ÖNSÖZ

Ülkemizde özellikle titreşim ve akustik alanlarında çok fazla sayıda araştırma ve uygulama çalışmaları bulunmamaktadır. Bununla beraber, endüstride ortaya çıkan problemlere katalog çözümler dışında çözüm üretebilen uzman personel ve ekip sayısı son derece azdır. Özellikle yeni malzemeler ve yeni üretim metotlarının ortaya çıkardığı problemler, daha farklı çözüm yolları ve stratejiler geliştirerek çözülmek zorundadır.

Bu proje ile rekabet edebilir, yapısal problemlere kolaylıkla uygulanabilir, verimli, belirsizliği etkili bir şekilde hesaba katabilen, istatistiksel moment tabanlı bir yöntem geliştirilmiştir. Bunun yanında, yöntemin geliştirilmesi sürecinde pek çok ara ve yardımcı çalışmalar gerçekleştirilerek özellikle kompozit yapıların dinamik analizleri üzerinde durulmuştur.

Bu çalışma, TUBİTAK1002 Hızlı Destek Programı kapsamında 120M895 No.lu “Titreşen belirsiz yapılar için yüksek dereceli istatistiksel moment analizi yönteminin geliştirilmesi” başlığı ile desteklenmiştir. Proje ekibi olarak, öncelikle bu projeye destek veren TUBİTAK’a ve TUBİTAK-MAG yönetici ve panelistlerine teşekkür ederiz.

Proje sürecinde desteklerini esirgemeyen Dokuz Eylül Üniversitesi Rektörlüğü’ne, Rektörlük Proje Birimi idareci ve çalışanlarına ve Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölüm Başkanlığı’na teşekkür ederiz.

Proje Ekibi Adına

Proje Yürütücüsü Prof. Dr. Abdullah Seçgin

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ i
İÇİNDEKİLER ii
TABLO LİSTESİ iii
ŞEKİL LİSTESİ iv
ÖZET v
ABSTRACT vi
1. GİRİŞ ve LİTERATÜR ÖZETİ 1
1.1. Giriş 1
1.2. Projenin Amacı 4
1.3. Konunun Önemi 4
1.4. Projenin Amacı ve Hedefi 5
2. MATEMATİKSEL YÖNTEMLER 6
2.1. Monte Carlo Simülasyonu 6
2.2. İstatistiksel Momentlerin Hesaplanması 6
2.2.1. Rassal Bir Değişkenin İstatistiksel momentlerin hesaplanması 6
2.2.2. Matematiksel Operatörler (Toplama, Çıkarma ve Çarpma) için MİM'lerin Analitik İfadelerinin Elde Edilmesi 8
2.3. Katmanlı Kompozit Çubuğun Sonlu Elemanlar Modeli 14
2.4. MİM Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Birlikte Kullanılması 15
3. SAYISAL ÇALIŞMALAR 17
3.1. Rassal Değişkenlerin Matematiksel Operasyonlarının MİM'lerinin Hesaplanması 17
3.2. Katmanlı Kompozit Çubuk Sayısal Modelinin Doğrulanması 20
3.3. Kompozit Çubuk Örneklemlerinin Üretilmesi, Belirsiz Mekanik Özelliklerinin ve Belirsiz Doğal Frekansının Deneysel Olarak Belirlenmesi 22
3.4. Belirsiz Kompozit Çubukların Sayısal Analizi ve Deneysel Sonuçlar ile Karşılaştırılması 26
4. SONUÇLAR 28
KAYNAKLAR ..... **Hata! Yer işareti tanımlanmamış.**
EK-1. Proje Sonuç Raporunun İş Paketlerindeki Hedeflerle İlişkisi 29

TABLO LİSTESİ

Tablo 1. Bir rassal değişkenin ikinci, üçüncü ve dördüncü derece “merkezi” istatistiksel momentleri, “sıfır etrafındaki” istatistiksel momentleri cinsinden ifadeleri

Tablo 2. Birbirine bağımlı olmayan toplama, çıkarma ve çarpma durumundaki rassal değişkenlerin cevabının ortalama, ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden merkezi istatistiksel momentleri

Tablo 3. Proje iş paketleri

Tablo 4. Normal ve düzgün dağılımın analitik standartlaştırılmış istatistiksel momentleri

Tablo 5. İki rassal değişkeninin farklı matematiksel operasyonları sonucundaki merkezi ve standartlaştırılmış istatistiksel momentleri

Tablo 6. y rassal değişkeni için 1/y ve $\sqrt{y}$ fonksiyonlarının merkezi ve standartlaştırılmış istatistiksel momentleri

Tablo 7. Kompozit çubuğun mekanik ve fiziksel özellikleri

Tablo 8. Kompozit çubuğun ilk 3 doğal frekansı (Hz)

Tablo 9. Kompozit çubuk için ölçülen belirsiz Elastisite modülü ve yoğunluk

Tablo 10. Kompozit çubuklar için ölçülen belirsiz doğal frekanslar (r/s)

Tablo 11. Birinci doğal frekansın hesaplanan MİM’leri

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1. a) 57 adet İsuzu pik-up aracı, b) 98 adet İsuzu Rodeo aracın titreşim cevapları (Kompella ve Bernhard, 1993)

Şekil 2. Üçüncü ve dördüncü dereceli merkezi istatistiksel momentlerin farklı durumları için dağılım fonksiyonları a) çarpıklık, b) basıklık

Şekil 3. Örnek bir Pearson grafiği

Şekil 4. Kompozit çubuğun a) Ansys modeli ve b) katmanları

Şekil 5. a) Elastisite modülünün, b) yoğunluğun ve c) özgül hacmin OYF'leri (gri: deneysel belirsiz verileri, siyah: Pearson modeli ile deneysel veriye uydurulan OYF)

