Öğretmen adaylarının bilgisayar yeterlikleri ve teknoloji kullanımına ilişkin algıları ile öğretmenlik mesleğine yönelik tutumları. *Uluslararası İnsan Bilimleri Dergisi*, *7*(1).

Uşak, M. (2005). Preservice science and technology teachers' pedagogical content knowledge on cell topics. *Educational Sciences: Theory ve Practice*, *9*(4), 2033-2046.

Varank, İ. (2009). Considering material development dimension of educational technologies: Determining competencies and pre-service teachers‟ skills in Turkey. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 5*(2), 119-125. https://doi.org/10.12973/ejmste/75263

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research, 17*(3), 91-112. https://doi.org/10.1007/BF03217423

Weber, K., Maher, C., Powell, A. B., & Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from groupdiscussions: Warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics, 68*(3), 247-261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9114-8

Wescoatt, B. M. (2013). *An exploration of college students' problem solving behaviors while verifying trigonometric identities: A mixed methods case study* (Publication No. 3598988) [Doktoral dissertation, Purdue University]. ProQuest Dissertations & Theses Global.

Yazıcı, N., & Albayrak, M. (2019). Evrensel küme ve sonsuz küme kavramlarına ilişkin matematik öğretmenlerinin genel alan bilgisi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *27*(5). https://doi.org/10.24106/kefdergi.3265

Yıldır-Oğuz, P. (2019). *On ikinci sınıf öğrencilerinin radyan kavramı hakkında sahip oldukları kavram imajlarının incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi].

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri (6. baskı)*. Seçkin Yayıncılık.

Yiğit-Koyunkaya, M. & Tataroğlu-Taşdan, B., (2019). Matematik Öğretmen adaylarının ders planlarının teknoloji entegrasyonu açısından değerlendirilmesi. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 20,* 1137-1166. https://doi.org/10.17494/ogusbd.555139

Yigit, M. (2014a). *Learning of trigonometry: An examination of pre-service secondary mathematics teachers' trigonometric ratios schema* (Publication No. 3668423) [Doktoral dissertation, Purdue University]. ProQuest Dissertations & Theses Global.

Yigit, M. (2014b). Pre-service secondary mathematics teachers' conceptions on angles. *The Math Enthusiast, 11*(3), 707–736. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1322

Yiğit-Koyunkaya, M. (2016). Mathematics education graduate students' understanding of trigonometric ratios. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(7), 1028-1047. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1155774

Yiğit-Koyunkaya, M. (2017). Matematik öğretmeni ödaylarının teknolojik pedagojik alan bilgilerinin gelişimini amaçlayan bir öğretim deneyi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 8*(2), 284-322.

Yin, R. (1984). *Case study research: Design and methods*. (3. Baskı). California: Sage Publications.

Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications. Design and methods,* (6. Baskı). Sage, Thousand Oaks, CA.

Yolcu, H., Durna-Kaya, D., Akan, A., & Uluçınar-Sağır, U. (2022). Pedagojik alan bilgisi ve teknolojik pedagojik alan bilgisine ilişkin yapılan çalışmaların meta-sentez yöntemiyle analizi. *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi, (46),* 106-121.

Zengin, Y. (2011). *Dinamik matematik yazılımı GeoGebra'nın öğrencilerin başarılarına ve tutumlarına etkisi* [Yüksek lisans tezi, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi].

EKLER

Ek 1. Yarı Yapılandırılmış Klinik Görüşme Soruları

Alan Bilgisi Soruları

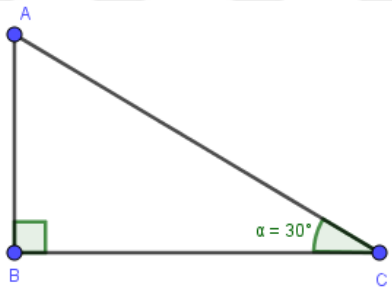
1) Fonksiyon ne demektir? Örnek vererek açıklayınız.

2) Trigonometrik fonksiyon ne demektir? Örnek vererek açıklayınız.

3) Trigonometride geçen derece, radyan, esas ölçü kavramlarını tanımlayınız. Örnek vererek açıklayınız.

