DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YENİDEN ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİNİN DAYANIKLI KONUM KESTİRİCİLERİ İLE KULLANIMLARININ İNCELENMESİ

İlkay KOYUNCUOĞLU

Şubat, 2023
İZMİR

YENİDEN ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİNİN DAYANIKLI KONUM KESTİRİCİLERİ İLE KULLANIMLARININ İNCELENMESİ

Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi

İstatistik Anabilim Dalı, Veri Bilimi Programı

İlkay KOYUNCUOĞLU

Şubat, 2023

İZMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

İLKAY KOYUNCUOĞLU, tarafından **PROF DR. A. FIRAT ÖZDEMİR** yönetiminde hazırlanan "**YENİDEN ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİNİN DAYANIKLI KONUM KESTİRİCİLERİ İLE KULLANIMLARININ İNCELENMESİ**" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

.....

Prof. Dr. A. Fırat Özdemir

Yönetici

.....

Jüri Üyesi

.....

Jüri Üyesi

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEŞEKKÜR

Öncelikle değerli fikir ve tecrübeleri ile beni yönlendiren, proje konusu seçiminde ve projenin her aşamasında bana destek olan, farklı bakış açısı kazandıran saygıdeğer danışmanım Prof. Dr. A. Fırat ÖZDEMİR'e,

Tezimi yazarken zorlandığım konularda beni yardımlarından esirgemeyen Prof. Dr. Neslihan DEMİREL'e,

Tezimin analizini yaparken elinden gelen bütün çaba ile bana yardım eden Yusuf Can SEVİL'e,

Tez çalışmam boyunca benden bir an olsun desteğini esirgemeyen Caner ÖZDEMİR'e ve annem Melahat KOYUNCUOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim.

İlkay KOYUNCUOĞLU

YENİDEN ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİNİN DAYANIKLI KONUM KESTİRİCİLERİ İLE KULLANIMLARININ İNCELENMESİ

ÖZ

Örnekleme, araştırmacıların, her bir bireyi araştırmak zorunda kalmadığı, kitlenin bir alt kümesinden elde edilen sonuçlara dayalı olarak kitle hakkında bilgi çıkarımını sağlayan bir yaklaşımdır. Örnekleme kullanılan yöntemlerde normallik ve homojen varyanslılık varsayımları sağlanmadığında, parametrik olmayan yöntemler sık kullanılmaktadır. Yeniden örnekleme yöntemleri ise, örnekleme yöntemlerine göre daha az varsayım gerektirdiği için daha kullanışlıdır. Gelişen bilgisayar teknolojisi ile hızlı ve daha doğru analizler yapılarak güvenilir sonuçlar elde edilebilir.

Veri setindeki uç değerler, analizlerin sonuçlarını tamamen değiştirecek derecede etkili olabilmektedir. Bu durumda dayanıklı konum kestiricilerinin kullanılması, veri setinden doğru ve yeterli bilgiyi elde etmeye olanak sağlar.

Bu çalışmada, yeniden örnekleme yöntemleri (simülasyona göre Bootstrap olarak özelleştirilebilir) ve dayanıklı konum kestiricilerinin beraber incelenmesi ele alınmıştır. İlk bölümde, örnekleme ve yeniden örnekleme yöntemlerinden, ikinci bölümde yeniden örnekleme yöntemlerinin çeşitlerinden ve üçüncü bölümde dayanıklı konum kestiricilerinden bahsedilmiştir. Son bölümde de bir uygulama ile bu teorik bilgiler somutlaştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Yeniden örnekleme yöntemleri, bootstrap yeniden örnekleme yöntemi, veri ön işleme, dayanıklı konum kestiricileri

EXAMINING THE USE OF ROBUST LOCATION ESTIMATORS WITH RESAMLING METHODS

ABSTRACT

Sampling is a method that allows researchers to infer information about a population based on results from a subset of the population, where researchers do not have to investigate every single observation. Non-parametric methods are frequently used when normality and constant variance assumptions are violated in sampling methods. Resampling methods, on the other hand, are more useful because they require less assumptions than sampling methods. With the developing computer technology, reliable results are obtained by making faster and more accurate analyzes.

Outliers affect the results of the analyzes in the data set in a way that completely changes them. In this case, the use of robust position estimators allows to obtain accurate and sufficient information from the data set.

In this study, resampling methods (customizable as Bootstrap according to simulation) and robust location estimators are discussed together. In the first part, sampling methods, resampling methods, in the second part the types of resampling methods and in the third part robust position estimators are mentioned. In the last part, this theoretical knowledge is embodied with an application.

Keywords: Resampling methods, bootstrap resampling method, data pre-processing, robust location estimators

İÇİNDEKİLER

Sayfa

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU ii
TEŞEKKÜR iii
ÖZ iiv
ABSTRACT v
ŞEKİLLER LİSTESİ viii
TABLOLAR LİSTESİ iix

BÖLÜM BİR - GİRİŞ 1

1.1 Örnekleme ve Örnekleme Yöntemleri 1
1.2 Yeniden Örnekleme Yöntemleri 3

BÖLÜM İKİ - YENİDEN ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİ ÇEŞİTLERİ 5

2.1 Jackknife Yeniden Örnekleme Yöntemi 5
2.1.1 Birini Atarak Kestirim (delete-one) 5
2.2 Permütasyon Testi 8
2.3 Çapraz Doğrulama 9
2.3.1 Bölünmüş Örneklemle Çapraz Doğrulama 10
2.3.2 Birini Atarak Çapraz Doğrulama 11
2.3.3 k katmanlı Çapraz Doğrulama 11
2.3.4 Monte Carlo Çapraz Doğrulaması 12
2.3.5 Holdout Çapraz Doğrulaması 12
2.3.6 Bootstrap Çapraz Doğrulaması 12
2.4 Bootstrap Yeniden Örnekleme Yöntemi 13
2.4.1 Örnekleme Dağılımı ve Bootstrap Dağılımı 14
2.4.2 Bootstrap Dağılımı ile Standart Hata ve Yanlılık 15
2.4.3 Bootstrap Güven Aralığı 15
2.4.3.1 Normal Yaklaşım ile Bootstrap Güven Aralıkları 17
2.4.3.2 Yüzdelik Bootstrap Güven Aralıkları 18
2.4.3.3 Bootstrap-t Güven Aralıkları 19

2.4.3.4 BCa (Yanlılığı Düzeltilmiş-Hızlandırılmış) Bootstrap 20

BÖLÜM ÜÇ - DAYANIKLI KONUM KESTİRİCİLERİ…….23

3.1 Budanmış Ortalama..... 24
3.2 Winsorized Ortalama 25
3.3 Tek-Adım M Kestiricisi 26
3.4 Düzeltilmiş Tek-Adım M Kestiricisi 27

BÖLÜM DÖRT - UYGULAMA..... 29

4.1 Rastgele Veriler ile Uygulama..... 29
4.2 Gerçek Veri Uygulaması..... 37

BÖLÜM BEŞ - SONUÇ..... 42

KAYNAKLAR..... 52

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1 Hava kalite indeksi verisinin histogramı..... 38
Şekil 4.2 Vücut yağ yüzdesi verisinin histogramı..... 38
Şekil 5.1 Bootstrap yöntemlerin simetrik kitle için nominal güven düzeyini (0.95) koruduğu düzenlerin sayısı 43
Şekil 5.2 Bootstrap yöntemlerin çarpık kitle için nominal güven düzeyini (0.95) koruduğu düzenlerin sayısı..... 45
Şekil 5.3 Bootstrap yöntemlerin geometrik dağılım kitlesi için nominal güven düzeyini (0.95) koruduğu düzenlerin sayısı 47
Şekil 5.4 Güven aralığı yöntemlerinin kapsama oranı açısından genel başarısı..... 48

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 4.1 Kullanılan g&h dağılımlarına ait çarpıklık ve basıklık değerleri 30
Tablo 4.2 Kitle dağılımı Normal(0, 1) iken gerçekleşen kapsama oranları 30
Tablo 4.3 Kitle dağılımı g&h (g=0.5, h=0.2) iken gerçekleşen kapsama oranları..... 32
Tablo 4.4 Kitle dağılımı g&h (g=0.5, h=0.4) iken gerçekleşen kapsama oranları..... 34
Tablo 4.5 Kitle dağılımı geometrik (p = 0.1) iken gerçekleşen kapsama oranları..... 36
Tablo 4.6 Kullanılan gerçek verilere ait istatistikler 37
Tablo 4.7 'Hava Kirliliği İndeksi' gerçek verisi için gerçekleşen kapsama oranları..39
Tablo 4.8 'Vücut Yağ Yüzdesi' gerçek verisi için gerçekleşen kapsama oranları 40
Tablo 5.1 Hesaplanan güven aralığı yöntemlerinin kestiricilere göre anlam düzeyini koruma sayıları 49

BÖLÜM BİR
GİRİŞ

1.1 Örnekleme ve Örnekleme Yöntemleri

Örneklem, bütünü temsil edecek şekilde, kitleden alınan gözlemler grubudur. Örneklemin kitleden seçilme işlemine de 'örnekleme' denir. Kitlenin bütün elemanlarına erişmek maliyetli, zor ve zaman alıcı bir işlem olduğu için kitlenin tamamına ulaşmak yerine belirli kurallara göre uygulanan örnekleme yöntemlerinin kullanılması uygundur. Kitleyi temsil eden özelliklere 'parametre' ve örneklemi temsil eden özelliklere ise 'istatistik' adı verilir. Parametreler, bu istatistikler ile tahmin edilir. Seçilen örneklem hangi yöntemle seçilirse seçilsin tüm kitleyi temsil etmelidir. Sonuç olarak, elde edilen örneklem ile istenilen istatistikler hesaplanarak kitle için genellenebilir.

Örnekleme yöntemlerinin kullanılmasının avantajları ve dezavantajları mevcuttur. Sınırlı kaynak, zaman ve sermaye ile bütün kitleye erişmek zordur, çoğu zaman imkansızdır. Bu durumlarda zaman ve maliyet açısından büyük kar elde edilmektedir. Aynı zamanda kolay organizasyon ve yüksek doğruluk elde edilmektedir. Fakat avantajları olduğu kadar dezavantajları da vardır. Rastgelelikten kaynaklanan yanlılık, örneklem için belirlenen gözlemlerin dışına çıkmak veya örneklemden elde edilecek bilginin doğruluğundan emin olamamak gibi sorunlar çıkabilir.

Örnekleme yöntemleri temelde, rastgele örnekleme ve rastgele olmayan örnekleme olarak ikiye ayrılır. Rastgele örnekleme, incelenen kitlenin her biriminin çalışmaya katılması için seçilme şansının eşit olmasını sağlayan örnekleme türüdür. Rastgele olmayan örnekleme, olasılığa dayalı olmadan seçim yaptığı için örneklemin ilgilenilen kitleyi ne kadar iyi temsil ettiğini bilmenin zor olduğu bir türdür.

Ana olarak 4 rastgele örnekleme türü vardır. Bunlar; basit rastgele örnekleme, sistematik örnekleme, tabakalı örnekleme, küme örneklemesidir. Basit rastgele örnekleme yöntemi en temel yöntemlerden birisidir. Kitledeki gözlemlerin listesi

bulunduğunda ve kitle homojen olduğunda kullanılması uygundur. N büyüklüğünde bir kitleden n büyüklüğünde çekilen bir örneklemin her bir gözlemin eşit seçilme şansı vardır (Yaşa, 2018). Örneklem oluşturulurken her i. gözlemin seçilme şansı yerine koyarak örnekleme yapıldığı için $\frac{n}{N}$'dir. Rastgele sayılar tablosu veya rastgele sayılar üreten yazılımlar gibi yöntemler kullanılarak örneklem oluşturulur. Sistematik örnekleme yöntemi, basit rastgele örneklemede olduğu gibi, kitledeki gözlemlerin listesi bulunduğunda, kitle homojen olduğunda ve kitlenin çok büyük olduğu durumlarda kullanılması önerilir. Sistematik örnekleme yönteminde, gözlemler rastgele sıralandıktan sonra k sayısı bulunur. İlk k gözlem içinden rastgele bir gözlem seçilir ve bundan sonra gelen her k gözlem içinden bir gözlem seçilerek, n büyüklüğünde örneklemi tamamlamak için, bu işlem n kere tekrarlanır (Koçyiğit, 2016). Tabakalı rastgele örnekleme yöntemi, araştırma kitlesi çeşitli değişkenler yönünden homojen değilse tercih edilir. Tabakalı rastgele örnekleme yönteminde kitle, kendi aralarında homojen yapıya sahip olan ve tabaka adı verilen parçalara ayrılır. Sonrasında da her tabakadan basit rastgele örnekleme yöntemi ile seçim yapılarak örneklem elde edilir. Eğer tabakalardan aynı oranda örnekleme seçimi yapılacaksa orantılı tabakalı örnekleme yöntemi, farklı oranda örnekleme seçimi yapılacaksa orantısız tabakalı örnekleme yöntemi kullanılır. Küme örneklemesi, kümeler arası homojen ve kümeler içi ise heterojen olacak şekilde bölünür. Sonrasında kümelerden belirlenen sayı kadarı basit rastgele örnekleme ya da sistematik örnekleme yöntemlerinden birisi ile seçilir. Seçilen kümelerin tüm elemanları örneklem olarak ele alınır.

Örneklemin normal dağıldığı durumda geçerli olan klasik örnekleme yöntemleri, varsayımlar sağlanmadığı durumlarda kullanılamamaktadır. Bu yöntemlere alternatif olarak yeniden örnekleme yöntemleri fikri ortaya atılmıştır. Yeniden örnekleme yöntemleri, verileri tekrarlayarak kullandığı için varsayımları daha azdır. Bilgisayarlar kullanıldığı için işlemler kolay, basit ve hızlı şekilde yapılır.

1.2 Yeniden Örnekleme Yöntemleri

Yeniden örnekleme, kitleyi temsil eden, varsayıma dayalı örneklemler oluşturmak için verileri yeniden kullanmanın bir yoludur. Bilgisayar teknolojisinin ilerlemesi ile yeniden örnekleme yöntemleri daha kolay uygulanır hale gelmiştir. Yeniden örnekleme yöntemleri, kalem ve kağıtla oldukça uzun sürecek analizlerin bilgisayar programları ile daha kısa sürede, doğru ve gerçeğe yakın analizler yapılmasına yardımcı olur.

Yeniden örnekleme yöntemleri; normal dağılım, büyük örneklem ve sabit varyanslılık varsayımlarını sağlama zorunluluğu olmadığı için kullanışlıdır ve teorik ispatları olduğu için güvenilirdir. Bu yüzden, yeniden örnekleme yöntemleri ile analiz sonuçları daha hızlı ve kolay elde edilir. Yeniden örnekleme yöntemleri, geleneksel istatistiksel yöntemlerden daha avantajlıdırlar. Çünkü, yeniden örnekleme yöntemleri, klasik örnekleme yöntemlerine özgü varsayımlara, çok fazla matematiksel formüle veya istatistiksel bilgiye ihtiyaç duymazlar (Kurşun, 2012). Pratikte klasik yöntemlere göre daha başarılıdırlar ve daha yüksek doğruluk oranı elde edilmesine olanak sağlarlar. Teorik olarak yapılan işlemlerin, somut hale getirilmesine ve uygulanmasına olanak sağlarlar. Dolayısıyla, sonuçlar ve formüller anlaşılması daha kolay bir hal alır.

Yeniden örnekleme yöntemleri; zaman serileri, simülasyon teknikleri, regresyon analizi, tek ve çok değişkenli istatistiksel analizler gibi pek çok alanda uygulanmaktadır. Anlamlılık testlerinin performansını, güven aralıklarını ve standart hataları hesaplayarak belirsizliği ölçmeye yardımcı olur. Özellikle en küçük kareler regresyon analizindeki hata değerleri ile ilgili varsayımların gerçekleşmediği durumlarda düzeltme yöntemi olarak kullanılırlar (Topuz, 2002).

En yaygın olarak kullanılan yöntemler; bootstrap, permütasyon testi, jackknife ve çapraz doğrulama yöntemleridir. Yeniden örnekleme yöntemlerindeki genel amaç örnekleme dağılımına benzer bir dağılımın elde edilmesidir.