Şekil 6. Kompozit çubuğun deneysel ivme-frekans spektrumu (gri: deneysel cevaplar, siyah nokta: doğal frekans)

Şekil 7. Kompozit çubuğun belirsiz doğal frekanslarının OYF'u (gri: sayısal MCS, kırmızı: İM analizi ve Pearson modeli, siyah: deneysel MCS, mavi: deneysel MCS-Pearson modeli)

ÖZET

Bir ürünün tasarım sürecinde yapılan vibro-akustik analizlerde belirsizlik adı verilen olgunun göz önüne alınması gereklidir. Belirsizlik, genellikle malzemenin iç yapı farklılıkları, sönüm ve geometrideki farklılıklar, ilk ve sınır şartlarındaki oynaklıklar gibi kontrol edilemeyen değişiklikler sonucu aynı ürünün farklı örneklemlerinin farklı vibro-akustik özellikler göstermesi olarak tanımlanır. Güvenilir analizler için bu belirsizlikler üretimin her aşamasında hesaba katılmalıdır. Bu bağlamda, dinamik sistemlerin belirsizliği uygun bir istatistiksel yaklaşım ile modellenmelidir.

Özellikle son yıllarda, yapılardaki belirsizlik üzerine pek çok çalışma yapılmaktadır. Bu çalışmalarda "olasılıksal" ve "olasılıksal olmayan" başlıkları altında çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Olasılıksal yöntemler basit olarak, sistemin belirsiz girdi değişkenlerinin istatistiki dağılımı bilinirse, sistemin cevabı olasılık teorisi kullanılarak yine istatistiki olarak elde edilebilir kabulüne dayanmaktadır. Bu amaçla, Monte Carlo simülasyonu (genellikle uygun bir analiz tekniği (sonlu elemanlar yöntemi, sonlu farklar yöntemi vb.) ile) kullanılan en yaygın olasılıksal yöntemlerden biridir. Yöntemin başarısı örneklem sayısı ile yakından ilgilidir. Ancak yüksek örneklem sayısı yüksek hafıza ihtiyacı ve uzun hesaplama süreleri anlamına gelmektedir. Bu nedenle yine aynı yardımcı analiz teknikleri ile kullanılabilen ve daha hızlı sonuç verme yeteneğine alternatif belirsizlik analizi yöntemleri üzerine çalışmalar sürdürülmektedir.

Projenin temel amacı belirsizlikleri daha gerçekçi modelleyebilmek için yüksek hassasiyetli, düşük hafıza ve çözüm sürelerine sahip bir belirsizlik modelleme yöntemi geliştirmektir. Geliştirilen yöntemin sayısal ve deneysel performans testleri kompozit çubuklar için gerçekleştirilerek yöntemin ileriki proje çalışmaları için uygulanabilirliği ortaya konulmuştur. Bu Projenin hızlı destek programına başvurulma amacı da tamamen bu ön çalışmaların tamamlanmasının sağlanmasına yöneliktir.

Bu amaç bağlamında projenin temel hedef ise, İstatistiksel Moment (İM) analizi ile belirsiz titreşim cevabının yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentlerinin (üçüncü ve dördüncü momentler) yüksek hassasiyetle ve kısa hesaplama süreleri ile elde edilmesidir. Bu hedef doğrultusunda proje süresince çeşitli deneysel ve sayısal araştırmalar gerçekleştirilmiştir. Performans bağlamında, hedeflenen yöntem ve sayısal Monte Carlo simülasyonu ile yapılan analizler karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Belirsizlik, Merkezi istatistiksel moment, Kompozit çubuk, Monte Carlo simülasyonu, Vibro-akustik analiz

ABSTRACT

In the vibro-acoustic analyses, it is necessary to consider the phenomenon called uncertainty during the design process of a product. Uncertainty is generally defined as different samples of the same product exhibiting different vibro-acoustic properties as a result of uncontrollable changes such as differences in internal structure of the material, differences in damping and geometry, variation in initial and boundary conditions. These uncertainties must be taken into account at every stage of production for reliable analysis. In this context, the uncertainty of dynamical systems should be modelled with an appropriate statistical approach.

Especially in recent years, many studies have been carried out on uncertain structures. In these studies, various methods have been developed under the headings of "probabilistic" and "nonprobabilistic". Probabilistic methods are simply based on the assumption that if the statistical distribution of the uncertain input variables of the system is known, the answer of the system can still be obtained statistically using probability theory. Monte Carlo simulation (with an appropriate analysis technique (finite element method, finite difference method, etc.)) is one of the most common probabilistic methods used for this purpose. The success of the method is closely related to the number of samples. However, high sample size means high memory needs and long computation times. For this reason, studies are still going on alternative uncertainty analysis methods to estimate with the same accuracy and faster solution time.

The main aim of the project is to develop an uncertainty modeling method with high precision, low memory and solution times in order to model uncertainties more realistically. Numerical and experimental performance tests of the developed method were performed for composite beams, and the applicability of the method for future project studies was demonstrated. The purpose of applying to TÜBİTAK program for this Project is ensuring to complete these preliminary studies.