4) Bir birim çember çiziniz. $0° < x < 90°$ olacak şekilde bir x açısı alarak trigonometrik oranları ve tanım aralıklarını gösterip, açıklayınız.

5) Birim çember çiziniz. $0° < x < 90°$, $90° < x < 180°$, $180° < x < 270°$, $270° < x < 360°$ olduğunda trigonometrik fonksiyonların işaretleri nasıldır? Gösterip, açıklayınız.



6) ABC dik üçgeninde $x=30°$ açısı $35°$ olduğunda trigonometrik oranlar nasıl değişir? Açıklayınız.

7) Birim çember çiziniz. $0° < x < 90°$ olmak üzere x açısı artırıldığında trigonometrik oranlar nasıl değişir? Açıklayınız.

8) Birim çember çiziniz. $0° < x < 90°$ olacak şekilde bir x açısı oluşturunuz. Bu açının bitiş kenarının çemberi kestiği nokta A(x,y) noktası olsun. A noktasının koordinatlarını trigonometrik oranlar cinsinden nasıl ifade edersiniz? Gösterip, açıklayınız.

9) Birim çember çiziniz. $90° < x < 180°$ olacak şekilde bir x açısı oluşturunuz. Bu açının bitiş kenarının çemberi kestiği nokta A(x,y) noktası olsun. A noktasının koordinatlarını trigonometrik oranlar cinsinden nasıl ifade edersiniz? Gösterip, açıklayınız.

10) Birim çember çiziniz. $180° < x < 270°$ olacak şekilde bir x açısı oluşturunuz. Bu açının bitiş kenarının çemberi kestiği nokta A(x,y) noktası olsun. A noktasının koordinatlarını trigonometrik oranlar cinsinden nasıl ifade edersiniz? Gösterip, açıklayınız.

11) Birim çember çiziniz. $270° < x < 360°$ o olacak şekilde bir x açısı oluşturunuz. Bu açının bitiş kenarının çemberi kestiği nokta A(x,y) noktası olsun. A noktasının koordinatlarını trigonometrik oranlar cinsinden nasıl ifade edersiniz? Gösterip, açıklayınız.

12) Trigonometrik özdeşlikler nelerdir? Örnek veriniz.

13) Trigonometrik fonksiyonlarda periyodiklik ne demektir? Örnek vererek açıklayınız.

14) Bir trigonometrik fonksiyon belirleyiniz.

    a. Belirlediğiniz trigonometrik fonksiyonun grafiğini çizerken nasıl bir yol izlersiniz?
    b. Neden bu yolu tercih ettiniz?
    c. Sizce daha farklı bir yol var mı? Açıklayınız.

15) $y= a\sin(bx+c) +k$ şeklindeki trigonometrik fonksiyonda a,b,c,k değişkenleri ne ifade etmektedir? Açıklayınız.

Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi Soruları

1) GeoGebrayı kullanarak bir çember çiziniz. Çizdiğiniz çemberde derece, radyan, esas ölçü kavramlarını nasıl gösterirsiniz? Açıklayınız.

2) GeoGebrayı kullanarak bir dik üçgen çiziniz. Çizdiğiniz üçgenin kenar uzunluklarını ve açılarını ölçünüz.
    a. Dik üçgenin bir iç açısını değiştiriniz. Açıyı değiştirdiğinizde kenar uzunlukları nasıl değişti? Gösterip açıklayınız.
    b. Açıyı değiştirdiğinizde başka neler değişti?
    c. Dik üçgenin kenar uzunluklarını değiştiriniz. Kenar uzunluklarını değiştirdiğinizde neler değişti? Gösterip açıklayınız.

3) Çizdiğiniz dik üçgende herhangi bir açının trigonometrik oranlarını GeoGebrayı kullanarak nasıl hesaplarsınız?
    a. Açıyı değiştirdiğinizde trigonometrik oranlar nasıl değişir? Gösterip açıklayınız.
    b. Kenar uzunlukları değiştirdiğinizde trigonometrik oranlar nasıl değişir? Gösterip açıklayınız.