İlk olarak jackknife yeniden örnekleme yöntemi istatistiksel yanlılıkları ortadan kaldırmak amacıyla 1956'da Quenouille tarafında kullanılmıştır. Bu yöntem hipotez testleri ve güven aralıkları oluşturmak için 1958'de Tukey tarafından genelleştirilmiştir. Ardından Efron, jackknife yöntemine alternatif olarak bootstrap yöntemi geliştirmiştir. Bir istatistiğin bootstrap dağılımı, birden çok örnekleme dayalı bir örnekleme dağılımını temsil eder. Bootstrap dağılımı, istatistiğin örnekleme dağılımına yaklaşır ve örnekleme dağılımı ile yaklaşık olarak aynı dağılımı ve şekli alır. Bootstrap dağılımı hakkında bilgi edinmek için grafikler ve sayısal özetler kullanılır. Bootstrap yeniden örnekleme yönteminde kullanılan veriler, değiştirilmeden veya herhangi bir ekleme yapılmadan kullanılır. Çapraz doğrulama (cross validation) yöntemi ilk olarak 1948 yılında Kurtz tarafından önerildi. 1951 yılında Moiser bu yöntemi geliştirerek çift çapraz doğrulama, 1982 yılında da Krus ve Fuller tarafından çoklu çapraz doğrulama teknikleri geliştirilmiştir (Temel, 2012). Çapraz doğrulama, tahmine dayalı modellerin genelleme yeteneğini değerlendirmek ve aşırı uyumu önlemek için kullanılan bir yeniden örnekleme yöntemidir (Berrar, 2019). R. A. Fisher tarafından 1930'larda ortaya atılan permütasyon testinde ise yerine koymadan örnekleme yapılmaktadır.

BÖLÜM İKİ
YENİDEN ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİ ÇEŞİTLERİ

Yeniden örnekleme alanında en çok kullanılan 4 yöntem bu bölüm altında incelenmiştir. Bu yöntemler; jackknife, bootstrap, çapraz doğrulama ve permütasyon testi yöntemleridir.

2.1 Jackknife Yeniden Örnekleme Yöntemi

Jackknife yeniden örnekleme yöntemi istatistiksel yanlılıkları ortadan kaldırmak amacıyla, ilk olarak 1956'da Quenouille tarafından kullanılmıştır. Daha sonra hipotez testi ve güven aralıkları oluşturmak için 1958'de Tukey tarafından genelleştirilmiştir (Martinez ve Martinez, 2002). Bu prosedür genellikle veri setinde aşırı uç değerlerin varlığında kullanılmaktadır.

Bootstrap yöntemiyle benzerdir fakat bootstrap yönteminde yerine koyarak örnekleme kullanılırken jackknife yönteminde yerine koymadan örnekleme kullanılmaktadır (McIntosh, 2016). Jackknife yöntemi, tarafsız bir tahmin elde etmek ve aşırı uyum (over-fitting) riskini en aza indirmek için kullanılan bir prosedürdür (Abdi ve Williams, 2001). Yöntemin temel mantığı, veri setindeki her değeri bir kez dışarıda bırakarak kalan gözlemlerle örnekleme istatistiklerinin elde edilmesine ve buradan tahmin değerlerinin hesaplanmasına dayanır.

Jackknife, temel olasılık dağılımının şekli hakkında herhangi bir varsayımda bulunmasa da teknik olarak, gözlemlerin bağımsız ve özdeş dağılıma sahip olmasını varsayar.

2.1.1 Birini Atarak Kestirim (delete-one)

Tek bir bireye ait gözlem değerinin çıkartılarak yapılan tahminleme tekniğine delete-one jackknife adı verilir. Bu yöntem yanlılık azaltmada etkilidir. Jackknife yöntemi her aşamada bir gözleme ait veriyi dışarıda bırakarak testi tekrar eder.

Gözlemleri temsil eden ve i. verinin bulunmadığı veri seti Eşitlik 2.1'deki gibi elde edilmektedir.

$$\widehat{\theta_J} = \emptyset\ (x_1,\ldots,\ x_{i-1}, x_{i+1},\ldots,\ x_n) \tag{2.1}$$

Jackknife yöntemi ile elde edilen sahte değerlerin ortalaması, jackknife kestirim değerinde kullanılmak üzere elde edilir.

$$\widehat{\theta_{(.)}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \widehat{\theta_J} \tag{2.2}$$

Yanlılık düzeltmesi yapılması gerektiği durumlarda, gözlemlerin jackknife tahmin değeri bias hesaplayarak elde edilir.

$$\widehat{bias}(\theta) = \text{(n-1) } (\widehat{\theta_{(.)}} - \hat{\theta}) \tag{2.3}$$

Buradan, yanlılık düzeltmesi yapılmış jackknife tahmini Eşitlik 2.4' deki gibidir.

$$\hat{\theta}_{jack} = \hat{\theta} - \widehat{bias(\theta)} = \text{n}\hat{\theta} - \text{(n-1) } \widehat{\theta_{(.)}} \tag{2.4}$$

Jackknife varyans denklemi;

$$Var_{jack}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} (\widehat{\theta_J} - \widehat{\theta_{(.)}})^2 \tag{2.5}$$

Jackknife güven aralığı denklemi;

$$\text{GA} = \hat{\theta}_{jack} \mp (t_{n-1;1-\alpha/2})\ Se_{jack}(\hat{\theta}) \tag{2.6}$$

R programı kütüphanelerinden kullanılacak 4 kütüphane bulunmaktadır.

İlk olarak bahsedilecek yöntem, sağ kalım analizlerinde kullanılan Kaplan-Meier yöntemidir. Paket adı R programında 'jackknifeKME' olarak bulunmaktadır. Bu

yöntemde Kaplan-Meier tahmincileri ile orijinal ve değiştirilmiş jackknife tahminlerinin hesaplanması ele alınır. İçinde 5 fonksiyon yer almaktadır ve 24 Ekim 2015 yılında kullanıma sunulmuştur. Kullanımı, 'jackknifeKME(X, Y, delta, method = "PDQ", estimator = 1)' şeklindedir (Khan, Shaw ve Khan, 2015).

İkinci olarak ele alınacak paket, JMI paketidir. 'Jackknife approach to the estimation of mutual information' makalesinde ele alınan bu paket Zeng, Xia ve Tong tarafından 2018 yılında oluşturulmuş ve tek fonksiyon bulundurmaktadır. Bağımlı iki örneklem için uygulanır ve red bölgesini belirlemek için permütasyon testini kullanır. Fonksiyon JMI(x, y, BN=1000) şeklinde kullanılır. Burada x ve y bağımlı iki örneklemi temsil ederken BN parametresi permütasyon değerini belirler.

Üçüncü olarak bahsedilecek paket, jackknife, permütasyon testi ve tek ve iki örneklem bootstrap yeniden örnekleme yöntemlerinin kullanımı için oluşturulan 'resample' paketidir (Hesterberg ve Hesterberg, 2015). 12 Nisan 2015 yılında Tim Hesterberg tarafından yayınlanan bu paket 14 farklı fonksiyon içermektedir. Paketin içinde bulunan 'jackknife' fonksiyonu tek örneklem jackknife yöntemi kullanımı içindir.

R programında kullanımı aşağıdaki şekildedir.

jackknife(data, statistic, args.stat = NULL, label = NULL, statisticNames = NULL, trace = FALSE)

Son olarak B. Efron ve R. Tibshirani'nin 'An Introduction to the Bootstrap' kitabında bahsettiği 'bootstrap' paketi bulunmaktadır ve 23 farklı fonksiyon içermektedir. 17 Haziran 2019 yılında, Efron ve Tibshirani tarafından ve bootstrap, cross-validation, jackknife yeniden örnekleme yöntemleri için kullanıma sunulmuştur. Paket içinde, parametrik ve parametrik olmayan bootstrap güven aralıkları, bootstrap-t güven aralığı, k-fold çapraz doğrulama ve jackknife yöntemleri için fonksiyonlar bulunur.

Fonksiyon R programında ‘jackknife(x, theta, ...)’ şeklinde kullanılır. x değeri veriyi içeren vektörü, theta ilgilenilen parametreyi veya fonksiyonu temsil etmektedir. Bu fonksiyon ile jackknife standart hatası, yanlılık değeri ve jackknife değerleri elde edilir. Örneğin normal dağılımdan üretilmiş 20 gözlem ve ortalama olarak ele alınan theta değeri ile jackknife sonuçlarının elde edilmesi için uygulanması gereken kodlar aşağıda verildiği gibidir.

```
x = rnorm(20)

theta = function(x){mean(x)}

results = jackknife(x, theta)
```

2.2 Permütasyon Testi

Varsayımlar sağlanamadığında klasik yöntemlerin işlevini yitirdiği durumlar hep söz konusudur. Permütasyon testleri bu varsayımlara dayanmayan, klasik yöntemlere alternatif yöntemlerdir. R. A. Fisher tarafından 1930’larda ortaya atılan permütasyon testi, yerine koymadan örnekleme kullanılarak uygulanmaktadır. Fisher; permütasyon testini, ‘örneklem ortalamaları arasındaki gözlenen farkın önemli olup olmadığının belirlenmesi’ adlı deneme planında kullanmıştır (Temel ve Erdoğan, 2011). İki bağımsız örneklem istatistiklerinin farklılığını test etmek için uygulanmaktadır (Cebeci, 2020). Bu yönteme göre iki örneklemin ortalaması karşılaştırıldığında, verilerin sırası ve grubu, iadesiz seçim yaklaşımı kullanılarak değiştirilmektedir.

R programında üzerinde en yaygın kullanılan 3 adet paket bulunmaktadır. Bunlar ‘perm’, ‘permutes’ ve ‘perm.test’ isimli paketlerdir.

‘perm’ paketi, Michael P. Fay tarafından 9 Ekim 2021 tarihinde uygulamaya koyulmuştur. 7 adet fonksiyonu bulunan bu pakette permütasyon testi için tek fonksiyon bulunmaktadır. Bu fonksiyon tam veya asimptotik iki örneklem, k örneklem ve trend permütasyon testleri için kullanılmaktadır. Kendi içinde farklı ‘permTS’,

‘permKS’ ve ‘permTREND’ isimli 3 farklı fonksiyon bulundurmaktadır. Bu fonksiyonlar iki örneklem, k örneklem ve trend permütasyon testleri için kullanılır.

‘permutes’ paketi ‘plyr’ paketi içe aktarılarak kullanılmaktadır. Cesko C. Voeten tarafından 16 Aralık 2021 tarihinde yazılarak kullanıma sunulmuştur. 11 fonksiyon içeren bu paketin 5 fonksiyonu permütasyon testini ilgilendirmektedir. Bu paketler genelleştirilmiş permütasyon testlerinin kullanımı içindir.

‘exactRankTests’, veri vektörleri üzerinde tek örneklemli ve iki örneklemli permütasyon testleri gerçekleştirir. 16 fonksiyon içeren bu paket Torsten Hothorn tarafından oluşturularak Kurt Hornik ile yazılmıştır. Permütasyon testi ile ilgili tek fonksiyon bulunmaktadır (Hothorn, Hornik ve Hothorn 2015). x ve y rastgele elde edilen veri vektörleri olsun. Bu durumda fonksiyonun kullanımı aşağıdaki gibidir.

```
perm.test( x, stat=median )

perm.test( x, y )
```

2.3 Çapraz Doğrulama

Çapraz doğrulama (cross-validation) yöntemi ilk olarak 1948 yılında Kurtz tarafından önerilmiştir. 1951 yılında Moiser bu yöntemi geliştirerek çift çapraz doğrulama, 1982 yılında da Krus ve Fuller tarafından çoklu çapraz doğrulama teknikleri geliştirilmiştir (Temel ve ark., 2012). Çapraz doğrulama, tahmine dayalı modellerin genelleme yeteneğini değerlendirmek ve aşırı uyumu önlemek için kullanılan bir yeniden örnekleme yöntemidir (Berrar, 2019).

Veri seti belirli şekillerde bölümlenerek eğitilir, ardından doğrulama verisi ile doğrulanır ve test verisi ile test edilir. Çapraz doğrulamada veri seti ilk başta eğitim ve test olarak ikiye ayrıldığı ve farklı veriler kullanıldığı için aşırı uyum sorunu önlenmiş olur. Eğitim verisinin modelin benzer özelliklerine sahip verilere ne kadar uygun olduğu R^2, MAE, AIC ve MSE gibi uyum iyiliği ölçütleriyle hesaplanır.

Veri seti ilk olarak test verisi ve eğitim verisi olarak rastgele bölünür. Ardından eğitim verisi; eğitim verisi ve doğrulama verisi olarak rastgele bölünür. Eğitim verisi ile veri seti eğitilir. Doğrulama verisi ile eğitimden elde edilen sonuçları, model karşılaştırma ölçütleri ile karşılaştırılarak en uygun veri seti ve sonuç seçilerek test verisi ile doğruluğu test edilir.

Çapraz doğrulama yöntemleri bölünmüş örneklemle çapraz doğrulama, Birini atarak çapraz doğrulama, K-katlı çapraz doğrulama, Tekrarlanan k-katlı çapraz doğrulama, Monte carlo çapraz doğrulaması ve Bootstrap ile çapraz doğrulama olarak 5 kolda incelenebilir (Cebeci, 2020).

2.3.1 Bölünmüş Örneklemle Çapraz Doğrulama

Veri seti bölünmesi işlemine, ilk olarak tüm verinin karıştırılması ile başlanır. Ardından veri setinin bölünmesi işlemine geçilir. Bölünme oranları ise genellikle 70/30 veya 80/20 olarak kullanılır. Bu durumda veri seti eğitim verisi, test verisi ve doğrulama verisi olarak ayrılır. Eğitim verisi, model oluşturma verisidir. Doğrulama verisi, eğitilen modelin birçok model arasından seçilmesine yardımcı olur. Test verisi; modelin incelenmesi, doğrulanan modelin eğitimindeki gibi çalışıp çalışmadığını saptamak adına kullanılır. Veri setinin bölümlenme oranları parametre sayısı ve veri setinin büyüklüğüne göre belirlenir. Veri seti büyükse ve parametre sayısı az ise bu modellerde doğrulama verisi daha büyük seçilebilir. Orijinal veri kümesinde test kümesi küçük olan, eğitim verisi ise büyük olan yüzdeye sahip olur. Ardından eğitim verisi de eğitim kümesi ve doğrulama kümesi olarak ikiye ayrılır.

Bölünmüş örnekleme ile çapraz doğrulama algoritması işleyişi şu şekildedir (Cebeci, 2020);

1. Veri kümesi karıştırılır.

2. Veri seti eğitim, alt veri kümesi olan doğrulama ve test kümelerine ayrılır.

3. Model eğitim alt kümesi ile eğitilir.

4. Eğitilen model doğrulama alt kümesine uygulanarak veriden elde edilen tahminler ve hatalar hesaplanır.

5. Adım 4' de bulunan hatalar kullanılarak model başarı ölçütleri hesaplanır. Sürekli rastlantısal değişkenler için R^2, tahmin hataları kareler ortalamasının karekökü olan RMSE ve ortalama mutlak hata olarak isimlendirilen MAE gibi ölçütler kullanılır. Kategorik verilerde ise doğruluk ve sınıflama hatası gibi ölçütler kullanılır.

6. Model istenilen tahmin gücünü sağlayana kadar 3.- 6. adım arası tekrarlanır. Ardından model başarılı bulunduysa test verisi ile test edilir.

2.3.2 Birini Atarak Çapraz Doğrulama

Birini atarak çapraz doğrulama yöntemi, her bir veriyi tek tek dışarıda bırakarak, test verisini kalan veriler ile birleştirerek eğitim verisi olarak kullanır. Tek kalan veri ile test edilerek hata hesaplanır. Tahmin hatası ise her testten elde edilen hataların ortalaması alınarak elde edilir.

2.3.3 k katmanlı Çapraz Doğrulama

Veri seti yaklaşık olarak eşit büyüklükteki k kümeye bölünür. Ardından bir küme dışarıda bırakılır ve test kümesi, diğer kümeler ile birleştirilerek eğitim kümesi olarak kullanılır. Bu olay her küme için elde edilene kadar devam eder. Ardından kıyaslama yapılabilmesi için her küme için tahmin hataları elde edilir. Elde edilen tahmin hatalarının ortalaması alınır (Balta, 2018).

k katmanlı çapraz doğrulama yöntemi, birini atarak çapraz doğrulama yöntemine göre daha dayanıklı yöntem olduğu için tahmin hataları hakkında daha doğru sonuçlar verir (Cebeci, 2020).

R programında ‘bootstrap’ isimli paketten yararlanılabilir. Fonksiyon, crossval(x, y, theta.fit, theta.predict, ..., ngroup=n) şeklindedir. Burada x ve y matrisi veya

vektörü, theta.fit çapraz doğrulama fonksiyonunu, theta.fit fonksiyonundan elde edilen tahmin değerlerini ve ngroup ise grup sayısını temsil eder ve ngroup parametresinin varsayılan değeri n'dir.

2.3.4 Monte Carlo Çapraz Doğrulaması

Xu ve Liang (2001) tarafından önerilen Monte Carlo Çapraz Doğrulaması (MCCV) veri seti rastgele şekilde bölünerek eğitim kümesi ve test kümesi belirlenir (Cebeci, 2020). Ardından hata ölçütleri hesaplanarak kaydedilir. Bu işlem Monte Carlo Çapraz Dorğulama yönteminde 'R' defa tekrar edilir. Kaydedilen hata ölçütleri değerlerinin ortalaması alınır (Xu ve Liang, 2001).