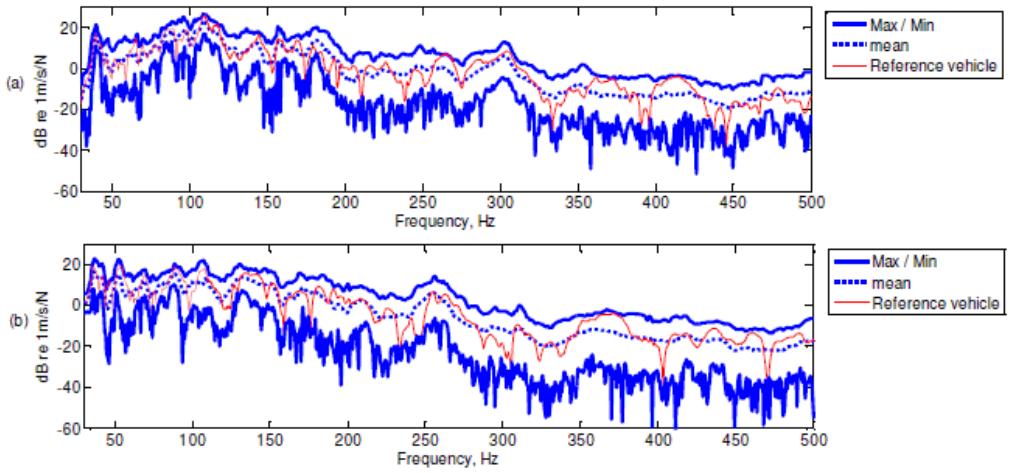
In the context of this purpose, the main objective of the project is to obtain high-order central statistical moments (third and fourth moments) of the uncertain vibration response with high precision and short calculation times by Statistical Moment (IM) analysis. In line with this goal, various experimental and numerical researches were carried out during the project. In terms of performance, the targeted method and the analyzes made with numerical Monte Carlo simulation were compared.

Keywords: Uncertainty, Central statistical moment, Composite beam, Monte Carlo simulation, Vibro-acoustic analysis

1. GİRİŞ ve LİTERATÜR ÖZETİ

1.1. Giriş

Seri üretimde aynı hatta üretilen aynı ürün grubunun farklı örneklemlerinin farklı vibro akustik davranışlar sergileyebildiği bilinmektedir. Vibro-akustik davranışlardaki bu kontrol edilemeyen değişkenlikler belirsizlik olarak adlandırılır. Bu belirsizliklere genellikle kullanılan malzemenin iç yapı değişkenlikleri, geometrik tolerans farklılıkları, ilk ve sınır şartlarındaki değişkenlikler, zorlama şartlarındaki değişkenlikler gibi pek çok parametre sebep olabilmektedir. Vibro-akustik belirsizliğe verilen en yaygın örnek Kompella ve Bernhard 1993'de gerçekleştirdiği bir deneysel çalışmadır (1993). Bu çalışma ile Şekil 1'de gösterildiği gibi İsuzu marka iki farklı araç modelinin 57 ve 98 adet örneği üzerinde gerçekleştirilen titreşim ve akustik testlerin sonuçlarındaki değişkenlikler açıkça gözlenmektedir.



Şekil 1. a) 57 adet İsuzu pik-up aracı, b) 98 adet İsuzu Rodeo aracın titreşim cevapları (Kompella ve Bernhard, 1993)

Güvenli bir tasarım için belirsizlikler tasarım aşamasında göz önüne alınarak analizler gerçekleştirilmelidir. Literatürde belirsizliklerin hesaplanması için birçok çalışma bulunmaktadır. Elishakoff ve ark. (1994) belirsizlik analizi yöntemlerini olasılıksal (probabilistic) ve olasılıksal olmayan (nonprobabilistic) yöntemler başlıkları altında gruplandırmıştır.

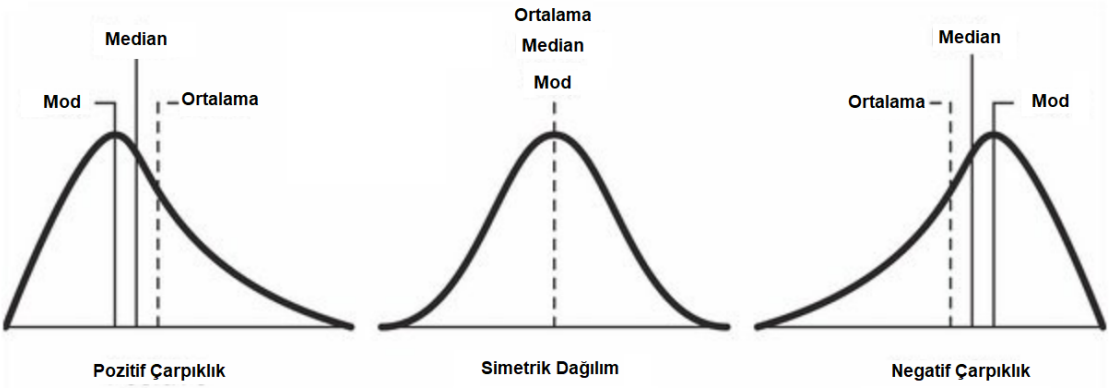
Belirsiz parametrelerin istatistiğinin ve dağılımının bilindiği veya model olarak tanımlandığı durumlarda Monte Carlo simülasyonu (M. Evans ve Swartz, 2000; Rubinstein ve Kroese, 2016), birinci ve ikinci derece güvenilirlik yöntemleri (Choi ve Yoo, 2012; Hohenbichler ve Rackwitz, 1989; A. J. Keane ve Price, 1997), sayısal integrasyon temelli yöntemler (D. H.

Evans, 1972; Lee ve Kwak, 2006; Rahman ve Xu, 2004; Seo ve Kwak, 2002) ve spektral yöntemler (Ghanem ve Spanos, 2003; Lucor vd., 2004; Sepahvand, 2017; Sepahvand vd., 2007, 2010) gibi olasılıksal yöntemler kullanılır.