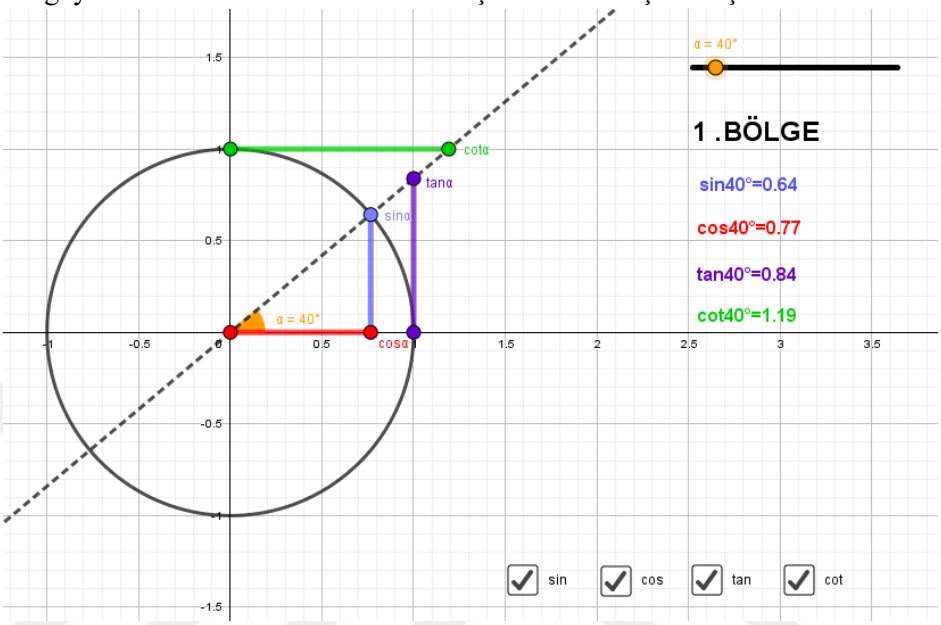
c. Çizdiğiniz dik üçgeni kullanarak trigonometrik oranların öğretimini nasıl yaparsınız? Açıklayınız.
d. Trigonometrik oranlar konusunda öğrencilerin zorlanacağını düşündüğünüz yerler var mı? Varsa nelerdir?
e. Öğrencilerin zorlanacağını düşündüğünüz kısımlar için ne yapmayı planlıyorsunuz?
f. Bu kısımlar için öğrencilere hangi soruları sormayı düşünürsünüz?
g. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir?
h. GeoGebrayı kullanarak trigonometrik oranların öğretimini başka bir şekilde yapabilir misiniz? Çalışmalarınızı gösterip açıklayınız.
i. Bu öğretimin beyaz tahta ile yapılan öğretimden farkı nedir?
j. Sizce GeoGebrayı kullanarak trigonometrik oranları öğretmenin ne gibi bir faydası olabilir?

4) Birim çemberi oluşturunuz. Birim çemberi kullanarak trigonometrik oranların öğretimi için bir etkinlik geliştiriniz.
   a. Etkinliği oluştururken zorlandığınız yerler oldu mu?
   b. Etkinliği oluştururken dikkat ettiğiniz kısımlar neler oldu?
   c. Neden böyle bir etkinlik oluşturmayı seçtiniz?
   d. Bu etkinlikle daha önce karşılaşmış mıydınız?
   e. Hazırladığınız bu etkinliği derslerinizde kullanır mısınız? Neden? Açıklayınız.
   f. Bu etkinliği derslerinizde nasıl kullanmayı düşünüyorsunuz? Açıklayınız.
   g. Birim çember konusunda öğrencilerin zorlandığını düşündüğünüz kısımlar var mı? Varsa nelerdir?
   h. Öğrencilerin zorlanacağını düşündüğünüz kısımlar için ne yapmayı planlıyorsunuz?
   i. Bu kısımlar için öğrencilere hangi soruları sormayı düşünürsünüz?
   j. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir?
   k. Oluşturduğunuz bu etkinliğin sizce kağıt kalem kullanmaktan farkı nedir?
   l. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?