Monte Carlo yönteminin en önemli avantajı veri kümesindeki her elemanın hem eğitim hem de test kümesinde yer alma şansı yakalamasıdır (Xu ve Liang, 2001). Tekrarlanan rastgele alt örnekleme doğrulaması olarak da isimlendirilir.

2.3.5 Holdout Çapraz Doğrulaması

Standart çapraz doğrulama yöntemi ile aynı işlemlerden geçmektedir. Bu yöntemde veri seti ikiye bölünerek bir kısmı eğitim diğer kısmı ise test verisi olarak kullanılması sonuncunda bir tane model ölçütü elde edilir. Bu yöntem, verilerin belirlenen bir bölümünün test verileri olarak kullanılmasına dayanmaktadır.

2.3.6 Bootstrap Çapraz Doğrulaması

Bootstrap çapraz doğrulama yönteminde ise yeniden örneklemler çekilir ve bu örneklemler eğitim verisi olarak kullanılır. Orijinal örneklem ise test verisi olarak kullanılır.

2.4 Bootstrap Yeniden Örnekleme Yöntemi

İstatistiksel çıkarım, örneklem istatistiklerinin örnekleme dağılımına dayanır. Bootstrap yöntemi, bir diğer yeniden örnekleme yöntemi olan jackknife yöntemine alternatif olarak öne sürülmüştür. Klasik yöntemlerin kullanımının uygun olmadığı ya da parametrik varsayımların sağlanmadığı durumlarda tercih edilmektedir. Bunun yanı sıra, kitleden alınan örneklemlere dayalı tahminin güvenilirliğini ortaya koymak amacıyla da bu yöntem önem taşımaktadır (Martinez ve Martinez, 2002).

İlgilenilen bir istatistiğin bootstrap dağılımı, birden çok örnekleme dayanan örnekleme dağılımına sahiptir. Bootstrap dağılımı, istatistiğin örnekleme dağılımı ile hemen hemen aynıdır ve örnekleme dağılımı ile de hemen hemen aynı dağılıma ve şekle sahip olur. Bootstrap dağılımının normal dağılıma yakınsadığı ve orijinal istatistikte konumlandığını belirlemek için grafikler ve istatistiksel testler kullanılır. Bootstrap dağılımı, ele alınan istatistik için, örnekleme dağılımının şekli, ortalaması ve yayılımı hakkında bilgi sağlar.

Bootstrap dağılımının standart hatası, standart sapmasıdır. İstatistikte elde edilen değişimi, orijinal olan verilere dayalı tahminler yapmak için kullanılır. Bootstrap dağılımı; orijinalde kullanılan verileri, değiştiraz ya da bu verilere ekleme yapmaz. Bootstrap dağılımı, bütün istatistikler için kullanılmaktadır (Hesterberg, Monaghan, Moore, Clipson ve Epstein, 2002). Bootstrap dağılımı, çok bilgi almak için, daha fazla örneklem kullanmak demek değildir. Fazla örneklem kullanımı hep daha yansız sonuçlar elde edilmesine yarar.

Plug-in ilkesi, örneklemlerden elde edilen istatistiklerin yardımı ile kitle parametrelerini tahmin etmenin bir yoludur (Yay, 2003). Plug-in ilkesi, μ ve $\sigma/\sqrt{n}$'in $\bar{x}$ ve $s/\sqrt{n}$ ile tahmin edilmesini önermektedir.

Bootstrap prosedürünün işleyişi (Okutan, 2009);

1. n adet gözlemden oluşan (x = $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$) orijinal veri seti kullanılarak rastgele ve yerine koyarak yapılan örnekleme ile yeni bir veri seti, ($x^* = \{x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n\}$) elde edilir. Bu yeni örneklemlere bootstrap örneklemi denir.

2. Bu yeni örneklem gibi B tane yeni rastgele örneklem elde edilir.

3. Her yeniden örneklem için ilgilenilen istatistik hesaplanarak elde edilir. Bu, parametrenin bootstrap kestirimdir.

Bootstrap yeniden örnekleme yöntemi küçük örneklemlere uygulandığında, örneklemin dağılımı normal olmasına rağmen dağılım normalden uzaklaşır. Fakat B tane tekrar ile yeniden örneklemler elde edildiğinde yeniden örneklemlerin dağılımları normale yakın olacaktır (Hestenberg, Monaghan, Moore, Clipson ve Epstein, 2002).

Yeterli veri olmama durumunda yanlılık ve çarpıklık düzeltmeleri için BCa (bias-corrected accelerated) ve tilting yöntemleri kullanılması önerilmektedir. BCa yöntemi, bir yanlılık düzeltme faktörü ekleyerek bootstrap parametresi tahminlerinin hem sapmasını hem de çarpıklığını düzeltmektedir (Jung ve ark., 2019).

R programında bootstrap yeniden örnekleme yöntemi altında çeşitli konularla ilgili paketler bulunmaktadır. Bunlardan bazıları; regresyon, zaman serisi, meta analiz, lasso regresyon, tip I hata, p değeri, rassal ağaçlar ve temel bileşen analizi'dir.

2.4.1 Örnekleme Dağılımı ve Bootstrap Dağılımı

Güven aralıkları, hipotez testleri ve standart hataların tümü istatistiksel verilerin örnekleme dağılımına bağlıdır. Uygulamada, bir örnekleme dağılımı oluşturmak için gerçekleşme ihtimali olan tüm rastgele örneklemleri hesaplayabilmek zahmetli ve belki imkansızdır. Aksine, kitle dağılımının bilindiği durumda, olasılık kuralları, her durumda olmamak üzere, örnekleme dağılımı hakkında bilgi elde etmeye olanak sağlar. Ancak çoğu uygulamada kitle dağılımının normallik varsayımı sağlanamayabilir ve hesaplanan örneklem doğru sonuçlar için yeterli olmayabilir. Bu durumda, olasılık kuralları uygulanması istatistiksel olarak doğru olmamaktadır.

Ancak, bilgisayar programları ve yazılımlar sayesinde, kitleden çok sayıda örneklem almak yerine, orijinal olarak belirlenen örnekleme, yeniden örnekleme yöntemleri uygulamak daha hızlı, doğru ve kolaydır. Örneğin, bir kitleden alınan örneklemin kitle olarak ele alınan örneklemden yeniden örneklemler elde edilerek bootstrap dağılımı oluşturulmuş olur. Hemen hemen her durumda, bootstrap dağılımı hem şekil hem de dağılımı açısından örnekleme dağılımıyla aynı olur. Fakat, konumlandığı yer parametre değeri değil orijinal istatistiğin değeridir.

2.4.2 Bootstrap Dağılımı ile Standart Hata ve Yanlılık

Bootstrap dağılımı, ortalamanın haricindeki istatistiklerin standart hatalarını hesaplamak için de kullanılabilir. Örnekleme dağılımı, normal dağılıma yakın şekle sahipse ve gerçek parametre değerini merkez almışsa, bootstrap standart hatası, 't' güven aralığı hesabında kullanılabilir. Bu durumda bootstrap dağılımı, örnekleme dağılımının şeklini, yayılım ve konum değerini kontrol etmek için kullanılabilir.

Örnekleme dağılımının yanlılık formülü $\text{bias}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ şeklindedir. Bootstrap yöntemi ile hesaplanması sonucunda hesaplanan istatistik, istatistiğin tahmin ettiği parametre değerinde konumlanmadığından dolayı yanlılık bulunmaktadır.

Yanlılığın bootstrap tahmini ise yukarıdaki formüle dayanılarak $\text{bias}(\hat{\theta}^*) = E(\hat{\theta}^*) - \theta^*$ şeklinde yazılır. Yanlılığın yeterince az olduğu durumda, bootstrap dağılımı, orijinal örneklem olarak ele alınan örneklemin istatistiğine yakın konum aldığını gösterir.

2.4.3 Bootstrap Güven Aralığı

Bir kitleden alınan, sınırlı sayıda örnekleme dayanarak, kitleye ait bilinmeyen parametreler için, parametrelerin gerçek değerini belirlenen olasılıkla kapsayan aralığa denir. Güven aralıkları, istatistiğin örnekleme dağılımını temel almaktadır. Bootstrap dağılımı, çok çeşitli istatistikler için güven aralığı bulunmasına yardımcı olmaktadır.

Bootstrap güven aralıkları elde etmek için kitleyi ilgilendiren şartlara ya da istatistiğin örnekleme dağılımı ile ilgili temel bilgilere ihtiyaç duyulmamaktadır. Bootstrap güven aralıkları, tüm istatistiklere uygulanabilir. Bootstrap dağılımı, örnekleme dağılımı normal dağılıma yakın ve yanlılığı küçük olduğu zaman kullanılabilir (Hestenberg, Monaghan, Moore, Clipson ve Epstein, 2002).

Plug-in ilkesine göre ilgili olunan istatistiğin parametresi için 1-α seviyesindeki güven aralığı; $\hat{\theta} \mp$ t * $SE_{boot,\hat{\theta}}$'dır. Burada t^*, 1- α düzeyindeki $t_{(n-1)}$ serbestlik derecesine sahip dağılımın sonucu olan 't' değeridir. İstenilen herhangi bir parametre için güven aralığı yine aynı formülle hesaplanır ve standart hata formülü değiştirilmeden kullanılır.

Bir istatistiğin bootstrap dağılımının %2,5 ve %97,5 yüzdelik değerleri arasında kalan değerler, karşılık gelen parametre için %95 yüzdelik bootstrap güven aralığı değerleridir. Bootstrap dağılımın standart hatası yeterince az ve bootstrap dağılımı normal dağılıma yakın olarak elde edildiyse, bootstrap t ve yüzdelik bootstrap güven aralıkları hemen hemen aynı değerleri elde eden sonuçlar verir.

R programında en çok kullanılan 5 paket ele alınmıştır. İncelenen paketler tek örneklem için uygulanabilir paketlerdir.

İlk olarak, 'WRS2' isimli paket, 10 Haziran 2022 tarihinde Patrick Mair, Rand Wilcox ve Indrajeet Patil tarafından kullanıma sunulmuştur. Toplamda, Tek ve iki örneklem için uygulanabilir fonksiyonları vardır. Çeşitli dayanıklı istatistiksel yöntemleri uygulayabilen bir R paketidir. Bu paket içinde dayanıklı konum kestiricileriyle ilgili fonksiyonlar bulunmaktadır. Bu fonksiyonlar uygulama kısmında kullanılmış ve bölüm dörtte bulunan tablolarda sonuçlar gösterilmiştir.

İkinci olarak 'bcaboot' paketi içinde (parametrik ve parametrik olmayan) yanlılık düzeltmeli ve hızlandırılmış bootstrap yöntemleri (bca) için güven aralığı fonksiyonları yer almaktadır. 9 Mayıs 2021'de Efron ve Narasimhan tarafından

kullanıma sunulmuştur. Bu paket yanlılık düzeltmesi kullanılması gerektiğinde yeterince iyi bir yöntemdir.

Üçüncü olarak, 'bootES' paketinde etki büyüklüğü için güven aralığı fonksiyonları yer alır. 5 Temmuz 2021'de Gerlanc ve Kirby tarafından kullanıma sunulmuştur. Bu pakette sadece 'bootES' fonksiyonuna yer verilmiştir. Sadece etki büyüklüğü ile ilgilenildiğinde kullanılması gerektiği için her zaman kullanıma açık bir paket değildir.

Dördüncü olarak, 'bootLR' paketi incelendiğinde, içinde 10 fonksiyon bulunduğu ve bu fonksiyonların güvenilirlik ve duyarlılık %100 olduğunda kullanılması uygun görülmüştür. Bootstrap yaklaşımı ile olabilirlik oran yöntemi kullanılarak bayesian bootstrap için güven aralığı uygulaması yapar. Koşulu bulunduğu için her zaman kullanılması uygun değildir.

Beşinci olarak, 'HDCI' paketi 7 Temmuz 2017 yılında Liu, Xu ve Li tarafından, lasso, ridge ve en çok olabilirlik regresyon yöntemlerinde bootstrap yöntemi kullanılarak uygulanabilmesi için sunulmuştur. Daha önce bahsedilen 'boot' isimli paketin içinde bulunan 'boot.ci(x, conf=, type=)' isimli fonksiyon da güven aralığı hesaplama işlemini gerçekleştirmektedir. x gözlem setini, 'conf' güven aralığı seviyesini ve 'type' ise güven aralığının tipini belirtmektedir (bca, perc, basic veya norm). En çok kullanılan paket ise bu pakettir. Verinin tipini ve güven seviyesini belirleyerek uygulanabilir.

Efron , 'standart hatanın ve güven aralıklarının bootstrap örnekleme ile bulunması' makalesinde, yüzdelik bootstrap (bootstrap percentile), yanlılığı düzeltilmiş yüzdelik bootstrap (Bias Corrected – BC) ve bootstrap-t yöntemlerine yer vermiştir (Efron, 1981).

2.4.3.1 Normal Yaklaşım ile Bootstrap Güven Aralıkları

Bahsi geçen istatistiğin standart hatası bilinmediği ama dağılımın normal dağılım gösterdiği durumlarda kullanılması önerilir. Bilinmeyen standart hata için bir kestirim değeri elde edilerek güven aralığı belirlemek için kullanılır.

Güven aralığı aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\left(\hat{\theta} - \widehat{bias^*}\right) \pm z_{1-(\alpha/2)}\widehat{se}^*_{boot} \tag{2.7}$$

Standart hatanın bilinmemesi durumundan dolayı çok tercih edilmemektedir.

R programında yüzdelik bootstrap güven aralığı sonuçları elde etmek için 'boot' paketi içinde bulunan 'boot.ci()' fonksiyonu kullanılarak type parametresi 'norm' olarak belirtilmelidir.

2.4.3.2 Yüzdelik Bootstrap Güven Aralıkları

Örnekleme ortalamasına bağlı olarak kitle ortalaması hakkında çıkarım yapmak amaçlanır. Örneklem boyutu çok büyük olmadığı sürece iyi performans göstermemektedir. Dağılım hakkında varsayım bulundurmayan, örneklem ortalamasının örnekleme dağılımının başka bir tahminini kullanır (Wilcox, 2003). Yüzdelik bootstrap yönteminde normal yaklaşımdan farklı olarak standart hatanın bilinmesine ihtiyaç yoktur. Güven aralığının alt ve üst sınırları, $\hat{\theta}$'in bootstrap dağılımının değerleri ile belirlenir.

Yöntem aşağıdaki adımlar izlenerek uygulanır (Özdemir ve Navruz, 2016).

1) Her bootstrap örneklemden $\widehat{\theta_b}^*$ değeri hesaplanır. b=1, …, B

2) B tane $\hat{\theta}^*$ değeri küçükten büyüğe sıralanır.

3) $\ell = \frac{\alpha B}{2}$ ve u=B-ℓ değerleri hesaplanır.

4) θ parametresi için %100(1 - α) güven düzeyinde güven aralığı, (ℓ +1). sıradaki ve u. sıradaki $\hat{\theta}^*$ değeri kullanılarak ($\hat{\theta}^*_{(\ell+1)}$; $\widehat{\theta_{(u)}}^*$) şeklinde elde edilir.

R programında yüzdelik bootstrap güven aralığı sonuçları elde etmek için 'boot' paketi içinde bulunan 'boot.ci()' fonksiyonu kullanılarak type parametresi 'perc' olarak belirtilmelidir.

2.4.3.3 Bootstrap-t Güven Aralıkları

Bootstrap-t yöntemi uygulamak için $\hat{\theta}^*$ değerlerinin standart hatasının bilinmesi durumunda uygulanması kolay bir yöntemdir. Kestiricinin standart hatası bilinmediğinde veya hesaplaması zor olduğu durumda her bootstrap örneklem için yeniden bootstrap uygulaması yapılmalı ve böylece standart hatanın buradan tahmin edilmesi gerekmektedir. Dayanıklı konum kestiricileri ile çalışılırken yüzdelik bootstrap yöntemini bootstrap-t yöntemine tercih etmek daha doğru sonuçlar verecektir (Wilcox, 2003).

Yöntem aşağıdaki adımlar izlenerek uygulanır.

1. Her bootstrap örneklemden t^* değeri hesaplanır. t^* değerleri $t_b{}^* = \frac{\hat{\theta}_b{}^* - \hat{\theta}}{\widehat{se}_b{}^*}$, b= 1, …, B şeklinde hesaplanır ve $\widehat{se}_b{}^*$ standart hatanın kestirimini ifade eder.

2. B tane t^* değeri küçükten büyüğe sıralanır.

3. $\ell = \frac{\alpha B}{2}$ ve u=B-ℓ değerleri hesaplanır.

4. θ parametresi için %100(1 - α) güven düzeyinde güven aralığı, (ℓ +1). sıradaki ve u. sıradaki $\hat{\theta}^*$ değeri kullanılarak ($\hat{\theta}$- $t_{(u)}{}^* \widehat{se}_b{}^*$; $\hat{\theta}$- $t_{(\ell)}{}^* \widehat{se}_b{}^*$)şeklinde elde edilir.