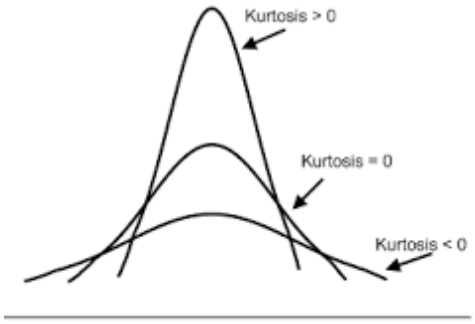
Olasılıksal olmayan yöntemler, belirsizliğin sınırlarının bilindiği fakat istatistiksel özelliklerinin bilinmediği durumlarda kullanılır ve sonuç olarak yine sadece belirsizliğin sınırları hesaplanır. Aralık analizi (Moore, 1979), en-kötüleştirme (anti-optimization) yöntemi (Elishakoff vd., 1994), bulanık küme teorisi (fuzzy set theory) (Hanss, 2013; Kumar ve Schuhmacher, 2005) gibi yöntemler en sık kullanılan yöntemlerdendir. Bu yöntemlerde genel olarak belirsiz parametreler istatistiki özelliklerine göre modellenir veya örneklenir ve cevap değişkenin istatistiği uygun bir matematiksel yöntem ile elde edilir. Fakat belirsiz parametrelerin istatistiğinin ve dağılımının elde edilmesi sırasında çok sayıda deney ve işlem yapmak gereklidir.

Tüm bu yöntemler arasından Monte Carlo (MC) simülasyonu tabanlı analizler oldukça basit bir uygulamaya sahip olduğundan araştırmacılar arasında en sık kullanılan yöntemdir. Fakat bu simülasyon gerçekçi sonuçlar için çok fazla sayıda örneklem gerektirdiğinden yüksek hesaplama süreleri ve hafıza kullanımına ihtiyaç duyulur. Bu nedenle araştırmacılar farklı teknikler üzerine çalışmalarını sürdürmektedirler. Bu bağlamda çok terimli kaos açılımı (ÇKA) (Lucor vd., 2004; Sepahvand, 2017; Sepahvand vd., 2007, 2010) ve Karhunen-Loeve (KL) (Ghanem ve Spanos, 2003) açılımı gibi spektral yöntemler (belirsizliği matematiksel bir fonksiyon olarak tanımlayabildiğinden aynı zamanda fonksiyonel yöntemler olarak da isimlendirilir) daha revaçtadır. ÇKA yönteminde bir belirsiz parametre, istatistiksel dağılıma uygun bir çok-terimli (polinom) ile ifade edilir ve istenilen cevap belirsiz parametrelerin kombinasyonundan oluşan sabit çok-terimli ile ifade edilir. Yöntemin en önemli avantajlarından birisi sayısal (sonlu elemanlar, sonlu farklar gibi) yöntemler ile birlikte uygulanabilir oluşudur (Dammak vd., 2019; Ghanem ve Spanos, 2003; Sepahvand vd., 2007). Bu yöntemde bir belirsiz parametrelerin farklı istatistiki dağılımları için farklı çok-terimli tipi seçilmelidir (örneğin normal dağılımı modellemek için Hermite çok terimlisi, Gamma dağılımı için Laguerre çok terimlisi vb.). Fakat uygun dağılım-çok terimli ikilisi seçilmediği durumlarda yüksek dereceli terimlerin katsayıları sıfıra yakınsamaz ve hesaplama sürelerinin artması nedeniyle yöntemin avantajı ortadan kalkar. Ayrıca yöntemin uygulanması sırasında integral işlemleri oldukça fazla uygulandığından işlem adımları yine uzun hesaplama süreleri gerektirebilir.

Bunların dışında Seçgin ve Kara (Kara ve Seçgin, 2018; Seçgin ve Kara, 2018, 2019) akademik yapıların (çubuk, plaka vb.) dalga kılavuzlarının diferansiyel denklemlerini stokastik diferansiyel denklemlere dönüştürerek belirsizlik istatistiklerini kapalı formda elde edebilen bir istatistiksel moment analizi (İMA) yöntemini geliştirmişlerdir. Bu yöntemde analitik istatistiksel moment (İM) ilişkileri kullanılarak kapalı formdaki belirsiz diferansiyel denklem elde edilir ve belirsiz cevabın merkezi istatistiksel momentleri hesaplanır. Bu yöntem ile analizler gerçekleştirilirken çözülen denklem sayısı istenilen istatistiksel moment derecesi kadardır. Örneğin ortalama ve varyans elde edilmek istenirse sadece iki defa diferansiyel denklemin çözülmesi yeterlidir. Bu nedenle hesaplama süreleri oldukça diğer yöntemlerle kıyaslanamayacak derecede kısadır. Yöntemin bir başka avantajı ise istenilen sayısal yönteme kolaylıkla uygulanabilir oluşudur. Fakat bu yöntem şu ana kadar yalnızca basit akademik yapılara (ince çubuk, izotropik ve katmanlı kompozit plaka) uygulanmıştır. Ayrıca bu yöntem ile yapılan çalışmalarda sadece birinci ve ikinci dereceden merkezi istatistiksel moment (ortalama ve varyans) analizi gerçekleştirilmektedir. Bilindiği üzere yüksek dereceli (özellikle üçüncü ve dördüncü derece) merkezi istatistiksel momentler istatistiki parametreler için başka önemli bilgiler taşımaktadır. Örneğin üçüncü derece merkezi istatistiksel moment (skewness ya da çarpıklık) dağılımın çarpıklığını (Şekil 2a), dördüncü derece merkezi istatistiksel moment (kurtosis) ise dağılımın basıklığı (Şekil 2b) hakkında bilgi verir. Bu bilgiler özellikle karmaşık yapılarda ortaya çıkan belirsizlik istatistiklerini çok daha gerçekçi olarak ifade edebilmektedir. Dolayısıyla yüksek dereceli momentlerin elde edilmesi ile belirsizliğin dağılımı bilinmese dahi dağılım hakkında son derece önemli bilgiler elde edinilebilir. Bu bağlamda İMA'nın daha gerçekçi sistemlere uygulanabilir olabilmesi için üçüncü ve dördüncü dereceli analitik merkezi istatistiksel moment ifadelerinin yönteme uyarlanması oldukça önemli bir gelişme olacaktır.