5) GeoGebrayı kullanarak trigonometrik oranların pozitif ve negatif olma durumları ile ilgili bir etkinlik oluşturunuz.
   a. Etkinliği oluştururken zorlandığınız yerler oldu mu?
   b. Etkinliği oluştururken dikkat ettiğiniz kısımlar neler oldu?
   c. Neden böyle bir etkinlik oluşturmayı seçtiniz?
   d. Bu etkinlikle daha önce karşılaşmış mıydınız?
   e. Hazırladığınız etkinliği derslerinizde kullanır mıydınız? Neden? Açıklayınız.
   f. Bu etkinliği derslerinizde nasıl kullanmayı düşünüyorsunuz? Açıklayınız.
   g. Trigonometrik oranların pozitif veya negatif olma durumları konusunda öğrencilerin neleri anlamakta zorlanacağını düşünüyorsunuz?
   h. Öğrencilerin zorlanacağını düşündüğünüz kısımlar için ne yapmayı planlıyorsunuz?
   i. Bu kısımlar için öğrencilere hangi soruları sormayı düşünürsünüz?
   j. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir?

k. Oluşturduğunuz bu etkinliğin kağıt kalem kullanmaktan farkı nedir?
l. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?

6) Sürgüyü kullanarak 0° < x < 90° olacak şekilde bir x açısı oluşturunuz.



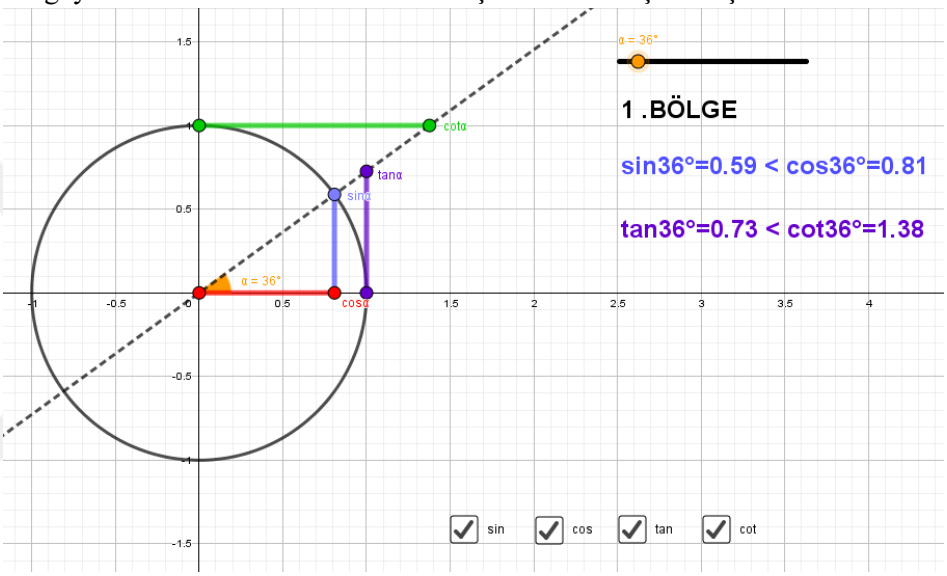
a. Oluşturduğunuz açıya göre trigonometrik oranların işaretleri nasıldır? Gösterip, açıklayınız.
b. Açıyı 90° < x < 180° olacak şekilde değiştiriniz. Bu bölgede trigonometrik oranların işaretleri nasıldır? Gösterip, açıklayınız.
c. Açıyı 180° < x <270° olacak şekilde değiştiriniz. Bu bölgede trigonometrik oranların işaretleri nasıldır? Gösterip, açıklayınız.
d. Açıyı 270° < x <360° olacak şekilde değiştiriniz. Bu bölgede trigonometrik oranların işaretleri nasıldır? Gösterip, açıklayınız.
e. Bu etkinliği derslerinizde kullanır mıydınız? Neden? Açıklayınız.
f. Bu etkinliği derslerinizde kullanırken öğrencilere farklı olarak hangi soruları sormayı düşünürsünüz?
g. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir?
h. Bu etkinliğin kağıt kalem kullanmaktan farkı nedir?
i. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?