Bootstrap-t hipotez testi için;

H_0: $\mu = \mu_0$ hipotezi, T = $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ için red bölgeleri T ≤ $T_{(\ell+1)}{}^*$ ve T ≥ $T_{(u)}{}^*$ şeklindedir.

R programında bootstrap-t güven aralıkları elde edebilmek için 'MKinfer' isimli paketten yararlanılır (Kohl ve Kohl, 2020). 20 Ekim 2020 tarihinde, Matthias Koh

tarafından Cran'da yayınlanan ve içinde 15 fonksiyon bulunan bir pakettir. İçinde bulunan fonksiyonlar ise binomsal oranlar, ortalama ve standart sapma, ortalama farkları, değişim katsayısı, çapraz doğrulama, permütasyon testi ve bootstrap-t için kullanılmaktadır. 'boot.t.test()' fonksiyonunu R programında çalıştırmak için ilk önce 'gmp' isimli paket ardından 'MKinfer' isimli paket indirilir.

Örneğin;

```
library("gmp")

library("MKinfer")

boot.t.test(1:10, y = c(7:20))
```

2.4.3.4 BCa (Yanlılığı Düzeltilmiş-Hızlandırılmış) Bootstrap

BC bootstrap yöntemi ele alınarak geliştirilmiş olan ve yanlılığı düzeltilmiş-hızlandırılmış (Bias Corrected Accelerated – BCa) bootstrap yöntemi ise yine Efron tarafından önerilmiştir (Efron, 1987).

Belirlenen bir B değeri için bootstrap güven aralığının alt ve üst sınırlarını, bootstrap güven aralığının alt ve üst sınırlarının sapması cinsinden tahmin edilir (Andrews, D. W. ve Buchinsky, M., 2002). Uygulamada ve teoride yanlılık kaynaklı eksiklikleri olduğu için geliştirilen bir yöntemdir. Bu yöntem, yüzdelik bootstrap yöntemi temelde olmak üzere geliştirilmiştir. Buna bağlı olarak hızlandırma ve yanlılık düzeltmesi olarak iki parametre kullanılır (Andrews, D. W. ve Buchinsky, M., 2002) (Yıldıztepe, E. ve Özdemir, A. F., 2013). Burada bulunan parametreler sıfır değerini aldığında BCa yöntemi ve yüzdelik bootstrap yöntemi aynı sonuçları sağlamaktadır (Yıldıztepe, E. ve Özdemir, A. F., 2013).

BCa güven aralıkları aşağıda belirtildiği şekildedir.

$$BCa: \left[\hat{\theta}^{*}_{(\alpha_1)}, \hat{\theta}^{*}_{(\alpha_1)}\right] \tag{2.8}$$

Burada α_1 ve α_2 alt ve üst sınırları belirleyen değerlerdir. Sınırlar, yanlılık düzeltme parametresi $\hat{z}_0$ ve çarpıklığa bağlı ölçü olan hızlanma parametresi $\hat{a}$'e bağlı olarak belirlenir. (1-2α) güven aralığı için α_1 ve α_2 aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\alpha_1 = \phi\left(\hat{z}_0, \frac{\hat{z}_0 + z_\alpha}{1 - \hat{a}(\hat{z}_0 + z_\alpha)}\right) \tag{2.9}$$

$$\alpha_2 = \phi\left(\hat{z}_0, \frac{\hat{z}_0 + z_{1-\alpha}}{1 - \hat{a}(\hat{z}_0 + z_{1-\alpha})}\right) \tag{2.10}$$

Formüllerdeki $\phi(.)$, standart birikimli normal dağılım fonksiyonunu, z_α, bu fonksiyonun α. yüzdeliğini ve $z_{1-\alpha}$ ise 1-α. yüzdeliğini temsil etmektedir (Aktükün, 2002).

$\hat{\alpha}$ ve $\hat{z}_0$ aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\widehat{\theta_{(.)}} - \widehat{\theta_{(i)}})^3}{6\left\{\sum_{i=1}^{n}(\widehat{\theta_{(.)}} - \widehat{\theta_{(i)}})^2\right\}^{3/2}} \tag{2.11}$$

$$\hat{z}_0 = \phi^{-1}\left(\frac{\#(\hat{\theta}^{*}(b) < \hat{\theta})}{B}\right) \tag{2.12}$$

Burada $\widehat{\theta_{(i)}}$, i. jackknife tahminini ve $\widehat{\theta_{(.)}}$ jackknife tahminlerinin ortalamasını göstermektedir.

R programında 'wboot' ve 'bcaboot' isimli iki paket içinde yanlılık düzeltmeli-hızlandırılmış bootstrap fonksiyonları bulunmaktadır.

'bcaboot' paketi içinde altı fonksiyon bulunmaktadır. Bu fonksiyonlardan birisi otomatik bootstrap güven aralığı, iki tanesi BCa bootstrap güven aralığı ve bir tanesi

BCa bootstrap güven aralığı görseli oluşturken 1 tanesi de parametrik bootstrap güven aralığı elde etmek için kullanılır.

‘wboot’ paketi içinde 24 fonksiyon bulunmaktadır. Bu fonksiyonlardan birkaçı tek örneklem BCa bootstrap güven aralığı, birkaçı iki örneklem BCa bootstrap güven aralığı ve birkaçı eşleştirilmiş örneklem BCa bootstrap güven aralığı için kullanılır. Bu paket ‘boot, simpleboot’ paketlerine bağlı çalışmaktadır. ‘wboot’ paketi içinde tek ve çift örneklem için yanlılık düzeltmeli-hızlandırılmış bootstrap fonksiyonları bulunduğu için her iki paket de kullanıma uygundur. Bu yüzden her paket ayrı ayrı ele alınabilir.

BÖLÜM ÜÇ
DAYANIKLI KONUM KESTİRİCİLERİ

Veri seti hakkında bilgi aktaracak bazı analizlere, görsellere ve değerlere ihtiyaç vardır. Buradan elde edilen sonuçlardan yola çıkılarak veri seti hakkında genel bilgiye ve somut sonuçlara sahip olunur. Somut sonuçlardan elde edilecek bilgileri sağlayacak en temel ölçüler ise merkezi eğilim ve merkezi dağılım ölçüleridir. Merkezi eğilim ölçüleri, kitle için konum parametreleri olarak da tanımlanabilir. Konum parametreleri; ana olarak ortalama, medyan ve mod olarak üç kolda incelenebilir.

Ortalama, veri setinin aritmetik ortalamasını temsil eder ve uç değerlerden kolayca etkilenir. Medyan, veri setinin orta noktasını temsil etmekte ve veri setinin yarısı bu değerden büyük diğer yarısı da bu değerden küçüktür. Ortalamaya göre uç değerlerden daha az etkilenir. Bu durumda ortalamadan daha dayanıklı bir konum kestiricisi olduğu söylenebilir. Mod değeri ise veri setinde en çok tekrar eden değer olmakla birlikte ortalama ve medyana göre daha az dayanıklıdır. Bu üç değer, dağılımın merkez değerini belirterek normal dağılan verilerde, güvenilir ve yansız sonuçlar vermektedir. Fakat kitle dağılımında aykırı değer gözlenmesi, veri setinin yeterli olmaması veya kitle dağılımının simetrik olmaması durumlarında yetersiz kalmaktadır (Wilcox, 2011). Bu gibi durumlarla, gerçek veri setlerinde sürekli karşılaşılmaktadır. Bu sorunlara çözüm sağlanamadığı durumlarda, yapılan analizlerin veya testlerin sonuçları güvenilir olmamaktadır. Dayanıklı kestiriciler, bu durumlara çözüm sağlamak için kullanılmaktadır.

Dayanıklılık, ilk olarak 1953 yılında istatistiksel olarak Box tarafından ortaya atılmıştır. Box dayanıklılık terimini, uç değerlere karşı dayanıklı istatistiksel sonuçlar üreten işlemleri tanımlamak için kullanmıştır (Kayhan, 2006). Dayanıklılık terimi, ‘sağlamlık’ olarak da bazı kaynaklarda geçmektedir. Dayanıklı yöntemlerin amacı, veri setindeki uç değerlerin etkisini azaltmak veya ortadan kaldırmaktır. Bilgisayarların hızlı ve erişilebilir olmaları ile dayanıklı kestiricilerin uygulanabilirliği de artmıştır.

En yaygın dayanıklı konum kestiricileri budanmış ortalama, winsorized ortalama, tek adım m konum kestiricisi, düzeltilmiş tek adım m konum kestiricisidir.

3.1 Budanmış Ortalama

Budanmış ortalama, veri setinden belirli kurallara göre veri budanarak uç değerlere karşı daha dayanıklı ve veri setini daha iyi temsil eden bir konum ölçüsüdür. Veri setinin iki ucundan da belirli oranda veri budanması ile elde edilen ortalama türüdür. İlk başta veri seti küçükten büyüğe sıralanır. Budanmış ortalamada budama yüzdesi belirlenerek, belirlenen yüzde kadar hem sağ uçtan hem de sol uçtan budanır. Geriye kalan gözlemlerin aritmetik ortalaması alınarak kitle budanmış ortalaması hesaplanmış olur.

Formülü, Eşitlik 3.1'de gösterildiği gibidir.

$$\bar{x_t} = \frac{1}{n-2g}[X_{(g+1)} + X_{(g+2)} + \ldots + X_{(n-g)}], \qquad g = [\gamma n] \tag{3.1}$$

'g' sayısı en yakın tam sayıya yuvarlanır.

γ = budama yüzdesi.

R programının temel fonksiyonlarından birisi olan mean() fonksiyonu kullanılarak ve 'trim' parametresine budama yüzdesi değeri atanarak budanmış ortalama elde edilir. Bu fonksiyon veri vektörü kullanımı içindir. Kullanılacak fonksiyon aşağıdaki gibidir.

mean(x, trim= γ)

Eğer veri matrisi ile çalışılacaksa farklı bir pakette bulunan farklı bir fonksiyon kullanılmalıdır. Her sütun için budanmış ortalamayı veren bu fonksiyon, 'depthTools' paketi içindeki 'tmean()' fonksiyonudur (Lopez-Pintado, S., Torrente, A., ve Torrente, M. A., 2021).

Örneğin;

x= matrix(rnorm(100), 10, 10)

m.x=apply(x, 2, mean)

t.x=tmean(x)

t.x$tm

Budanmış ortalama standart sapması ve güven aralığı için ayrı kodlar bulunmaktadır. Bu kodlara, Rand R. Wilcox'un 'Applying Contemporary Statistical Techniques-Academic Press' isimli kitabında yer verilmiştir.

Bu kodlar aşağıda bulunduğu şekilde kullanılır.

trimse(x, tr=.2, alpha=.05)

trimci(x, tr=.2, alpha=.05)

3.2 Winsorized Ortalama

Veri setinde sıralama işlemi yapıldıktan sonra sağ ve sol uçtan budama işlemi uygulanır. Sağ uçtan budanan değerler yerine en büyük değer, sol uçtan budanan değerler yerine en küçük değer alınır. Elde edilen değerler ile aritmetik ortalama hesaplanarak winsorized ortalama Eşitlik 3.2'deki gibidir. Aykırı değerlere karşı etkili bir ortalamadır.

$$\bar{x}_w = \frac{1}{n}\left[(g+1)X_{(g+1)} + X_{(g+2)} + \ldots + X_{(n-g-1)} + (g+1)\,X_{(n-g)}\right],\ g = [\gamma n] \qquad (3.2)$$

'g' sayısı en yakın tam sayıya yuvarlanır.

γ = budama yüzdesi.

R programında, ‘WRS2’ isimli paket içindeki ‘winmean()’ isimli fonksiyon ile winsorized ortalama hesaplanır. ‘x’ veri vektörünü ve ‘tr’ parametresi budama yüzdesi değerini temsil etmektedir.

winmean(x, tr = γ)

R programında varsayılan olarak ‘winsor.means()’ fonksiyonu da bulunmaktadır. Bu fonksiyon ise matris verilerle kullanılır. Bir matris veri kümesi olduğu varsayıldığında her sütun için winsorized ortalamayı hesaplar (Wilcox, R. R., 2011). Yine veri vektörü için ‘winsor.mean()’ fonksiyonu kullanılabilir. ‘winsor.sd()’ ve ‘winsor.var()’ fonksiyonları ile de veri kümesinin winsorized standart sapması ve varyansı bulunabilir. Ayrıca ‘winsor()’ fonksiyonu ile de winsorized değerleri görülebilir.

Örneğin;

```
x <- matrix(1:100,ncol=5)

winsor.means(x)
```

3.3 Tek-Adım M Kestiricisi

Tek-adım m kestiricisi (one-step M-estimator), aykırı değerlere karşı etkili olan ve Huber tarafından geliştirilmiştir bir kestiricidir (Wilcox, 2011). Dağılımın kuyruklarından gelen değerlere diğer değerlerden daha az ağırlık vererek uç değerlerin etkisini azaltmaktadır.

Prosedür işleyişi şu şekildedir;

1. Veri seti sıralanarak medyan bulunur.

2. MADN, i_1 ve i_2 değerleri hesaplanarak değerler yerine koyulur.

3. $\bar{x}_{om}$, tek adım M kestiricisi değeri elde edilmiş olur.

$$\bar{x}_{om} = \frac{1.28\,(MADN)(i_1 - i_2) + \sum_{i=i_1+1}^{n-i_2} x_{(i)}}{n - i_1 - i_2} \tag{3.3}$$

Eşitlik 3.3'de i_1 ve i_2 değerleri, $i_1 = \frac{x_i - M}{MADN} < -1.28$, $i_2 = \frac{x_i - M}{MADN} > 1.28$ koşullarına takılan gözlem sayılarıdır.

MADN, normalleştirilmiş medyan mutlak sapma olarak isimlendirilir ve $\frac{MAD}{0.6745}$ ile elde edilir. MAD ise, $\{|x_1 - M|, |x_2 - M|, ..., |x_n - M|\}$ ile hesaplanmaktadır. M, medyanı temsil eder.

R programında, 'WRS2' isimli paket içindeki 'onestep' isimli fonksiyon ile tek adım m kestiricisi hesaplanır (Mair, P. ve Wilcox, R. 2020). 'x' veri vektörünü ve 'bend' parametresi aykırı değer tespit etme değerini temsil etmektedir. Varsayılan olarak 'bend' değeri 1.28'dir. 'bend' değerinin artması dağılımın kuyruklara olan duyarlılığı azalttığı için Huber 'bend' değeri için 1.28 değerini önerir (Mair, P. ve Wilcox, R. 2020).

onestep(x, bend = 1.28)

3.4 Düzeltilmiş Tek-Adım M Kestiricisi

Düzenlenmiş tek adım m kestiricisi (modified one-step M-estimator), tek adım m kestiricisi formülünden $1.28\,(MADN)(i_1 - i_2)$ kısmı çıkartılarak elde edilen bir

yöntemdir. Normal dağılım altındaki etkisinin artması için aykırı değerleri belirleyen formül yeniden düzenlenmiştir (Özdemir, 2010).

$$\bar{x}_{mom} = \frac{\sum_{i=i_1+1}^{n-i_2} x_{(i)}}{n-i_1-i_2} \tag{3.4}$$

Eşitlik 3.4'de i_1 ve i_2 değerleri, $i_1 = \frac{x_i - M}{MADN} < -2.24$, $i_2 = \frac{x_i - M}{MADN} > 2.24$ koşullarına takılan gözlem sayılarıdır.

R programında, 'WRS2' isimli paket içindeki 'mom' isimli fonksiyon ile tek adım m kestiricisi hesaplanır. 'x' veri vektörünü ve 'bend' parametresi aykırı değer tespit etme değerini temsil etmektedir. Varsayılan olarak 'bend' değeri 2.24'tür.

```
mom(x, bend = 2.24)
```

BÖLÜM DÖRT
UYGULAMA

Uygulama bölümünde 9 dayanıklı konum kestiricisinin, parametrik olmayan 4 bootstrap yöntem ile elde edilen, iki yönlü ve %95 güven aralıklarının performanslarının karşılaştırılması için simülasyon çalışması oluşturulmuştur. Kullanılacak dayanıklı konum kestiricileri, budanmış ortalama ($\gamma = 0.1$), budanmış ortalama ($\gamma = 0.2$), budanmış ortalama ($\gamma = 0.25$), medyan, tek-adım M- tahmin edicisi, düzeltilmiş tek-adım M-tahmin edicisi, winsorized ortalama ($\gamma = 0.1$), winsorized ortalama ($\gamma = 0.2$) ve kullanılacak parametrik olmayan bootstrap yöntemler de bootstrap-t, yüzdelik bootstrap, normal yaklaşım ile bootstrap ve BCa yöntemleridir. Uygulamada üç sürekli ve bir kesikli dağılım olmak üzere 4 tane teorik dağılım ve iki tane de gerçek veri örneği, bu değerlendirmeler altında kapsama oranı yönünden yapılmıştır.