a)



b)

Şekil 2. Üçüncü ve dördüncü dereceli merkezi istatistiksel momentlerin farklı durumları için dağılım fonksiyonları a) çarpıklık, b) basıklık

1.2. Projenin Amacı

Tüm bu bilgiler ve motivasyondan hareketle bu projenin amacı, daha önce Proje yürütücüsü tarafından birinci ve ikinci İM'leri geliştirilerek akademik yapılar için uygulanmış İM analizini, belirsizliğin doğasına uygun daha gerçekçi tahminler yapabilen yüksek hassasiyetli bir yöntem haline getirecek geliştirmeleri yapmaktır. Bu amaçla üçüncü ve dördüncü İM ifadelerinin geliştirilmesi ve ardından yöntem performansının sayısal ve deneysel modellerle test edilmesi bu hızlı destek projesinin ana hedefleridir.

1.3. Konunun Önemi

Belirsizlik fenomeni pek çok mühendislik probleminde ortaya çıkabilmektedir. Belirsizliğin bir dinamik parametre üzerindeki etkisinin ilk tasarım süreçlerinde tahmin edilebilmesi veya bu belirsizliğin yapı/sistem boyunca yayınım davranışının tahmin edilebilmesi çok önemlidir. İlk tasarım aşamasında analizleri yapılarak ön prototip testlere göre üretimi gerçekleştirilmiş ürünlerin her biri analiz/test sonuçlarından çok farklı olarak beklenmedik bir dinamik davranış sergileyebilmektedir. Bu da her ürün örneğinin yeniden ele alınarak ona yönelik tedbirler alınmasını gerektirme, böylelikle düşük kalite ve yüksek maliyet gibi sonuçlar doğabilmektedir. Araştırmacılar genellikle vibro-akustik analizleri referans bir model üzerinden sadece parametrik analizler yaparak karşılaştırmaktadırlar. Belirsizlik analizi ile parametrik analiz birbirinden tamamen farklı yaklaşımlardır. Parametrik analizler, bir sistemin o parametreye göre nasıl değiştiğini anlamak amacıyla kontrol parametresinde yapılan nispeten büyük değişimlerin etkilerinin araştırılmasını içerir. Ancak belirsizlik analizi, değişken parametrenin maksimum yaklaşık %5'lik bir değerden olan kontrol edilemeyen sapmalarının sistem üzerindeki kümülatif istatistiki etkilerini sorgulamaktadır. Bu bilgi pek çok mühendislik problemi için hayati bir bilgidir. Giriş bölümünde değinildiği gibi mevcut yöntemler düşük çözüm süreleri, uygulama kolaylığı, gerçekçi modelleme, yüksek başarım

gibi performans kriterleri açılarından sorunlu taraflara sahiptirler. Dolayısıyla etkin ve gerçekçi bir belirsiz sistem modelleme yönteminin geliştirilebilmesinin dolayısıyla bu Projede ortaya konulan araştırmanın önemi oldukça açıktır.

1.4. Projenin Amacı ve Hedefi

Projenin temel amacı belirsizlikleri daha gerçekçi modelleyebilmek için yüksek hassasiyetli, düşük hafıza ve çözüm sürelerine sahip bir belirsizlik modelleme yöntemi geliştirmektir. Geliştirilen yöntemin sayısal ve deneysel performans testleri gerçekleştirilerek yöntemin özellikle çatlak belirsizliğinin modellenmesi gibi ileriki proje çalışmaları için uygulanabilirliği ortaya konulmuş olacaktır. Bu Projenin hızlı destek programına başvurulma amacı da tamamen bu ön çalışmaların tamamlanmasının sağlanmasına yöneliktir.

Bu amaç bağlamında projenin temel hedef ise, İMA ile belirsiz titreşim cevabının yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentlerinin (üçüncü ve dördüncü momentler) yüksek hassasiyetle ve kısa hesaplama süreleri ile elde edilmesidir. Bu hedef doğrultusunda proje süresince çeşitli deneysel ve sayısal araştırmalar gerçekleştirilecektir. Performans bağlamında, hedeflenen yöntem ve sayısal Monte Carlo simülasyonu ile yapılan analizler karşılaştırıldığında ölçülebilir beklentiler şu şekilde sayısallaştırılabilir:

1) Yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentler en fazla %2 sapma ile elde edilmelidir.
2) Hesaplama sürelerinde ise en az 50 kat daha az hesaplama süresine sahip olmalıdır.

Bunun yanında yöntemin deneysel sonuçlardan sapması istatistiksel sınıflamalara göre başarılı olmalıdır. Deneysel sistemlerde öngörülemeyen faktörler nedeniyle net bir sayısal istatistiki hedef koymak doğru olmayacaktır.

Proje çalışmaları sonucunda hedeflenen yöntem geliştirilmiştir. Yöntemin test işleminde, mekanik özellikleri tespit edilebilir sistemlere ihtiyaç duyulduğu için, kompozit kiriş modeli nihai olarak incelenmiştir.

Proje sonucunda “Katmanlı Kompozit Yapılardaki Belirsizliğin İstatistiksel Moment Analizi ile Belirlenmesi” başlıklı uluslararası bir makale hazırlanmaya başlanmıştır. Proje sonuç raporunda ana bölümlerin yanı sıra sonuç raporunun iş paketlerinde belirlenen hedeflerle ilişkisi Ek-1’de yer almaktadır.