7) GeoGebrayı kullanarak trigonometrik oranların kıyaslanması ile ilgili bir etkinlik oluşturunuz.

a. Etkinliği oluştururken zorlandığınız yerler oldu mu?
b. Etkinliği oluştururken dikkat ettiğiniz kısımlar neler oldu?
c. Neden böyle bir etkinlik oluşturmayı seçtiniz?
d. Bu etkinlikle daha önce karşılaşmış mıydınız?
e. Hazırladığınız bu etkinliği derslerinizde kullanır mıydınız? Neden? Açıklayınız.
f. Bu etkinliği derslerinizde nasıl kullanmayı düşünüyorsunuz? Açıklayınız.

g. Trigonometrik oranların kıyaslanması konusunda öğrencilerin neleri anlamakta zorlanacağını düşünüyorsunuz?
h. Öğrencilerin zorlanacağını düşündüğünüz kısımlar için ne yapmayı planlıyorsunuz?
i. Bu kısımlar için öğrencilere hangi soruları sormayı düşünürsünüz?
j. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir?
k. Oluşturduğunuz bu etkinliğin kağıt kalem kullanmaktan farkı nedir?
l. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?

8) Sürgüyü kullanarak $0° < x < 90°$ olacak şekilde bir x açısı oluşturunuz.



a. Oluşturduğunuz açıya göre trigonometrik oranları GeoGebrayı kullanarak kıyaslayıp açıklayınız.
b. Açıyı artırdığınızda trigonometrik oranlar nasıl değişir? Gösterip açıklayınız.
c. Açıyı azalttığınızda trigonometrik oranlar nasıl değişir? Gösterip açıklayınız.
d. Kosinüs fonksiyonunun sinüs fonksiyonundan büyük değerler aldığı açılar nelerdir? Gösterip açıklayınız.
e. Sinüs fonksiyonunun kosinüs fonksiyonundan büyük değerler aldığı açılar nelerdir? Gösterip açıklayınız.
f. Tanjant fonksiyonunun kotanjant fonksiyonundan büyük değerler aldığı açılar nelerdir? Gösterip açıklayınız.
g. Kotanjant fonksiyonunun tanjant fonksiyonundan büyük değerler aldığı açılar nelerdir? Gösterip açıklayınız.
h. Etkinliği kullanarak sinüs fonksiyonu ile tanjant fonksiyonunu, kosinüs fonksiyonu ile kotanjant fonksiyonunu kıyaslayınız. Gösterip açıklayınız.
i. Bu etkinliği derslerinizde kullanır mıydınız? Neden? Açıklayınız.
j. Bu etkinliği derslerinizde nasıl kullanmayı düşünüyorsunuz. Açıklayınız.
k. Bu etkinliği derslerinizde kullanırken öğrencilere farklı olarak hangi soruları sormayı düşünürsünüz?

l. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir?
m. Bu etkinliğin kalem kağıt kullanmaktan farkı nedir?
n. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?

9) GeoGebrayı kullanarak trigonometrik özdeşliklerin öğretimi ile ilgili bir etkinlik oluşturunuz.
   a. Etkinliği oluştururken zorlandığınız yerler oldu mu?
   b. Etkinliği oluştururken dikkat ettiğiniz kısımlar neler oldu?
   c. Neden böyle bir etkinlik oluşturmayı seçtiniz?
   d. Bu etkinlikle daha önce karşılaşmış mıydınız?
   e. Hazırladığınız etkinliği derslerinizde kullanır mıydınız? Neden? Açıklayınız.
   f. Bu etkinliği derslerinizde nasıl kullanmayı düşünüyorsunuz? Açıklayınız.
   g. Trigonometrik oranların pozitif veya negatif olma durumları konusunda öğrencilerin neleri anlamakta zorlanacağını düşünüyorsunuz?
   h. Öğrencilerin zorlanacağını düşündüğünüz kısımlar için ne yapmayı planlıyorsunuz?
   i. Bu kısımlar için öğrencilere hangi soruları sormayı düşünürsünüz?
   j. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir?
   k. Oluşturduğunuz bu etkinliğin kağıt kalem kullanmaktan farkı nedir?
   l. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?