4.1 Rastgele Veriler ile Uygulama

Bu çalışmada üç farklı teorik dağılım kullanılmıştır. Bu üç dağılım, standart normal dağılım ve basıklık ve çarpıklık değerleri değiştirilerek elde edilmiş iki g&h dağılımıdır. Bu çarpıklık ve basıklık değerleri, g&h ($g = 0.5$, $h = 0.2$) ve g&h ($g = 0.5$, $h = 0.4$) şeklindedir. Örneklem genişlikleri ise $n = 20$ ve $n = 50$ olarak belirlenmiştir. Bootstrap örneklem sayısı (B) 1500 alınmış ve her durum 3500 kere tekrar edilmiştir (Yıldıztepe ve Özdemir, 2013).

Bu çalışmada bootstrap-t, yüzdelik bootstrap, normal yaklaşım ile bootstrap ve BCa yöntemlerini 9 dayanıklı konum kestiricisi ile incelenerek kapsama oranları açısından karşılaştırılmıştır. Teorik dağılım olarak kullanılan g&h dağılımı, çarpıklığın kontrol edilebileceği g ve basıklığın kontrol edilebileceği h parametrelerini kullanarak normal dağılımdan sapma durumunu derecelendirir. $g = h = 0$ için standart normal dağılıma eşdeğer olan dağılımdır (He ve Raghunathan, 2006). g&h dağılımından veri üretmek için standart normal değişkenler (z) üretilerek belirtilen yöntemlerle, belirtilen konum kestiricileri birlikte incelenir.

Güven düzeyi, uygulamada en çok kullanılan %95 (α=0.05) olarak kullanılmıştır. Literatürdeki (Kuonen, 2005) (Banik ark., 2010) benzer çalışmalar incelenmiş olup (1-α) ± (0.2α) aralığındaki kapsama oranlarının nominal değere yakın olarak kabul edildiği görülmüştür. Bu çalışmada nominal değerler [0.94; 0.96] aralığı olmaktadır. Simülasyon çalışmaları sonucunda elde edilen kapsama değerleri tablolarda verilmiştir. Nominal değerlere yakın kapsama oranları aynı tablolar üzerinde işaretlenmiştir.

Tablo 4.1 Kullanılan g&h dağılımlarına ait çarpıklık ve basıklık değerleri

g	**h**	$\widehat{\kappa_1}$	$\widehat{\kappa_2}$
0	0	0	3
0.5	0.2	10.554	200.736
0.5	0.4	76.877	14091.46

Tablo 4.1'de uygulamada kullanılan g&h dağılımının g ve h değerleri ile elde edilen çarpıklık ve basıklık değerleri bulunmaktadır.

Tablo 4.2 Kitle dağılımı Normal(0, 1) olduğunda gerçekleşen kapsama oranları

	n = 20				n = 50			
	bs-yüzdelik	bs-t	bs-BCa	bs-normal	bs-yüzdelik	bs-t	bs-BCa	bs-normal
μ	0.9191	**0.9423**	0.9237	0.9283	**0.9406**	**0.9489**	**0.9400**	0.9340
$\mu_{tr=0.1}$	0.9371	**0.9622**	0.9317	0.9377	**0.9449**	**0.9534**	**0.9454**	**0.9411**
$\mu_{tr=0.2}$	**0.9393**	**0.9469**	**0.9434**	0.9200	**0.9466**	**0.9515**	**0.9443**	**0.9426**
$\mu_{tr=0.25}$	**0.9483**	**0.9514**	**0.9426**	0.9169	**0.9397**	**0.9576**	**0.9509**	0.9374
$\text{Winsorized}_{tr=0.1}$	**0.9454**	**0.9454**	**0.9483**	0.9294	0.7669	0.7991	0.7857	0.7671
$\text{Winsorized}_{tr=0.2}$	**0.9469**	**0.9509**	**0.9423**	0.9289	**0.9486**	**0.9491**	**0.9457**	**0.9440**
Medyan	0.9386	0.8929	0.9320	0.9057	**0.9494**	0.9051	**0.9406**	0.9174
Tek adım-M	**0.9397**	**0.9517**	0.9351	0.9349	**0.9460**	**0.9557**	**0.9480**	**0.9394**
Düzeltilmiş Tek adım-m	**0.9543**	0.9720	**0.9391**	0.9234	0.9606	**0.9554**	**0.9537**	0.9389

Tablo 4.2'de Normal dağılan kitle için kapsama oranı sonuçları görülmektedir. bs-t 20 örneklem değerinde, 9 kestiriciden 7 tanesinde başarılı sonuçlar vermiştir. Örneklem genişliği 50 olduğunda bs-BCa winsorized (tr = 0.1) hariç tüm 8 kestiricide başarılı sonuçlar vermiştir. Winsorized ortalama 50 örneklem genişliğinde bütün güven aralığı yöntemlerinde başarısız sonuçlar almıştır. 20 örneklem genişliğinde bs-normal güven aralığında hiçbir kestirici başarılı sonuçlar verememiştir. 20 örneklem genişliğinde bs-bca güven aralığında 9 kestiriciden 5 tanesinde başarılı sonuç alınmıştır.

Kitlenin normal olduğu simülasyon verisinde; ortalama kestiricisi ve budanmış ortalama (tr = 0.1) kestiricisi için küçük örneklem boyutunda bootstrap-t yöntemi, büyük örneklem boyutunda ortalama için yüzdelik bootstrap, bootstrap-t, BCa ve budanmış ortalama (tr = 0.1) için ise ortalama kestiricisine ek olarak normal güven aralığı yöntemi nominal değere yakın değerler almaktadır. Budanmış ortalama (tr = 0.2 ve tr = 0.25) için küçük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap, bootstrap-t, BCa yöntemleri ve büyük örneklem boyutunda budanmış ortalama (tr = 0.25) için yüzdelik bootstrap, bootstrap-t, BCa yöntemleri ve budanmış ortalama (tr = 0.2) için ise budanmış ortalama (tr = 0.25) kestiricisine ek olarak normal yaklaşım ile bootstrap güven aralığı yöntemi nominal değeri yakalamıştır. Winsorized ortalama (tr = 0.1 ve tr = 0.2) için küçük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap, bootstrap-t, BCa yöntemleri ve büyük örneklem boyutunda winsorized ortalama (tr = 0.2) için tüm yöntemler nominal değere yakın değerler almaktadır. Medyan için küçük örneklem boyutunda hiçbir yöntem nominal değeri yakalayamamaktadır ve büyük örneklem boyutunda sadece yüzdelik bootstrap yöntemi ve BCa yöntemi nominal değere yakın değer almıştır. Küçük örneklem boyutunda; düzeltilmiş tek adım-m kestiricisi için yüzdelik bootstrap ve BCa yöntemi, tek adım-m kestiricisi için yüzdelik bootstrap ve bootstrap-t yöntemi nominal değeri yakalamıştır. Büyük örneklem boyutunda ise, düzeltilmiş tek adım-m kestiricisi için yüzdelik bootstrap, bootstrap-t ve BCa yöntemi, tek adım-m kestiricisi için bütün yöntemler nominal değeri yakalamıştır.

Tablo 4.3 Kitle dağılımı g&h (g=0.5, h=0.2) iken gerçekleşen kapsama oranları

	n = 20				n = 50			
	bs-yüzdelik	bs-t	bs-BCa	bs-normal	bs-yüzdelik	bs-t	bs-BCa	bs-normal
μ	0.8891	0.8994	0.8763	0.8794	0.9046	0.9220	0.8900	0.9140
$\mu_{tr=0.1}$	**0.9466**	**0.9586**	**0.9471**	**0.9514**	**0.9469**	0.9046	**0.9483**	**0.9497**
$\mu_{tr=0.2}$	**0.9511**	0.9326	**0.9434**	**0.9446**	**0.9463**	0.8771	**0.9437**	**0.9523**
$\mu_{tr=0.25}$	**0.9411**	0.9260	**0.9446**	**0.9409**	**0.9469**	0.8657	**0.9514**	**0.9474**
Winsorized$_{tr=0.1}$	**0.9471**	**0.9423**	**0.9466**	**0.9463**	0.7771	0.7531	0.7977	0.7806
Winsorized$_{tr=0.2}$	**0.9420**	**0.9446**	**0.9440**	**0.9426**	**0.9549**	0.8663	**0.9460**	**0.9409**
Medyan	**0.9406**	0.8489	0.9314	0.9186	**0.9429**	0.8126	**0.9469**	0.9277
Tek adım-M	**0.9431**	0.9171	0.9374	0.9309	**0.9474**	0.8777	**0.9406**	**0.9397**
Düzeltilmiş Tek adım-m	**0.9583**	0.9031	0.9346	0.9277	**0.9574**	0.8457	**0.9514**	0.9263

Tablo 4.3'de kitle dağılımı g = 0.5 ve h = 0.2 olduğu durumdaki kapsama oranı sonuçları görülmektedir. bs-yüzdelik iki örneklem genişliğinde de başarılı sonuçlar vermiştir. 20 örneklem genişliği için 9 kestiricinin 8 tanesinde ve 50 örneklem için 8 tanesinde nominal değere yakın sonuçlar vermiştir. Örneklem genişliği 50 olduğunda bs-t hiçbir kestirici için başarılı sonuç verememiştir. Ortalama için hiçbir güven aralığı yöntemi nominal değere yakın sonuç vermemiştir. 20 örneklem için BCa ve normal yaklaşım ile bootstrap 9 kestiriciden 5 tanesinde nominal değere yakın sonuçlar vermiştir. 50 örneklem için yüzdelik bootstrap ve BCa 7 kestirici için nominal değere yakın sonuçlar vermiştir.

Kitlenin çarpık olduğu ve dolayısıyla uç değerlerin bulunduğu g&h(0.5, 0.2) verisinde; ortalama kestiricisi için hiçbir yöntem nominal değeri yakalamıştır. Budanmış ortalama (tr = 0.1) kestiricisi için küçük örneklem boyutunda tüm yöntemler, büyük örneklem boyutunda ise yüzdelik bootstrap, BCa ve normal yaklaşım bootstrap yöntemleri nominal değere yakındır. Budanmış ortalama (tr = 0.2

ve tr = 0.25) için bootstrap-t güven aralığı yöntemi hariç diğer tüm yöntemler için iki örneklem boyutunda da nominal değere yakın değerler almaktadır. Winsorized ortalama (tr = 0.1 ve tr = 0.2) için küçük örneklem boyutunda tüm yöntemlerde nominal değere yakın değerler almaktadır. Winsorized ortalama (tr = 0.1) büyük örneklem boyutunda hiçbir yöntemde nominal değere yakın değerler almamıştır fakat Winsorized ortalama (tr = 0.2) yüzdelik bootstrap, BCa ve normal yaklaşım ile bootstrap güven aralığı yöntemleri nominal değeri yakalamıştır. Medyan küçük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap yönteminde, büyük örneklem boyutunda ise yüzdelik bootstrap yöntemi ve BCa yöntemi nominal değere yakın değer almıştır. Küçük örneklem boyutunda; düzeltilmiş tek adım-m kestiricisi için yüzdelik bootstrap ve BCa yöntemi, tek adım-m kestiricisi için yüzdelik bootstrap, bootstrap-t ve normal bootstrap yöntemlerinde nominal değeri yakalamıştır. Büyük örneklem boyutunda ise, düzeltilmiş tek adım-m kestiricisi için bütün kestiricilerde nominal değeri yakalarken, tek adım-m kestiricisi yüzdelik bootstrap, bootstrap-t ve normal bootstrap yöntemlerinde nominal değeri yakalamıştır. Tek adım-m ve düzeltilmiş tek adım-m kestiricileri küçük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap yönteminde nominal değeri sağlamıştır. Tek adım-m kestiricisi büyük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap yöntemi, BCa yöntemi ve normal yaklaşım ile bootstrap yönteminde, düzeltilmiş tek adım-m kestiricisi ise yüzdelik bootstrap yöntemi ve BCa yönteminde nominal değeri yakalamıştır.

Tablo 4.4 Kitle dağılımı g&h (g=0.5, h=0.4) iken gerçekleşen kapsama oranları

	n = 20				n = 50			
	bs-yüzdelik	bs-t	bs-BCa	bs-normal	bs-yüzdelik	bs-t	bs-BCa	bs-normal
μ	0.8169	0.8403	0.7897	0.7983	0.8411	0.8594	0.8440	0.8366
$\mu_{tr=0.1}$	**0.9454**	**0.9589**	**0.9506**	0.9666	**0.9431**	0.8622	**0.9540**	**0.9586**
$\mu_{tr=0.2}$	**0.9426**	0.9191	0.9360	**0.9586**	**0.9449**	0.8023	**0.9531**	**0.9534**
$\mu_{tr=0.25}$	0.9363	0.8891	0.9386	**0.9509**	**0.9509**	0.7820	**0.9391**	**0.9586**
$\text{Winsorized}_{tr=0.1}$	**0.9477**	**0.9420**	**0.9451**	**0.9591**	0.7929	0.6814	0.7854	0.8031
$\text{Winsorized}_{tr=0.2}$	**0.9526**	0.9349	**0.9477**	0.9631	**0.9543**	0.8234	**0.9509**	**0.9494**
Medyan	**0.9417**	0.7997	0.9400	0.9349	**0.9534**	0.7200	**0.9423**	0.9357
Tek adım-M	0.9349	0.8943	0.9280	**0.9463**	**0.9477**	0.7869	**0.9403**	**0.9520**
Düzeltilmiş Tek adım-m	0.9683	0.8306	0.9294	**0.9397**	0.9600	0.7743	**0.9426**	0.9340

Tablo 4.4' de kitle dağılımı g = 0.5 ve h = 0.4 olduğu durumdaki kapsama oranı sonuçları görülmektedir. bs-t iki örneklem genişliğinde de başarılı sonuçlar verememiştir. Örneklem genişliği 50 olduğunda bs-t hiçbir kestirici için başarılı sonuç vermemiştir. Ortalama için hiçbir güven aralığı yöntemi nominal değere yakın sonuç vermemiştir. 20 örneklem için yüzdelik bootstrap ve normal yaklaşım ile bootstrap 9 kestiricinin 5 tanesinde nominal değere yakın çıktılar vermiştir. 50 örneklem için yüzdelik bootstrap ve BCa 9 kestiricinin 6 tanesinde nominal değere yakın sonuçlar vermiştir. Normal yaklaşım ile bootstrap yöntemi 50 örneklem genişliğinde, 9 kestiricinin 4 tanesinde başarılı sonuç vermiştir.

Kitlenin çarpık olduğu diğer veri seti olan g&h(0.5, 0.4) verisinde; ortalama kestiricisi için hiçbir yöntem nominal değeri yakalamıştır. Budanmış ortalama (tr = 0.1) kestiricisi için küçük örneklem boyutunda tüm yöntemler, büyük örneklem boyutunda ise yüzdelik bootstrap, BCa ve normal yaklaşım bootstrap yöntemleri nominal değere yakındır. Budanmış ortalama (tr = 0.2) için küçük örneklem boyutunda

yüzdelik bootstrap ve normal yaklaşım ile bootstrap yöntemleri, büyük örneklem boyutunda bootstrap-t güven aralığı yöntemi hariç diğer tüm yöntemler için nominal değere yakın değerler almaktadır. Budanmış ortalama (tr = 0.25) için küçük örneklem boyutunda normal yaklaşım ile bootstrap yöntemi, büyük örneklem boyutunda bootstrap-t güven aralığı yöntemi hariç diğer tüm yöntemler için nominal değere yakın değerler almaktadır. Winsorized ortalama (tr = 0.1) için küçük örneklem boyutunda tüm yöntemlerde nominal değere yakın değerler almaktadır. Winsorized ortalama (tr = 0.1) büyük örneklem boyutunda hiçbir yöntemde nominal değere yakın değerler almamıştır fakat Winsorized ortalama (tr = 0.2) yüzdelik bootstrap, BCa ve normal yaklaşım ile bootstrap güven aralığı yöntemleri nominal değeri yakalamıştır. Medyan küçük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap yönteminde, büyük örneklem boyutunda ise yüzdelik bootstrap yöntemi ve BCa yöntemi nominal değere yakın değer almıştır. Küçük örneklem boyutunda; düzeltilmiş tek adım-m kestiricisi için yüzdelik bootstrap yöntemi, tek adım-m kestiricisi için normal yaklaşım ile bootstrap yöntemlerinde nominal değeri yakalamıştır. Büyük örneklem boyutunda ise, tek adım-m kestiricisi için bootstrap-t yöntemi hariç tüm yöntemlerde nominal değeri yakalarken, düzeltilmiş tek adım-m kestiricisi yüzdelik bootstrap ve bootstrap-t yöntemlerinde nominal değeri yakalamıştır. Tek adım-m ve düzeltilmiş tek adım-m kestiricileri küçük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap yönteminde nominal değeri sağlamıştır.