2. MATEMATİKSEL YÖNTEMLER

Bu bölümde projede kullanılacak olan sayısal ve analitik yöntemler açıklanacaktır. Proje kapsamında ilk olarak istatistiksel moment(İM)'lerin analizi için bazı gerekli ifadeler analitik formülasyonlar kullanılarak elde edilmiştir. Ardından bazı kabullere dayanarak katmanlı kompozit çubuğun sayısal sonlu elemanlar modelinin kurulmasından bahsedilmiştir. Son olarak elde edilen istatistiksel denklemler, sonlu elemanlar yöntemi ile kullanılarak cevabın istatistiksel momentlerinin belirlenmesi için gerekli denklemler elde edilmiştir.

2.1. Monte Carlo Simülasyonu

Monte Carlo Simülasyonu (MCS) özellikle düşük frekans belirsizlik analizlerinde en çok kullanılan yöntemlerden biridir. MCS istatistikte borsa modellemesi, doğa olayları, sayısal dinamik analiz gibi pek çok farklı alanda girdileri belirsiz olan sistemlerin, girdilerin seçilen bir dağılım fonksiyonuna uygun olarak modellenmesi ile, çıktıların bu girdi modeline göre tahmin edilmesinde kullanılan bir simülasyondur. Ancak özellikle otomobil, uçak, gemi gibi karmaşık yapıların bir milyondan fazla serbestlik derecesi içeren sonlu elemanlar modellerinin analizinde bu tip simülasyonlar çözüm süresini 100 ila 1000 kat daha arttırmaktadır. Bunun yanında orta ve yüksek frekanslara sözü edilen yöntemlerle çıkılabilmesi için analizin tipine göre modelin serbestlik derecelerini geometrik (eksponansiyel) oranlarla arttırmak gerekebilir. Bu sürelere ve serbestlik dereceleri artımına ek olarak, ürünün iyileştirme çalışmaları için gereken diğer ek analizler düşünüldüğünde, belirsiz sistemlerin düşük, orta ve yüksek frekans analizlerinde deterministik yöntemlerin verimli bir şekilde kullanılması mümkün değildir.

2.2. İstatistiksel Momentlerin Hesaplanması

2.2.1. Rassal Bir Değişkenin İstatistiksel momentlerin hesaplanması

z rassal değişkenine bağlı $g(z)$ fonksiyonunun istatistiksel momenti şu şekilde hesaplanır (Grimmett ve Stirzaker, 2001; Rao, 2011):

$$\mu_g = \int g(z)\, p(z)\, dz = \int g(z)\, p_z dz\,. \tag{1}$$

Burada, $p(z)=p_z$ rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu (OYF), μ_g, $g(z)$ fonksiyonunun istatistiksel momenti (İM)'dir. Eğer $g(z)=z$ ise, z rassal olayının birinci dereceden İM'i (ortalama ve beklenen değeri olarak da bilinir ve μ_z ile gösterilir) elde edilir. Benzer şekilde, $g(z)=z^n$ olduğunda, elde edilen moment (μ_{z^n}) z rassal değişkeninin n. dereceden İM'i olarak isimlendirilir. Bilindiği üzere, $\int_{\Omega} p(z)\, dz = 1$'dir ve burada Ω rassal

değişkenin uzayıdır. İstatistikte, bir rassal değişkenin "merkezi" istatistiksel momenti (MİM)'i, σ_z^n, o değişkenin ortalama etrafındaki *n*. dereceden momenti olarak tanımlanır. Matematiksel olarak (Grimmett ve Stirzaker, 2001),

$$\sigma_z^n = \int (z-\mu_z)^n \, p(z)\, dz = \int (z-\mu_z)^n \, p_z dz, \tag{2}$$

ile ifade edilir. Denklem (2)'de, *n=1* olduğunda her zaman sıfır değeri elde edildiğinden *n* mutlaka 1'den büyük olmalıdır. *n=2* için MİM şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \int (z-\mu_z)^2 \, p_z dz = \int z^2 p_z dz - 2\mu_z \int z p_z dz + \mu_z^2 \int p_z dz \\ &= \mu_{z^2} - \mu_z^2. \end{aligned} \tag{3}$$

2. dereceden MİM, literatürde varyans olarak bilinir. Varyansın boyutu, incelenen değişkenin boyutunun karesi olduğundan incelenen değişken ile karşılaştırma işlemlerinde varyansın karekökü, $\sqrt{\sigma_z^2}$, yani rassal değişkenin standart sapması ($\sigma_z = \sqrt{\sigma_z^2}$) kullanılır. Denklem (3) 'te μ_{z^2} *z* rassal değişkeninin 2. Dereceden İM (karesel ortalama)'dir. Benzer şekilde, *n=3* ve *n=4* için sırasıyla MİM;

$$\sigma_z^3 = \mu_{z^3} - 3\sigma_z^2 \mu_z - \mu_z^3, \tag{4}$$

$$\sigma_z^4 = \mu_{z^4} - 4\sigma_z^3 \mu_z - 6\sigma_z^2 \mu_z^2 - \mu_z^4, \tag{5}$$

ile hesaplanır. Literatürde, üçüncü ve dördüncü dereceden MİM, bir normalizasyon işleminden geçirildikten sonra sunulur. Bu normalizasyon işleminden sonra ortaya çıkan momentler standartlaştırılmış İM olarak bilinir. Üçüncü ve dördüncü dereceden standartlaştırılmış İM, sırasıyla çarpıklık ve basıklık olarak isimlendirilir. Çarpıklık, OYF'nin simetrik olması ile ilgili bir ölçü iken, basıklık dağılımın kuyruklarının yayılmış olup olmadığını gösterir (Şekil 2). Matematiksel olarak, çarpıklık ve basıklık (R. A. Johnson vd., 2017):

$$s_z = \frac{\sigma_z^3}{\left(\sigma_z^2\right)^{3/2}}, \tag{6}$$

$$k_z = \frac{\sigma_z^4}{\left(\sigma_z^2\right)^2}, \tag{7}$$

ile hesaplanır. Burada, σ^n ve $\left(\sigma^2\right)^n$ sırasıyla *n*. dereceden MİM ve varyansın *n*. dereceden kuvvetini gösterir.