10) Geograbrayı kullanarak aşağıdaki adımları uygulayınız.

   a. Sinüs fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
   b. Çizdiğiniz fonksiyonun tanım ve değer kümeleri nelerdir?
   c. Periyodu nedir?

   a. Kosinüs fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
   b. Çizdiğiniz fonksiyonun tanım ve değer kümeleri nelerdir?
   c. Periyodu nedir?

   a. Tanjant fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
   b. Çizdiğiniz fonksiyonun tanım ve değer kümeleri nelerdir?
   c. Periyodu nedir?

   a. Kotanjant fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
   b. Çizdiğiniz fonksiyonun tanım ve değer kümeleri nelerdir?
   c. Periyodu nedir?

10.1) GeoGebrayı kullanarak trigonometrik fonksiyonların grafikleri ile ilgili bir etkinlik geliştiriniz.

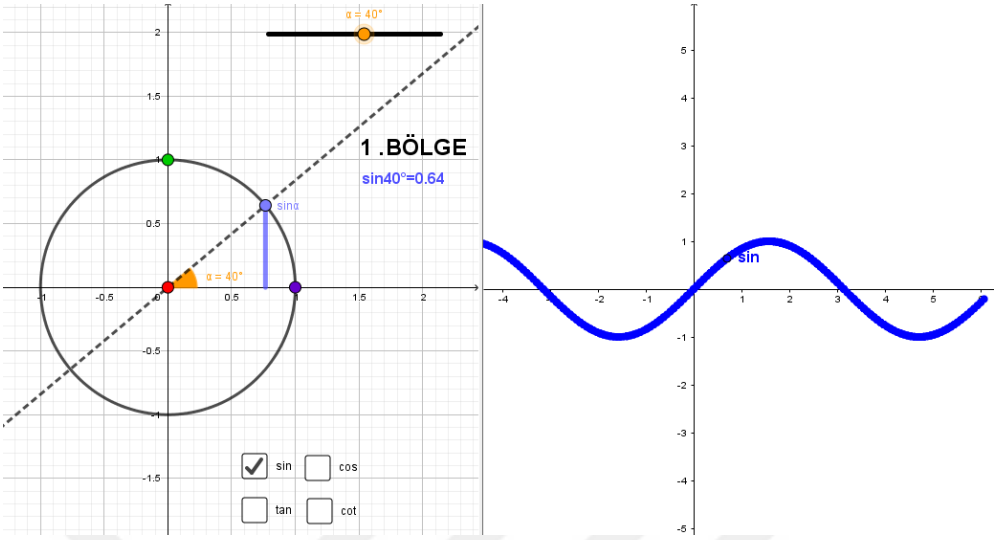
   a. Etkinliği oluştururken zorlandığınız yerler oldu mu?

b. Etkinliği oluştururken dikkat ettiğiniz kısımlar neler oldu?
c. Neden böyle bir etkinlik oluşturmayı seçtiniz?
d. Bu etkinlikle daha önce karşılaşmış mıydınız?
e. Bu etkinliği derslerinizde kullanır mıydınız? Neden? Açıklayınız.
f. Bu etkinliği derslerinizde nasıl kullanmayı düşünüyorsunuz. Açıklayınız.
g. Trigonometrik fonksiyonların grafikleri konusunda öğrencilerin neleri anlamakta zorlanacağını düşünüyorsunuz?
h. Öğrencilerin zorlanacağını düşündüğünüz kısımlar için ne yapmayı planlıyorsunuz?
i. Bu kısımlar için öğrencilere hangi soruları sormayı düşünürsünüz?
j. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir?
k. Oluşturduğunuz bu etkinliğin kalem kağıt kullanmaktan farkı nedir?
l. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?