Tablo 4.5 Kitle dağılımı geometrik (p = 0.1) iken gerçekleşen kapsama oranları

	n = 20				n = 50			
	bs-yüzdelik	bs-t	bs-BCa	bs-normal	bs-yüzdelik	bs-t	bs-BCa	bs-normal
μ	0.9003	0.9380	0.8969	0.9123	0.9343	**0.9431**	0.9377	0.9320
$\mu_{tr=0.1}$	0.9386	**0.9577**	0.9346	0.9277	**0.9523**	0.9351	**0.9506**	**0.9437**
$\mu_{tr=0.2}$	**0.9457**	0.9374	0.9317	0.9189	**0.9411**	0.9320	**0.9397**	**0.9400**
$\mu_{tr=0.25}$	**0.9429**	0.9257	**0.9429**	**0.9400**	**0.9451**	0.9206	**0.9460**	**0.9394**
Winsorized$_{tr=0.1}$	**0.9394**	**0.9463**	**0.9586**	0.9106	0.9232	0.9123	0.9351	0.9017
Winsorized$_{tr=0.2}$	**0.9543**	**0.9391**	0.9114	0.9257	**0.9474**	**0.9409**	**0.9399**	0.9323
Medyan	0.9369	0.8466	**0.9393**	0.9254	**0.9446**	0.8083	**0.9411**	0.9269
Tek adım-M	**0.9394**	0.9075	**0.9410**	0.9123	0.9380	0.9090	**0.9451**	0.9365
Düzeltilmiş Tek adım-m	**0.9400**	0.9314	0.9371	0.9143	**0.9449**	0.8809	**0.9409**	0.8823

Tablo 4.5' de kitle dağılımı Geometrik dağılım (p = 0.1) olduğu durumdaki kapsama oranı sonuçları görülmektedir. Ortalamanın başarılı sonuçlar veremediği görülmektedir. bs-normal yöntemi, her iki örneklem boyutu için 9 kestiricinin 6 tanesinde nominal değere yakın sonuçlar vermiştir. 50 örneklem için 9 kestiricinin; 7 tanesinde BCa yöntemi ve 6 tanesinde yüzdelik bootstrap yöntemi nominal değere yakın sonuçlar vermiştir. Bootstrap-t yöntemi 20 örneklem için 9 kestiricinin 3 tanesinde ve 50 örneklem için 9 kestiricinin 2 tanesinde nominal değere yakın sonuçlar vermiştir.

Geometrik dağılım (p = 0.1) verisinde; ortalama kestiricisi için büyük örneklem boyutunda bootstrap-t yöntemi nominal değeri yakalamıştır. Budanmış ortalama (tr = 0.1) kestiricisi için küçük örneklem boyutunda bootstrap-t yöntemi, büyük örneklem boyutunda ise bootstrap-t haricindeki tüm yöntemler nominal değere yakındır. Budanmış ortalama (tr = 0.2) yüzdelik bootstrap yönteminde, büyük örneklem için budanmış ortalama (tr = 0.2 ve tr = 0.25) bootstrap-t, yüzdelik bootstrap ve BCa

yöntemlerinde nominal değere yakın değerler almaktadır. Winsorized ortalama (tr = 0.1) için sadece küçük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap, bootstrap-t ve BCa yöntemleri nominal değere yakın değerler almaktadır. Winsorized ortalama (tr = 0.2) küçük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap ve bootstrap-t yöntemleri, büyük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap, bootstrap-t ve BCa yöntemlerinde nominal değere yakın değerler almaktadır. Medyan için küçük örneklem boyutunda BCa yöntemi ve büyük örneklemde yüzdelik bootstrap ve BCa yöntemlerinde nominal değeri yakalamaktadır. Küçük örneklem boyutunda; düzeltilmiş tek adım-m kestiricisi için yüzdelik bootstrap yöntemi, tek adım-m kestiricisi için yüzdelik bootstrap ve BCa yöntemlerinde nominal değeri yakalamıştır. Büyük örneklem boyutunda ise, düzeltilmiş tek adım-m kestiricisi için bootstrap-t yöntemi hariç bütün kestiricilerde nominal değeri yakalarken, tek adım-m kestiricisi BCa yönteminde nominal değeri yakalamıştır.

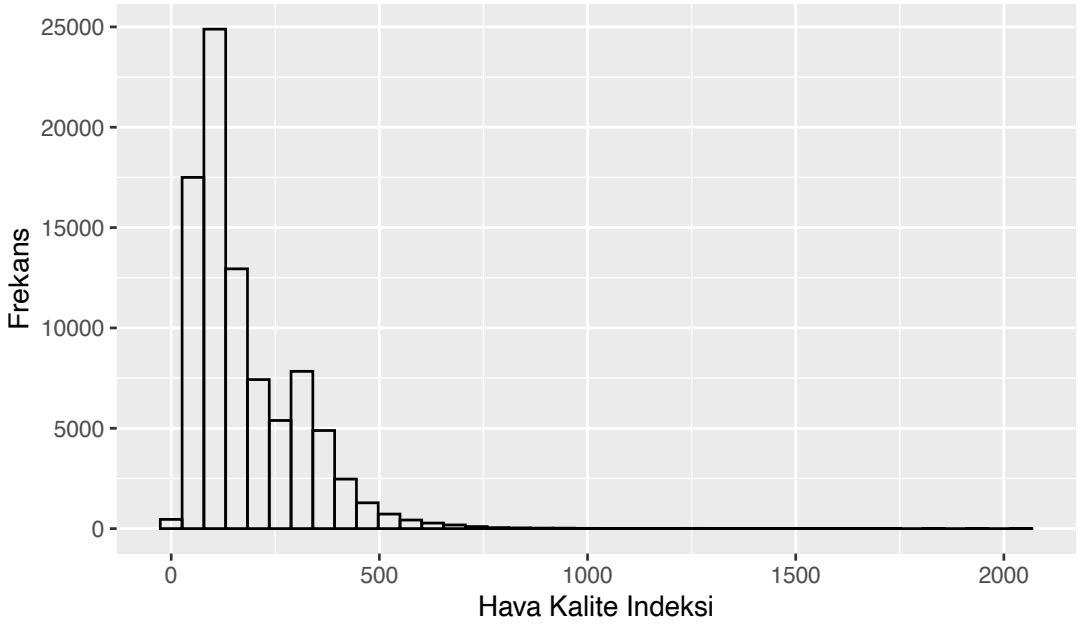
4.2 Gerçek Veri Uygulaması

Bu bölümde simülasyon çalışmasında kullanılan yöntemler ve kestiriciler iki farklı gerçek veri setine uygulanmıştır. Gerçek verilerden 'Hava Kirliliği İndeksi' verisi ve 'Vücut Yağ Yüzdesi' verisi farklı karakterdeki iki veri setidir (Rao, 2022) (Johnson, 2022). Simülasyon çalışmasında kullanılan gerçek verilere ilişkin temel istatistikler Tablo 4.5'te verildiği gibidir. Örneklem genişlikleri ve tekrar sayılarının değerleri simülasyon çalışması ile aynıdır.

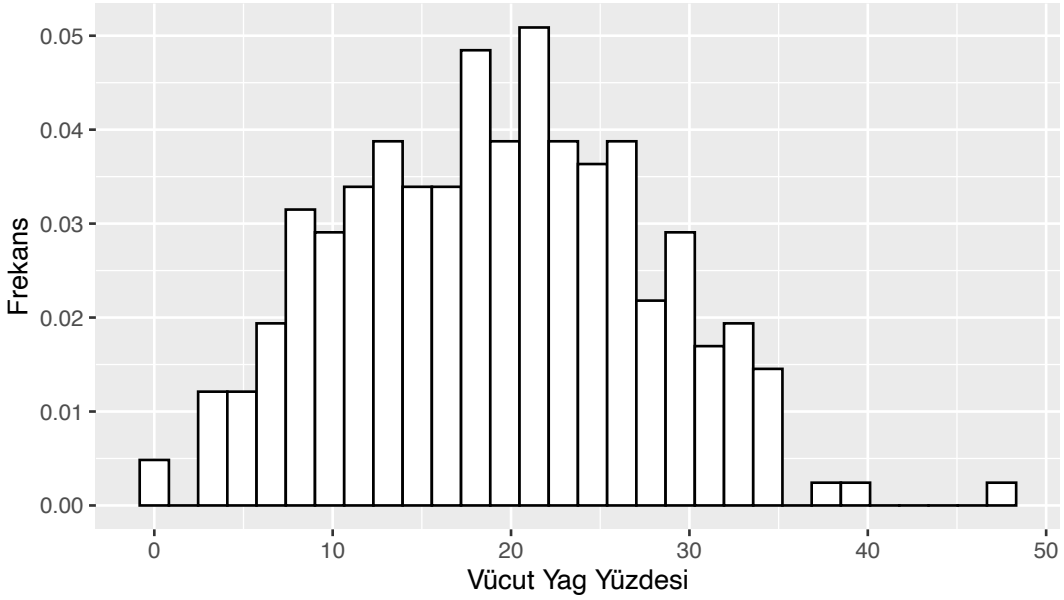
Hava kalite indeksi verilerinin çarpık bir dağılım sergilediği görülmektedir. Şekil 4.1'deki sonuçlara istatistiklerden ulaşılmaktadır. Vücut yağ oranı verilerinin de normal dağılım sergilediği görülmektedir.

Tablo 4.6 Kullanılan gerçek verilere ait istatistikler

Veri Seti Adı	N	Ortalama	Medyan	Standart Sapma	IQR	Çarpıklık	Basıklık
Hava Kalite İndeksi	87025	179.75	132	131.32	168	1.93	11.53
Vücut Yağ Yüzdesi	252	1915	19.2	8.37	12.83	0.15	2.65



Şekil 4. 1 Hava kalite indeksi verisinin histogramı



Şekil 4. 2 Vücut yağ yüzdesi verisinin histogramı

Tablo 4.7 ‘Hava Kalite İndeksi’ gerçek verisi için gerçekleşen kapsama oranları

	n = 20				n = 50			
	bs-yüzdelik	bs-t	bs-BCa	bs-normal	bs-yüzdelik	bs-t	bs-BCa	bs-normal
μ	0.9157	**0.9534**	0.9269	0.9097	0.9363	**0.9531**	0.9369	0.9354
$\mu_{tr=0.1}$	0.9386	**0.9471**	0.9294	0.9177	**0.9437**	**0.9454**	0.9354	0.9274
$\mu_{tr=0.2}$	**0.9423**	0.9169	**0.9417**	0.9026	**0.9457**	0.9129	**0.9483**	0.9180
$\mu_{tr=0.25}$	**0.9463**	0.9071	**0.9454**	0.9166	**0.9506**	0.9226	**0.9460**	0.9246
$\text{Winsorized}_{tr=0.1}$	**0.9409**	0.9157	0.9320	0.8877	0.7740	0.7434	0.7757	0.7220
$\text{Winsorized}_{tr=0.2}$	**0.9397**	0.9134	**0.9400**	0.8854	**0.9434**	0.9180	**0.9440**	0.9066
Medyan	**0.9466**	0.8789	**0.9414**	0.9223	**0.9417**	0.8560	**0.9391**	0.9263
Tek adım-M	0.9342	0.9081	0.9209	0.9354	**0.9453**	0.8547	**0.9399**	0.9287
Düzeltilmiş Tek adım-m	**0.9420**	**0.9551**	0.9260	0.8657	**0.9486**	0.8143	**0.9466**	0.8529

Tablo 4.7’ de ‘Hava Kirliliği İndeksi’ verisinin kapsama oranı sonuçları görülmektedir. bootstrap-t ve normal yaklaşım ile bootstrap iki örneklem genişliğinde de başarılı sonuçlar verememiştir. 20 örneklem boyutu için bootstrap-t güven aralığı ortalama, budanmış ortalama (tr = 0.1) ve düzeltilmiş tek adım-m kestiricisinde nominal değere yakın sonuçlar elde edilmiştir. 20 örneklem için 9 kestiricinin, 6 tanesinde yüzdelik bootstrap ve 4 tanesinde BCa nominal değere yakın sonuçlar vermektedir. 50 örneklem için ise 9 kestiricinin, 7 tanesinde yüzdelik bootstrap ve 6 tanesinde BCa nominal değere yakın sonuçlar vermiştir. Ortalama için en iyi sonuçları bs-t yöntemi vermiştir.

Kitlenin çarpık olduğu Hava Kirliliği İndeksi verisinde; ortalama kestiricisi için iki örneklem boyutunda da bootstrap-t yöntemi nominal değeri yakalamıştır. Budanmış ortalama (tr = 0.1) kestiricisi için küçük örneklem boyutunda bootstrap-t, büyük örneklem boyutunda ise yüzdelik bootstrap ve bootstrap-t yöntemleri nominal değere yakındır. Budanmış ortalama (tr = 0.2 ve tr = 0.25) için her iki örneklem boyutunda da

yüzdelik bootstrap ve BCa yöntemleri nominal değere yakın değerler almaktadır. Winsorized ortalama (tr = 0.1) için sadece küçük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap yönteminde nominal değere yakın değerler almaktadır. Winsorized ortalama (tr = 0.2) iki örneklem boyutunda da yüzdelik bootstrap ve BCa yöntemlerinde nominal değeri yakalamıştır. Medyan için her iki örneklem boyutunda da yüzdelik bootstrap yöntemi ve BCa yöntemi nominal değere yakın değer almıştır. Tek adım-m kestiricisi büyük örneklem boyutunda yüzdelik ve BCa yöntemlerinde, düzeltilmiş tek adım-m kestiricisi küçük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap ve bootstrap-t yöntemlerinde, büyük örneklem boyutu için yüzdelik ve BCa yöntemlerinde nominal değeri sağlamıştır.

Tablo 4.8 'Vücut Yağ Yüzdesi' gerçek verisi için gerçekleşen kapsama oranları

	n = 20				n = 50			
	bs-yüzdelik	bs-t	bs-BCa	bs-normal	bs-yüzdelik	bs-t	bs-BCa	bs-normal
μ	0.9306	**0.9509**	0.9277	0.9289	0.9300	**0.9460**	0.9383	**0.9411**
$\mu_{tr=0.1}$	**0.9414**	**0.9640**	0.9366	0.9303	**0.9540**	**0.9563**	**0.9460**	**0.9411**
$\mu_{tr=0.2}$	**0.9400**	**0.9537**	**0.9414**	0.9243	**0.9454**	**0.9657**	**0.9471**	0.9351
$\mu_{tr=0.25}$	**0.9437**	**0.9517**	**0.9396**	0.9243	**0.9529**	**0.9626**	**0.9497**	0.9314
$\text{Winsorized}_{tr=0.1}$	**0.9420**	**0.9546**	0.9317	0.9197	0.7757	0.8117	0.7806	0.7623
$\text{Winsorized}_{tr=0.2}$	**0.9437**	**0.9534**	**0.9431**	0.9177	**0.9430**	**0.9540**	**0.9460**	0.9377
Medyan	0.9371	0.9091	0.9026	0.9357	**0.9557**	0.9249	**0.9449**	0.9306
Tek adım-M	**0.9423**	**0.9564**	0.9380	**0.9392**	**0.9485**	0.9278	**0.9430**	**0.9399**
Düzeltilmiş Tek adım-m	**0.9511**	0.9820	**0.9391**	0.9234	**0.9554**	**0.9774**	**0.9474**	**0.9563**

Tablo 4.8' de 'Vücut Yağ Yüzdesi' verisinin kapsama oranı sonuçları görülmektedir. Medyan için en iyi sonuçları 50 örneklem genişliğinde yüzdelik bootstrap ve BCa yöntemleri vermiştir. bootstrap-t 20 örneklem genişliğinde medyan ve düzeltilmiş tek adım-m kestiricileri hariç 7 kestirici de nominal değere yakın sonuçlar vermiştir. Normal yaklaşım ile bootstrap tek adım-m kestiricisi hariç hiçbir

kestirici için başarılı sonuç vermemiştir. 20 örneklem için normal yaklaşım ile bootstrap yöntemi sadece tek adım-m yönteminde nominal değere yakın sonuç vermiştir. 50 örneklem için normal yaklaşım ile bootstrap yöntemi ortalama, budanmış ortalama (tr = 0.1), tek adım-m ve düzletilmiş tek adım-m olmak üzere 9 kestiricinin 4 tanesinde nominal değere yakın sonuçlar vermiştir.