2.2.2. Matematiksel Operatörler (Toplama, Çıkarma ve Çarpma) için MİM'lerin Analitik İfadelerinin Elde Edilmesi

z rassal değişkeninin *x* ve *y* gibi iki rassal değişkenin toplam/çıkarma durumunda olduğunu kabul edelim:

$$z = ax \pm by \ . \tag{8}$$

Burada, a ve *b* sabit katsayılardır. *z* rassal değişkeninin ortalaması, Denklem (8)'in Denklem (1)'de yerine yazılması ile,

$$\mu_z = \int z p_z dz = \int\int axp_x p_y dxdy \pm \int\int byp_x p_y dxdy = a\int xp_x dx \pm b\int yp_y dy = a\mu_x \pm b\mu_y , \tag{9}$$

şeklinde hesaplanır.

Denklem (8)'de tanımlanan matematiksel operasyon yerine, *z* rassal değişkeni, x ve y rassal değişkenlerinin çarpımları ($z = ax \cdot by$) sonucunda elde ediliyorsa, ortalama,

$$\mu_z = \int z p_z dz = \int\int ax \cdot byp_x p_y dxdy = ab\int\int xyp_x p_y dxdy = ab\mu_{xy} , \tag{10}$$

ile belirlenir. Burada, μ_{xy} x ve y rassal değişkenlerinin çarpımının ortalamasıdır. Bu noktada istatistikte oldukça sık şekilde kullanılan kovaryans ($c_{x,y}$)'ın matematiksel tanımını vermek anlamlı olacaktır:

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(x,y) = c_{x,y} &= \int\int (x-\mu_x)(y-\mu_y)\, p_x p_y dxdy \\ &= \int\int (xy - \mu_x y - x\mu_y + \mu_x\mu_y)\, p_x p_y dxdy = \mu_{xy} - \mu_x\mu_y \end{aligned} \tag{11}$$

Buna göre,

$$\mu_{xy} = \mu_x\mu_y + c_{x,y} \ . \tag{12}$$

Kovaryans, rassal değişkenlerin birbirinden bağımsız olması durumunda sıfır olarak hesaplanır ($c_{x,y} = 0$). Denklem (12), Denklem (10)'da yerine yazılırsa,

$$\mu_z = ab(\mu_x\mu_y + c_{x,y}) , \tag{13}$$

elde edilir.

Yukarıda verilen denklemler yardımıyla, Denklem (8)'de verilen (toplama/çıkarma işleminin) *z* rassal değişkeninin ikinci, üçüncü ve dördüncü derecede MİM'leri (σ_z^2 , σ_z^3 ve σ_z^4) sırasıyla,

$$\sigma_z^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 \pm 2ab\,\mathrm{c}_{x,y} , \tag{14}$$

$$\sigma_z^3 = a^3\sigma_x^3 \pm 3a^2b\left(\mathrm{c}_{x^2,y} - 2\mu_x\,\mathrm{c}_{x,y}\right) + 3ab^2\left(\mathrm{c}_{x,y^2} - 2\mu_y\,\mathrm{c}_{x,y}\right) \pm b^3\sigma_y^3 , \tag{15}$$

$$\sigma_z^4 = a^4\sigma_x^4 \pm 4a^3b\left(\mathrm{c}_{x^3,y} - 3\mu_x\,\mathrm{c}_{x^2,y} + 3\mu_x^2\,\mathrm{c}_{x,y}\right) + 6a^2b^2\left(\sigma_x^2\sigma_y^2 + \mathrm{c}_{x^2,y^2} - 2\mu_x\,\mathrm{c}_{x,y^2} - 2\mu_y\,\mathrm{c}_{x^2,y} + 4\mu_x\mu_y\,\mathrm{c}_{x,y}\right), \pm 4ab^3\left(\mathrm{c}_{x,y^3} - 3\mu_y\,\mathrm{c}_{x,y^2} + 3\mu_y^2\,\mathrm{c}_{x,y}\right) + b^4\sigma_y^4 \quad (16)$$

ile hesaplanır. Benzer şekilde, çarpım durumundaki iki rassal değişkenin sonucunun ($z = ax \cdot by$) ikinci, üçüncü ve dördüncü derecede MİM'leri (σ_z^2 , σ_z^3 ve σ_z^4) sırasıyla şu şekilde ifade edilir:

$$\sigma_z^2 = a^2b^2\left(\sigma_x^2\sigma_y^2 + \sigma_x^2\mu_y^2 + \mu_x^2\sigma_y^2 + \mathrm{c}_{x^2,y^2} - 2\mu_x\mu_y\,\mathrm{c}_{x,y} - \mathrm{c}_{x,y}^2\right), \quad (17)$$

$$\sigma_z^3 = a^3b^3\Big[\sigma_x^3\left(\sigma_y^3 + 3\sigma_y^2\mu_y + \mu_y^3\right) + 3\sigma_x^2\mu_x\left(\sigma_y^3 + 2\sigma_y^2\mu_y\right) + \mu_x^3\sigma_y^3 + 3\,\mathrm{c}_{x,y}\left(-\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_x^2\mu_y^2 + \mu_x^2\mu_y^2 - \mu_x^2\sigma_y^2 - \mathrm{c}_{x^2,y^2}\right) + 2\,\mathrm{c}_{x,y}^3 + 6\mu_x\mu_y\,\mathrm{c}_{x,y}^2 - 3\mu_x\mu_y\,\mathrm{c}_{x^2,y^2} + \mathrm{c}_{x^3,y^3}\Big], \quad (18)$$