10.2) GeoGebrayı kullanarak trigonometrik fonksiyonların periyotlarını öğretebileceğiniz bir etkinlik geliştiriniz.

a. Etkinliği oluştururken zorlandığınız yerler oldu mu?
b. Etkinliği oluştururken dikkat ettiğiniz kısımlar neler oldu?
c. Neden böyle bir etkinlik oluşturmayı seçtiniz?
d. Bu etkinlikle daha önce karşılaşmış mıydınız?
e. Hazırladığınız bu etkinliği derslerinizde kullanır mıydınız? Neden? Açıklayınız.
f. Bu etkinliği derslerinizde nasıl kullanmayı düşünüyorsunuz? Açıklayınız.
g. Trigonometrik fonksiyonların periyotları konusunda öğrencilerin neleri anlamakta zorlanacağını düşünüyorsunuz?
h. Öğrencilerin zorlanacağını düşündüğünüz kısımlar için ne yapmayı planlıyorsunuz?
i. Bu kısımlar için öğrencilere hangi soruları sormayı düşünürsünüz?
j. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir?
k. Oluşturduğunuz bu etkinliğin kalem kağıt kullanmaktan farkı nedir?
l. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?

11) Aşağıdaki soruları etkinliği kullanarak cevaplayınız.



a. Trigonometrik fonksiyonların grafiklerini etkinlik yardımı ile çizdirip, inceleyin.
b. Bu etkinliği derslerinizde kullanır mıydınız? Neden? Açıklayınız.
c. Bu etkinliği derslerinizde nasıl kullanmayı düşünüyorsunuz? Açıklayınız.
d. Bu etkinliği derslerinizde kullanırken öğrencilere farklı olarak hangi soruları sormayı düşünürsünüz?
e. Sorduğunuz sorulara öğrencilerden beklediğiniz cevaplar nelerdir?
f. Bu etkinliğin kağıt kalem kullanmaktan farkı nedir?
g. Bu etkinliğin trigonometri öğretimine ne gibi katkısı olabileceğini düşünüyorsunuz?

Ek 2. Gözlem Formu

Oturum:

Konu/Soru:

Tarih :

Süre:

Öğretmen Adayının Soruları Cevaplayabilmesi (Alan Bilgisine Yönelik)	**Öğretmen Adayının Teknolojiyi Kullanabilmesi (Teknolloji Bilgisine Yönelik)**	**Öğretmen Adayının Sorulan Soruyu Uygulama Planı (Pedagoji Bilgisine Yönelik)**	**Görüşmedeki Genel Gözlemler**

Ek 3. Gönüllü Katılımcı Onam Formu

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURULU

BİLGİLENDİRİLMİŞ ONAM FORMU

Bu formun amacı katılmanız rica edilen araştırma ile ilgili olarak sizi bilgilendirmek ve katılmanız ile ilgili izin almaktır.

Bu kapsamda "Matematik öğretmenliği lisansüstü öğrencilerinin trigonometri konusundaki teknolojik pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi" tarafından **gönüllü katılımcılarla** yürütülmektedir. Araştırma sırasında sizden alınacak bilgiler gizli tutulacak ve sadece araştırma amaçlı kullanılacaktır. Araştırma sürecinde konu ile ilgili her türlü soru ve görüşleriniz için aşağıda iletişim bilgisi bulunan araştırmacıyla görüşebilirsiniz. Bu araştırmaya **katılmama** hakkınız bulunmaktadır. Aynı zamanda çalışmaya katıldıktan sonra çalışmadan **çıkabilirsiniz.** Bu formu onaylamanız, **araştırmaya katılım için onam verdiğiniz** anlamına gelecektir.

Araştırmayla İlgili Bilgiler:

Araştırmanın Amacı: Matematik öğretmenliği lisansüstü öğrencilerinin trigonometri konusundaki teknolojik pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi

Araştırmanın Nedeni: Amaç doğrultusunda matematik eğitimi alanındaki literatüre katkı sağlamak

Süresi: Ağustos 2021 (Katılımcılar ile 1-1.5 saat sürecek oturumlar şeklinde yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler yapılacaktır.)

Araştırmanın Yürütüleceği Yer: Covid-19 Pandemisi nedeniyle eğitimler çevrimiçi olarak devam ettiğinden, var olan durum devam ederse görüşmeler Sakai veya Microsoft Teams gibi çevrimiçi bir ortamda yapılıp kaydedilecek. Söz konusu var olan durumun iyileşmesi durumunda ise görüşmeler Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Cahit Arf Binası 3. Kat 313 nolu Seminer odasında yüz yüze yapılacaktır.