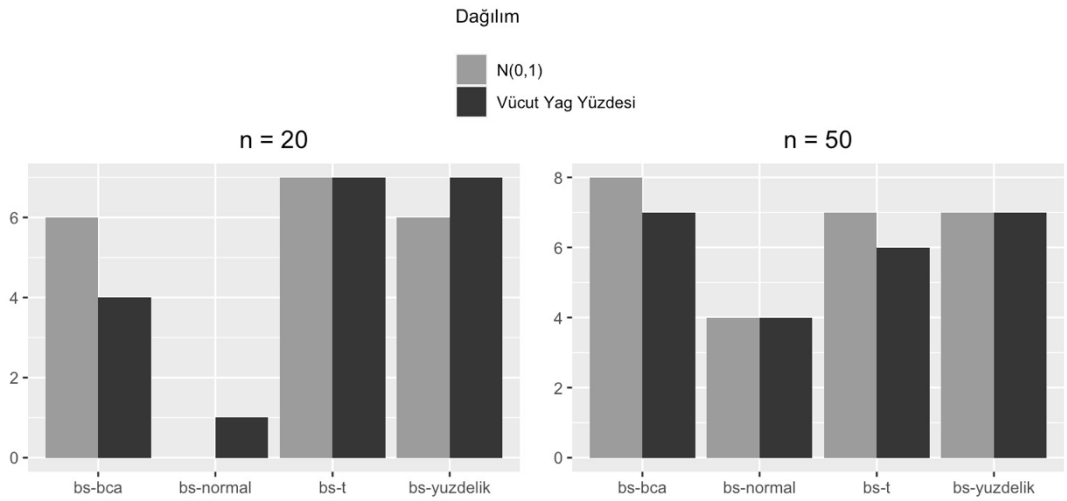
Vücut yağ yüzdesi verisinde; ortalama kestiricisi için küçük örneklem boyutunda bootstrap-t yöntemi ve büyük örneklem boyutunda ise hem bootstrap-t yöntemi hem normal yaklaşım ile bootstrap yöntemi nominal değeri yakalamıştır. Budanmış ortalama (tr = 0.1) kestiricisi için küçük örneklem boyutunda bootstrap-t yöntemi ve yüzdelik bootstrap yöntemi, büyük örneklem boyutunda ise tüm yöntemler nominal değere yakındır. Budanmış ortalama (tr = 0.2 ve tr = 0.25) için normal yaklaşım ile bootstrap güven aralığı yöntemi hariç diğer tüm yöntemler için iki örneklem boyutunda da nominal değere yakın değerler almaktadır. Winsorized ortalama (tr = 0.1) için sadece küçük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap ve bootstrap-t yöntemleri nominal değere yakın değerler almaktadır. Winsorized ortalama (tr = 0.2) için iki örneklem boyutunda da yüzdelik bootstrap, bootstrap-t ve BCa yöntemleri nominal değere yakın değerler almaktadır. Medyan için simülasyon verisinde olduğu gibi küçük örneklem boyutunda hiçbir yöntem nominal değeri yakalayamamaktadır ve büyük örneklem boyutunda ise yüzdelik bootstrap yöntemi ve BCa yöntemi nominal değere yakın değer almıştır. Küçük örneklem boyutunda; düzeltilmiş tek adım-m kestiricisi için yüzdelik bootstrap ve BCa yöntemi, tek adım-m kestiricisi için yüzdelik bootstrap, bootstrap-t ve normal bootstrap yöntemlerinde nominal değeri yakalamıştır. Büyük örneklem boyutunda ise, düzeltilmiş tek adım-m kestiricisi için bütün kestiricilerde nominal değeri yakalarken, tek adım-m kestiricisi yüzdelik bootstrap, bootstrap-t ve normal bootstrap yöntemlerinde nominal değeri yakalamıştır.

BÖLÜM BEŞ
SONUÇ

Veri analizi yapmak için öncelikle veri setinin temizlenmesi ve düzenlenmesi gerekmektedir. Bu işlem gerçekleştirilirken veri setindeki uç değerlerden kaynaklı olarak veri seti normal dağılımdan uzak bir dağılım göstermektedir. Bu gibi sorunlar için klasik konum kestiricileri yerine dayanıklı konum kestiricilerinin kullanılması önerilmektedir.

Bootstrap yöntemi, yeni kitle olarak kabul edilen n büyüklüğünde orijinal örneklemden yerine koyarak n birimden oluşan örneklemler oluşturmayı, oluşturulan yeni örneklemlerin tahminlerinin standart hatasını küçülterek daha doğru ve güvenilir tahminlere erişmeyi amaçlar.

Uygulama kısmında 6 farklı veri setinden elde edilen kapsama oranlarının sonuçları derlenmiştir. Birisi standart normal dağılım diğer ikisi çarpıklık ve basıklık değerleri farklı olan dağılımlar olmak üzere 3 tane teorik dağılımdan elde edilmiş veri kümesi, birisinin dağılımı çarpık diğerinin dağılımı normal olan farklı karakterde 2 gerçek veri seti ve ek olarak normal dağılan kesikli dağılıma sahip veri seti ile çalışılmıştır. Ek olarak, kesikli dağılım olan geometrik dağılım, parametresi olan p ise 0.1 değerini alacak şekilde uygulamaya tabi tutulmuştur.



Şekil 5.1 Bootstrap yöntemlerin simetrik kitle için nominal güven düzeyini (0.95) koruduğu düzenlerin sayısı

Kitlenin simetrik olduğu N(0, 1) ve Vücut Yağ yüzdesi veri setlerinde her örneklem için 36'şar deney düzeni oluşturularak nominal değer sayıları elde edilmiştir. Toplamda 2 veri seti ve 2 örneklem boyutu için 144 deney yapılmıştır. Bunlardan; 27 tanesinde bs-yüzdelik, 25 tanesinde BCa, 27 tanesinde bootstrap-t ve 9 tanesinde normal yaklaşım ile bootstrap yöntemi nominal değeri korumuştur.

Kitlenin normal olduğu durumlarda (yöntem önerisi);

- bootstrap-t yöntemi ve yüzdelik bootstrap yöntemleri hem küçük örneklem hem büyük örneklem için en ideal yöntemlerdir.

- BCa yöntemi büyük örneklemler için kullanımı önerilmektedir.

- Normal yaklaşım ile bootstrap yöntemi her iki örneklem boyutu için de uygun görülmemektedir.

Normal dağılan kitle için (kestirici önerisi);

- Budanmış ortalamanın üç budama yüzdesinden sadece ikisi (tr = 0.2 ve tr = 0.25) önerilmektedir.

- Winsorized ortalamanın iki budama yüzdesinden sadece birisi (tr = 0.2) ve düzeltilmiş tek adım-m kestiricileri önerilebilir. Budama yüzdesi ne kadar yüksek olursa sonuçlar o kadar nominal değere yakın olmaktadır. Bu yüzden yüksek budama yüzdesi kullanımı önerilebilir.

- Normal dağılama sahip gerçek verilerde, ortalama kestiricisi ve medyan kullanımı önerilmemektedir.

- Ortalama kestiricisinin her iki örneklem boyutu için bootstrap-t yöntemi ile kullanımı tavsiye edilebilir.

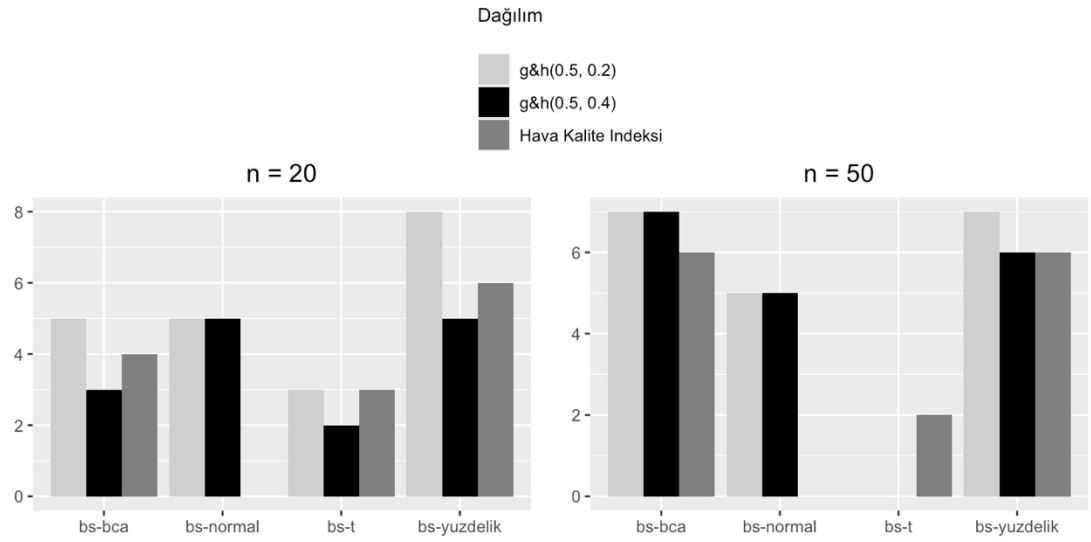
- Budanmış ortalama kestiricisinin hem küçük hem de büyük örneklem boyutu için yüzdelik, bootstrap-t ve BCa yöntemleri ile kullanımı önerilebilir.

- Winsorized ortalama kestiricisinin, yüksek budama yüzdesi ile yüzdelik bootstrap, bootstrap-t ve BCa yöntemleri ile kullanımı öneriler arasındadır.

- Medyan kestiricisinin büyük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap ve BCa yöntemleri ile kullanımı önerilebilir.

- tek adım-m kestiricisinin küçük örneklemde yüzdelik bootstrap ve bootstrap-t yöntemleri, büyük örneklemde yüzdelik bootstrap ve BCa yöntemleri ile kullanılması uygundur.

- Düzeltilmiş tek adım-m kestiricisinin her iki örneklem boyutu için yüzdelik bootstrap ve BCa yöntemleri ile kullanımları önerilebilir.



Şekil 5.2 Bootstrap yöntemlerin çarpık kitle için nominal güven düzeyini (0.95) koruduğu düzenlerin sayısı

Kitlenin çarpık olduğu g&h(0.5, 0.2), g&h(0.5, 0.4) ve Hava Kalitesi İndeksi veri setlerinde her örneklem için 36'şar deney düzeni oluşturularak nominal değer sayıları elde edilmiştir. Toplamda 3 veri seti ve 2 örneklem boyutu için 216 deney yapılmıştır. Bunlardan; 38 tanesinde yüzdelik bootstrap, 32 tanesinde BCa, 20 tanesinde normal ve 10 tanesinde bootstrap-t nominal değeri korumuştur.

Kitlenin çarpık dağılıma sahip olduğu durumlarda (yöntem önerisi);

- Yüzdelik bootstrap ve BCa yöntemi her iki örneklem boyutu için de kullanımı uygundur.

- Yüzdelik bootstrap yönteminin her iki örneklem boyutu için de kullanılması tavsiye edilmektedir.

- BCa yöntemi küçük örneklem için kullanımı daha uygundur. bootstrap-t yöntemi her iki örneklem boyutu için de az sayıda kestirici için önerilebilir.

Kitlenin çarpık dağılıma sahip olduğu durumlarda (kestirici önerisi);

- Budanmış ortalamanın üç budama yüzdesi de (tr = 0.1, tr = 0.2 ve tr = 0.25), winsorized ortalamanın iki budama yüzdesinden sadece birisi (tr = 0.2), medyan ve düzeltilmiş tek adım-m kestiricileri önerilebilir.

- Winsorized ortalama için, budama yüzdesi yüksek olursa sonuçlar nominal değere yakın olmaktadır. Bu yüzden yüksek budama yüzdesi kullanımı çarpık dağılımlar için de önerilebilir.

- Ortalaması 179.75, standart sapması 131.32, örneklem sayısı 87025 ile çarpık olan hava kalite indeksi ve ortalaması 1915, standart sapması 8.37, örneklem sayısı 252 ile normal dağılıma sahip olan vücut yağ yüzdesi gerçek verileri için ortalama kestiricisi, winsorized ortalama ve budanmış ortalama için küçük budama yüzdesi ve tek adım-m kestiricileri ile kullanımı tavsiye edilmemektedir.

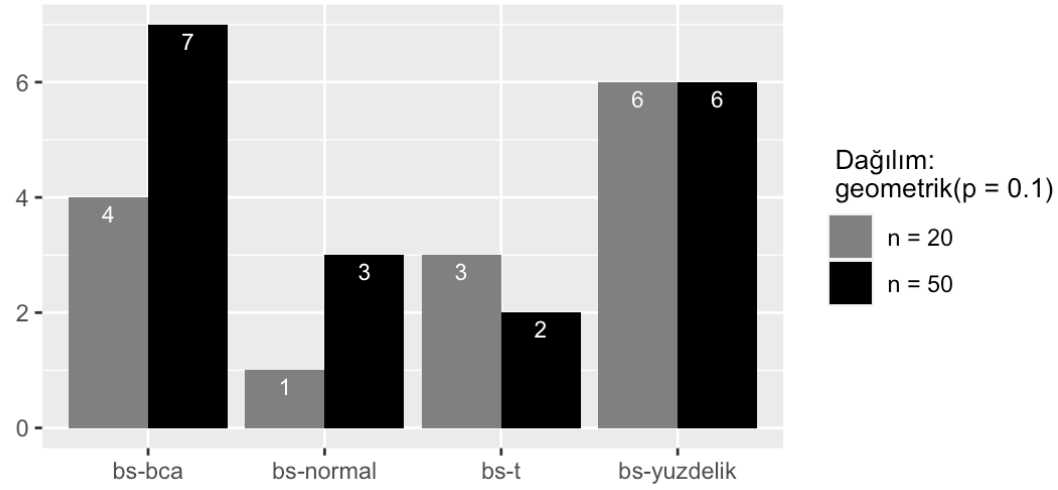
- Ortalama kestiricisinin bootstrap-t yöntemi ile, budanmış ortalama kestiricisinin her iki örneklem boyutu (n = 20, n = 50) için yüzdelik bootstrap-t ve BCa yöntemleriyle kullanımı öneri olarak sunulabilir.

- Winsorized ortalama kestiricisinin yüksek budama yüzdesi beraberinde yüzdelik bootstrap ve BCa yöntemleriyle kullanımı önerilebilir.

- Medyan kestiricinin budanmış ortalama ve winsorized ortalamada olduğu gibi yüzdelik bootstrap ve BCa ile kullanımı öneriler arasındadır.

- Tek adım-m kestiricisinin büyük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap ve BC yöntemleri ile kullanımı tavsiye edilmektedir.

- Düzeltilmiş tek adım-m kestiricisinin küçük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap ve büyük örneklem boyutunda yüzdelik bootstrap yöntemine ek olarak BCa ile kullanımı önerilebilir.



Şekil 5.3 Bootstrap yöntemlerin geometrik dağılım kitlesi için nominal güven düzeyini (0.95) koruduğu düzenlerin sayısı

Kesikli kitle için geometrik (p = 0.1) dağılım veri seti ele alınmıştır. n = 50 için toplamda, 36 deney düzeninin; 6 tanesinde yüzdelik bootstrap yöntemi, 7 tanesinde BCa, 3 tanesinde normal yaklaşım ile bootstrap ve 2 tanesinde bootstrap-t yöntemi nominal değeri korumuştur. n = 20 için ise, 36 deney düzeninin; 6 tanesinde yüzdelik bootstrap yöntemi, 4 tanesinde BCa, 1 tanesinde normal yaklaşım ile bootstrap ve 3 tanesinde bootstrap-t yöntemi nominal değeri korumuştur.

Kesikli kitle için;

- Budanmış ortalama (tr = 0.25) ve winsorized ortalama (tr = 0.2) kestiricileri kullanımı önerilebilir.

- Ortalama kestiricisinin kullanımı hiçbir yöntemde tavsiye edilmemektedir.

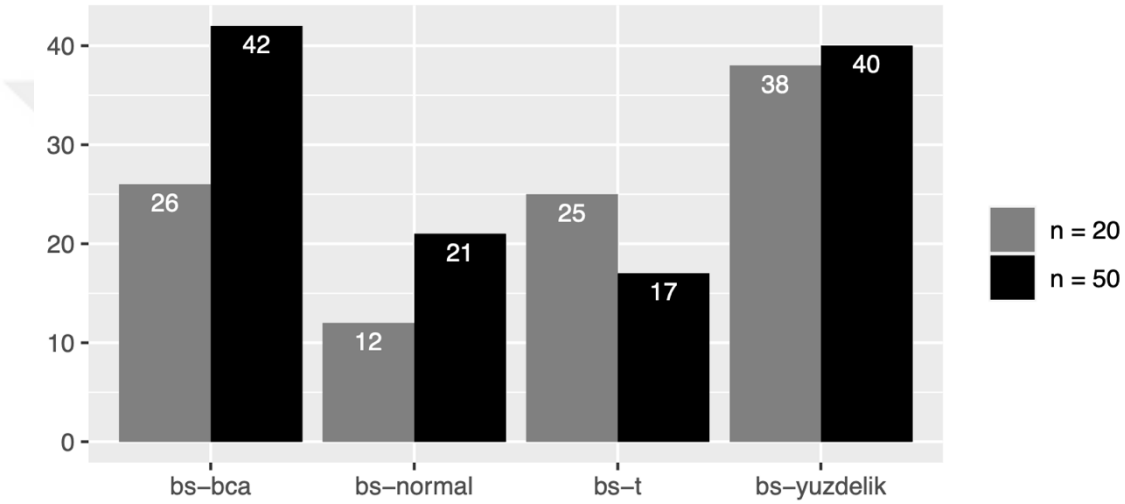
- Özellikle medyan kestiricisi için BCa yönteminin kullanımı önerilebilir.