Uygulama Süreci: Çalışma süresince lisansüstü öğrencilerin TPAB'ın alt bileşenleri olan alan, pedagoji, teknoloji, pedagojik alan, teknolojik alan, teknolojik pedagojik ve teknolojik pedagojik alan bilgilerini ölçmek amaçlı yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler yapılacaktır. Lisansüstü öğrencilerden görüşme sorularına kağıt üzerinde veya GeoGebra programında cevap vermesi istenecek ve verilen cevaplara yönelik detaylı görüşmeler yapılacaktır. Yapılan klinik görüşmeler kaydedilecektir. Tüm süreç boyunca ise gözlem yapılacak ve not edilecektir. Lisansüstü öğrencilerin kimlikleri ise gizli tutulacak ve gerektiği durumlarda takma isimler kullanılacaktır.

Çalışmaya Katılım Onayı:

Katılmam beklenen çalışmanın amacını, nedenini, katılmam gereken süreyi ve yeri ile ilgili bilgileri okudum ve gönüllü olarak çalışma süresince üzerime düşen sorumlulukları anladım. Çalışma ile ilgili ayrıntılı açıklamalar sözlü olarak araştırmacı tarafından yapıldı. Bu çalışma ile ilgili faydalar ve riskler ile ilgili bilgilendirildim.

Bu araştırmaya kendi isteğimle, hiçbir baskı ve zorlama olmaksızın katılmayı kabul ediyorum.

Katılımcının (Islak imzası ile)
Adı-Soyadı:
İmzası:

Araştırmacının
Adı-Soyadı: Tuğçe AVCAR KARAMAN
Mail:
İmzası:

Ek 4. Etik İzin

Çok Acil

Gizli

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Hukuk Müşavirliği

Sayı : E-87347630-640.99-93732 09/08/2021
Konu : Etik Kurul izni hk.(Tuğçe AVCAR)

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 28.07.2021 tarih ve E-67493393-300.99-87061 sayılı yazınız

İlgide kayıtlı yazınıza istinaden Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırma ve Yayın Etik Kurulunun 04.08.2021 tarihli toplantısında alınan 16 sayılı karar ile Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans programı öğrencisi Tuğçe AVCAR'ın **"Matematik Öğretmenliği Lisansüstü Öğrencilerinin Trigonometri Konusunda Teknolojik Pedagojik Alan Bilgilerinin İncelenmesi"** başlıklı çalışmasının etik açıdan uygun olduğuna karar verilmiş olup, alınan karar Makamımızca onaylanmıştır

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof.Dr. Nükhet HOTAR
Rektör

Bu belge, güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.
Evrağınızı http://dogrulama.deu.edu.tr linkinden A4265D39X7 kodu ile dogrulayabilirsiniz.

Dokuz Eylül Üniversitesi Rektörlüğü
Adres: Cumhuriyet Bulvarı No:144 35210 Alsancak / İZMİR
Tel: Elektronik Ağ: www.deu.edu.tr
Kep Adresi: dokuzeyluluniversitesi@hs01.kep.tr

Bilgi İçin İrtibat:
Selda OĞAN
Dahili:
E-Posta: selda.ogan@deu.edu.tr

Gizli

Ek 5. Öğrencinin Akademik Özgeçmişi

Kişisel Bilgiler			
Adı ve Soyadı	Tuğçe AVCAR KARAMAN		
E-postası/Web Sayfası			
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce		
Uzmanlık Alanı			
Öğrenim Bilgileri			
	Üniversite	Bölüm	Yıl
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi	Matematik Öğretmenliği	2015-2019
Tez Başlığı	Matematik Öğretmenliği Lisansüstü Öğrencilerin Trigonometri Konusunda Teknolojik Pedagojik Alan Bilgilerinin İncelenmesi		
Tez Danışmanı	Doç. Dr. Melike YİĞİT KOYUNKAYA		
Akademik Eserler (Makale, kitap, kitap bölümü, bildiri, poster, sergi, konser vb. eserlerden kaynakça yazım kurallarına göre en fazla 10 eser yazılmalıdır.) Tezden üretilen yayınlar * ile işaretlenmelidir.			
Alanıyla İlgili Bilimsel Kuruluşlara Üyelikler			
Alanıyla İlgili Aldığı Ödüller			