- tr = 0.1 ve tr = 0.2 olan budanmış ortalama kestiricisinde küçük örneklem için bootstrap-t ve yüzdelik bootstrap yöntemleri tavsiye edilmektedir. Fakat büyük örneklem ele alındığında yüzdelik bootstrap, BCa ve normal bootstrap yöntemleri önerilebilir.

- Budama yüzdesi arttıkça bootstrap-t yöntemi güvenilirliğini kaybederek yüzdelik bootstrap, BCa ve normal yaklaşım ile bootstrap yöntemleri nominal değeri yakalamaktadır.

- Budanmış ortalamanın tüm budama yüzdelerinde n = 50 için yüzdelik bootstrap, BCa ve normal bootstrap yöntemleri önerilebilir.

- Küçük örneklem için özellikle yüzdelik bootstrap yönteminin kullanımı önerilir.



Şekil 5.4 Güven aralığı yöntemlerinin kapsama oranı açısından genel başarısı

Şekil 4.6 incelendiğinde en başarılı olan yöntemin (n = 20; 38 ve n = 50; 40) yüzdelik bootstrap yöntemi olduğu gözlemlenmektedir. Ardından onu BCa yöntemi (n = 20; 26 ve n = 50; 42) izlemektedir.

Tablo 5.1 Hesaplanan güven aralığı yöntemlerinin kestiricilere göre anlam düzeyini koruma sayıları

	bs-yüzdelik	**bs-t**	**bs-BCa**	**bs-normal**	**Toplam (Kestirici)**
$\boldsymbol{\mu}$	1	7	1	1	10
$\boldsymbol{\mu_{tr=0.1}}$	9	9	7	6	31
$\boldsymbol{\mu_{tr=0.2}}$	12	4	10	6	32
$\boldsymbol{\mu_{tr=0.25}}$	11	4	11	6	32
$\textbf{Winsorized}_{tr=0.1}$	6	5	4	2	17
$\textbf{Winsorized}_{tr=0.2}$	12	7	11	3	33
Medyan	9	0	8	0	17
Tek adım-M	9	3	7	5	24
Düzeltilmiş Tek adım-m	9	3	8	2	22
Toplam (Yöntem)	78	42	67	31	218

Her kestirici için toplam 54 güven aralığı hesaplanmıştır. Bunlardan her 9 tanesi bir güven aralığını temsil etmektedir. Toplamda her kestirici için her bir güven aralığı hesaplanmış ve sonuçlar not edilmiştir. Toplamda 324 sonuç elde edilmiş olup 218 tane güven aralığı sonucunda belirlenen anlam düzeyi korunmuştur.

Ortalama kestiricisi için belirtilen 54 güven aralığı hesaplamasından 10 (%19) tanesinde anlam düzeyi korunmuş olup anlam düzeyi korunan güven aralıklarından 1 tanesi yüzdelik bootstrap güven aralığı yöntemi, 7 tanesi bootstrap-t güven aralığı yöntemi, 1 tanesi BCa güven aralığı yöntemi ve 1 tanesi de normal güven aralığı yöntemiyle hesaplanan aralıklardır.

Budanmış ortalama kestiricisi (tr = 0.1) için belirtilen 54 güven aralığı hesaplamasından 31 (%57) tanesinde anlam düzeyi korunmuş olup anlam düzeyi korunan güven aralıklarından 9 tanesi yüzdelik bootstrap güven aralığı yöntemi, 9

tanesi bootstrap-t güven aralığı yöntemi, 7 tanesi BCa güven aralığı yöntemi ve 6 tanesi de normal güven aralığı yöntemiyle hesaplanan aralıklardır.

Budanmış ortalama kestiricisi (tr = 0.2) için belirtilen 54 güven aralığı hesaplamasından 32 (%59) tanesinde anlam düzeyi korunmuş olup anlam düzeyi korunan güven aralıklarından 12 tanesi yüzdelik bootstrap güven aralığı yöntemi, 4 tanesi bootstrap-t güven aralığı yöntemi, 7 tanesi BCa güven aralığı yöntemi ve 6 tanesi de normal güven aralığı yöntemiyle hesaplanan aralıklardır.

Budanmış ortalama kestiricisi (tr = 0.25) için belirtilen 54 güven aralığı hesaplamasından 32 (%59) tanesinde anlam düzeyi korunmuş olup anlam düzeyi korunan güven aralıklarından 11 tanesi yüzdelik bootstrap güven aralığı yöntemi, 4 tanesi bootstrap-t güven aralığı yöntemi, 11 tanesi BCa güven aralığı yöntemi ve 6 tanesi de normal güven aralığı yöntemiyle hesaplanan aralıklardır.

Winsorized ortalama kestiricisi (tr = 0.1) için belirtilen 54 güven aralığı hesaplamasından 17 (%32) tanesinde anlam düzeyi korunmuş olup anlam düzeyi korunan güven aralıklarından 6 tanesi yüzdelik bootstrap güven aralığı yöntemi, 5 tanesi bootstrap-t güven aralığı yöntemi, 4 tanesi BCa güven aralığı yöntemi ve 2 tanesi de normal güven aralığı yöntemiyle hesaplanan aralıklardır.

Winsorized ortalama kestiricisi (tr = 0.2) için belirtilen 54 güven aralığı hesaplamasından 34 (%61) tanesinde anlam düzeyi korunmuş olup anlam düzeyi korunan güven aralıklarından 12 tanesi yüzdelik bootstrap güven aralığı yöntemi, 7 tanesi bootstrap-t güven aralığı yöntemi, 11 tanesi BCa güven aralığı yöntemi ve 3 tanesi de normal güven aralığı yöntemiyle hesaplanan aralıklardır.

Medyan kestiricisi için belirtilen 54 güven aralığı hesaplamasından 17 (%32) tanesinde anlam düzeyi korunmuş olup anlam düzeyi korunan güven aralıklarından 9 tanesi yüzdelik bootstrap güven aralığı yöntemi ve 8 tanesi BCa güven aralığı yöntemiyle hesaplanan aralıklardır.

Tek adım-M kestiricisi için belirtilen 54 güven aralığı hesaplamasından 24 (%44) tanesinde anlam düzeyi korunmuş olup anlam düzeyi korunan güven aralıklarından 9 tanesi yüzdelik bootstrap güven aralığı yöntemi, 3 tanesi bootstrap-t güven aralığı yöntemi, 7 tanesi BCa güven aralığı yöntemi ve 5 tanesi de normal güven aralığı yöntemiyle hesaplanan aralıklardır.

Düzeltilmiş tek adım-M kestiricisi için belirtilen 54 güven aralığı hesaplamasından 22 (%41) tanesinde anlam düzeyi korunmuş olup anlam düzeyi korunan güven aralıklarından 9 tanesi yüzdelik bootstrap güven aralığı yöntemi, 3 tanesi bootstrap-t güven aralığı yöntemi, 8 tanesi BCa güven aralığı yöntemi ve 2 tanesi de normal güven aralığı yöntemiyle hesaplanan aralıklardır.

Bu yöntemler aşağıdaki şekilde, kestiricilerin yöntemlere göre elde edilen sayıları yine kestiricilerin yöntemlere göre olan toplam sayısına bölerek elde edilen sonucun %50'den fazla olması durumu ele alınarak sonuçlar yorumlanmıştır.

- Yüzdelik bootstrap yöntemi için budanmış ortalama (tr = 0.1, tr = 0.2, tr = 0.25), winsorized ortalama (tr = 0.2), medyan, tek adım-m ve düzeltilmiş tek adım-m kestiricileri kullanımı önerilebilir.

- bootstrap-t yöntemi için ortalama, budanmış ortalama (tr = 0.1), winsorized ortalama (tr = 0.2) kestiricileri kullanımı tavsiye edilebilir.

- BCa yöntemi için ortalama, budanmış ortalama (tr = 0.1, tr = 0.2, tr = 0.25), winsorized ortalama (tr = 0.2), medyan, tek adım-m ve düzeltilmiş tek adım-m kestiricileri kullanımı uygun olduğundan bu kullanımlar önerilebilir.

- Normal bootstrap yöntemi için budanmış ortalama (tr = 0.1, tr = 0.25) kestiricileri kullanımı önerilebilir.

KAYNAKLAR

Akman, N. B. (2018). *Parametrik olmayan regresyon analizinde bootstrap yöntemi* [Yüksek Lisans Tezi]. Sivas Cumhuriyet Üniversitesi.

Aktükün, L. A. (2002). *Bootstrap yöntemler ve doğrusal regresyon modellerine uygulanması* [Doktora Tezi]. İstanbul Üniversitesi.

Andrews, D. W. ve Buchinsky, M. (2002). On the number of bootstrap repetitions for BCa confidence intervals. Econometric Theory, 18(4), 962-984. https://doi:10.1017/S0266466602184088

Avşar, P. E. (2006). *Bootstrap yönteminin regresyon analizinde kullanımına ilişkin olarak Türkiye inşaat sektöründe bir uygulama* [Yüksek Lisans Tezi]. Marmara Üniversitesi.

Balta, A. (2018). Makine öğrenmesi teknikleri ile ekolojik verilerin değerlendirilmesi [Yüksek Lisans Tezi]. Fırat Üniversitesi.

Berrar, D. (2018). Cross-validation. In S. Ranganathan, M. Gribskov, K. Nakai ve C. Schönbach (Ed.), *Encyclopedia of Bioinformatics and Computational Biology* içinde (542–545). Elsevier. https://doi.org/10.1016/b978-0-12-809633-8.20349-x

Cebeci, Z. (2020). *R uygulamalı yeniden örnekleme teknikleri.* Pegem Akademi Yayıncılık.

Chernick, M., R. (1999) *Bootstrap methods: a practitioner's guide*. Wiley Series in Probability and Statistics.

Chernick, M., R. ve LaBudde, R., A. (2011) *An introduction to bootstrap methods with applications to R* (Second Edition). John Wiley and Sons.

Çiğdem, K. (2012). *Yeniden örnekleme yönteminin sağkalım analizinde kullanılması* [Yüksek Lisans Tezi]. Ondokuz Mayıs Üniversitesi.

Davison Anthony C. ve Hinkley David Victor (1997). Bootstrap methods and their application. Cambridge University Press.

Dilber, B. (16 Haziran 2020). *Dayanıklı konum kestiricileri ve simülasyon çalışması*. Data Science Earth. https://www.datasciencearth.com/dayanikli-konum-kestiricileri-ve-simulasyon-calismasi/.

Efron, B. ve Tibshirani, R. J. (1994). An introduction to the bootstrap. Chapman & Hall. https://doi.org/10.1201/9780429246593

Efron, B. (1981). Nonparametric standard errors and confidence intervals. *The Canadian Journal of Statistics*, 9(2), 139 – 158. https://doi.org/10.2307/3314608

Efron, B. (1982). *The jackknife, the bootstrap and other resampling plans*. Society for industrial and applied mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9781611970319

Efron, B. (1983). Estimating the error rate of a prediction rule: Improvements on cross-validation. Journal of American Statatistical Association, 78, 316 – 331. https://doi.org/10.1080/01621459.1983.10477973

Hestenberg, T., Monaghan, S., Moore, D. S., Clipson, A. ve Epstein, R. (2002). Bootstrap methods and permutation tests, (Ed.), Introduction to the Practice of Statistics içinde. The practice of business statistics (4-25). WH Freeman and Co. https://doi.org/10.1214/aos/1056562462

He, Y. ve Raghunathan, T. E. (2006). Tukey's gh distribution for multiple imputation. The American Statistician, 60(3), 251-256. https://doi.org/10.1198/000313006X126819

Johnson, R., W. (13 Ocak 2022). Lists estimates of the percentage of body fat determined by underwater weighing and various body circumference measurements for 252 men. Carnegie Mellon University. http://lib.stat.cmu.edu/datasets/bodyfat.

Jung, K., Lee, J., Gupta, V. ve Cho, G. (2019). Comparison of bootstrap confidence interval methods for gsca using a monte carlo simulation. *Frontiers in Psychology*, 10, 2215. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.02215

Kayhan, Y. (2006). *Regresyon çözümlemesinde sağlam konum kestiricilerinin karşılaştırılması* [Yüksek Lisans Tezi]. Hacettepe Üniversitesi.

Khan, H. R. ve Shaw, E. (12 Haziran 2022). jackknifeKME: Jackknife estimates of kaplan - meier estimators or integrals. CRAN. https://CRAN.R-project.org/package=jackknifeKME.

Koçyiğit, E. G. (2016). Sistematik örneklemede kitle ortalamasının oransal ve çarpımsal tahmin edicileri. [Yüksek Lisans Tezi]. Hacettepe Üniversitesi.

Kurşun, Ç. (2012). Yeniden örnekleme yönteminin sağ kalım analizinde kullanımı. [Yüksek Lisans Tezi]. Ondokuz Mayıs Üniversitesi.

Mair, P. ve Wilcox, R. (2020). Robust statistical methods in R using the WRS2 package. Behavior research methods, 52(2), 464-488. https://doi.org/10.3758/s13428-019-01246-w

Okutan, D. (2009). *Bootstrap yönteminin regresyon analizinde kullanımı ve diğer yöntemlerle karşılaştırılması* [Yüksek Lisans Tezi]. Ege Üniversitesi.

Özdemir, A. F. (2010). Comparing measures of location when the underlying distribution has heavier tails than normal. *İstatistikçiler Dergisi, 3(1)*, 8-16.

Özdemir, A. F. ve Navruz, G. (2016). Bootstrap-t ve yüzdelik bootstrap yöntemlerinde tekrar sayısı, budama yüzdesi ve dağılımın sonuçlara etkisi. *Nevşehir Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 5(2), 74-85. http://dx.doi.org/10.17100/nevbiltek.284732

Özdemir, A. (2011). *Doğrusal olmayan regresyonda asimptotik yöntemle bootstrap* örneklemesi [Yüksek Lisans Tezi]. Yıldız Teknik Üniversitesi.

Rao, R. (15 Ağustos 2022). Air quality data in India (2015-2020) https://www.kaggle.com/datasets/rohanrao/air-quality-data-in india?select=station_day.csv

Temel, G. O., Erdoğan, S. ve Ankaralı, H. (2012). Sınıflama modelinin performansını değerlendirmede yeniden örnekleme yöntemlerinin kullanımı. *Bilişim Teknoloji Dergisi*, 5(3), 1-8.

Temel, G. O. ve Erdoğan, S. (2011). Tanı koyma amaçlı yapılan tıbbi çalışmalarda jacknife, bootstrap ve çapraz geçerlilik yöntemlerinin kullanımı. *Düzce Üniversitesi Sağlık Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *1*(3), 45-49. http://doi.org/10.11611/yead.634555

Topuz, D. (2002). *Regresyonda yeniden örnekleme yöntemlerinin karşılaştırmalı olarak incelenmesi* [Yüksek Lisans Tezi]. Niğde Üniversitesi.

Xu, Q., S. ve Liang, Y., Z. (2001). Monte Carlo cross validation. Chemometrics and Intelligemt Laboratory Systems, 56(1), 1-11. https://doi.org/10.1016/S0169-7439(00)00122-2

Wilcox, R. R. (2011). *Introduction to robust estimation and hypothesis testing*. Academic Press University of Southern California.

Wilcox, R. R. (2003). *Applying Contemporary Statistical Techniques.* Academic Press University of Southern California.

Yaşa, S. Ş. (2018). *Comparison of established sampling methods for annual ındustry and service statistics survey by Turkstat* [Yüksek Lisans Tezi]. Dokuz Eylül Üniversitesi.

Yavuz, A. M., Gamgam, H. ve Altunkaynak, B. (17 - 20 Ekim 2018). Yığın varyansları heterojen iken ortalamaların eşitliği hipotezi için bazı testler ve karşılaştırmaları [Bildiri Özeti]. On Dokuzuncu Uluslararası Eyi Sempozyumu, Antalya, Türkiye. https://www.researchgate.net/publication/330214296_Yigin_Varyanslari_Heterojen_iken_Ortalamalarin_Esitligi_Hipotezi_icin_Bazi_Testler_ve_Karsilastirmalari

Yay, M. (2003). *Bootstrap ve jackknife yöntemlerinin otomotiv sanayii üzerine Uygulanması* [Yüksek Lisans Tezi]. Marmara Üniversitesi.

Yıldıztepe, E. ve Özdemir, A. F. (2013). Asimetrik ve ağır kuyruklu dağılımların konum parametresinin bootstrap güven aralıkları için bir benzetim çalışması. *Anadolu University Of Sciences and Technology-A: Applied Sciences & Engineering*, *14*(3), 213-229.

Zeng, X., Xia, Y. ve Tong, H. (2018). Jackknife approach to the estimation of mutual information. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *115*(40), 9956-9961. https://doi.org/10.1073/pnas.1715593115