$$\begin{aligned}\sigma_z^4 = a^4b^4\Big[&\sigma_x^4\left(\sigma_y^4 + 4\sigma_y^3\mu_y + 6\sigma_y^2\mu_y^2 + \mu_y^4\right) + 4\sigma_x^3\mu_x\left(\sigma_y^4 + 3\sigma_y^3\mu_y + 3\sigma_y^2\mu_y^2\right) \\ &+ 6\sigma_x^2\mu_x^2\left(\sigma_y^4 + 2\sigma_y^3\mu_y + \sigma_y^2\mu_y^2\right) + \mu_x^4\sigma_y^4 + \mathrm{c}_{x^4,y^4} - 4\mu_x\mu_y\,\mathrm{c}_{x^3,y^3} + 6\mu_x^2\mu_y^2\,\mathrm{c}_{x^2,y^2} \\ &- 4\,\mathrm{c}_{x,y}\left\{\sigma_x^3\left(\sigma_y^3 + 3\sigma_y^2\mu_y + \mu_y^3\right) + 3\sigma_x^2\mu_x\left(\sigma_y^3 + 2\sigma_y^2\mu_y\right) + \mu_x^3\left(\sigma_y^3 + \mu_y^3\right) - 3\mu_x\mu_y\,\mathrm{c}_{x^2,y^2} + \mathrm{c}_{x^3,y^3}\right\} \\ &+ 6\,\mathrm{c}_{x,y}^2\left\{\sigma_x^2\sigma_y^2 + \mu_x^2\sigma_y^2 + \sigma_x^2\mu_y^2 + \mu_x^2\mu_y^2 - 3\mu_x^2\mu_y^2 + \mathrm{c}_{x^2,y^2}\right\} - 12\mu_x\mu_y\,\mathrm{c}_{x,y}^3 - 3\,\mathrm{c}_{x,y}^4\Big]\end{aligned}. \quad (19)$$

Tablo 1'de bir rassal değişkenin ikinci, üçüncü ve dördüncü derece "merkezi" istatistiksel momentleri, "sıfır etrafındaki" istatistiksel momentleri cinsinden ifadeleri verilmiştir. Denklem (9)-(19)'a göre birbirine bağımlı olmayan toplama, çıkarma ve çarpma durumundaki rassal değişkenlerin cevabının ortalama, ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden merkezi istatistiksel momentleri Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 1. Bir rassal değişkenin ikinci, üçüncü ve dördüncü derece "merkezi" istatistiksel momentleri, "sıfır etrafındaki" istatistiksel momentleri cinsinden ifadeleri

Merkezi istatistiksel momentin derecesi	Matematiksel İfade
2. derece (σ_z^2)	$\mu_{z^2} - \mu_z^2$
3. derece (σ_z^3)	$\mu_{z^3} - 3\mu_z\mu_{z^2} + 2\mu_z^3 = \mu_{z^3} - 3\mu_z\sigma_z^2 - \mu_z^3$
4. derece (σ_z^4)	$\mu_{z^4} - 4\mu_z\mu_{z^3} + 6\mu_z^2\mu_{z^2} - 3\mu_z^4 = \mu_{z^4} - 4\mu_z\sigma_z^3 - 6\mu_z^2\sigma_z^2 - \mu_z^4$

Tablo 2. Birbirine bağımlı olmayan toplama, çıkarma ve çarpma durumundaki rassal değişkenlerin cevabının ortalama, ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden merkezi istatistiksel momentleri

İstatistiksel	Matematiksel İfade

moment	Toplama/Çıkarma ($z = ax \pm by$)	Çarpma ($z = ax \cdot by$)
Ortalama (μ_z)	$a\mu_x \pm b\mu_y$	$ab\mu_x\mu_y$
2. derece merkezi (σ_z^2)	$a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2$	$a^2b^2\left(\sigma_x^2\sigma_y^2 + \sigma_x^2\mu_y^2 + \mu_x^2\sigma_y^2\right)$
3. derece merkezi (σ_z^3)	$a^3\sigma_x^3 \pm b^3\sigma_y^3$	$a^3b^3\left[\sigma_x^3\left(\sigma_y^3 + 3\sigma_y^2\mu_y + \mu_y^3\right) + 3\sigma_x^2\mu_x\left(\sigma_y^3 + 2\sigma_y^2\mu_y\right) + \mu_x^3\sigma_y^3\right]$
4. derece merkezi (σ_z^4)	$a^4\sigma_x^4 + 6a^2b^2\sigma_x^2\sigma_y^2 + b^4\sigma_y^4$	$a^4b^4\left[\sigma_x^4\left(\sigma_y^4 + 4\sigma_y^3\mu_y + 6\sigma_y^2\mu_y^2 + \mu_y^4\right) + 4\sigma_x^3\mu_x\left(\sigma_y^4 + 3\sigma_y^3\mu_y + 3\sigma_y^2\mu_y^2\right) + 6\sigma_x^2\mu_x^2\left(\sigma_y^4 + 2\sigma_y^3\mu_y + \sigma_y^2\mu_y^2\right) + \mu_x^4\sigma_y^4\right]$

Bu bölümde birbirlerine bölünen rassal değişkenler için denklemler farklı bir yaklaşım gerektirdiğinden verilmemiştir. İki rassal değişkenin birbirine bölümü hesaplanmak istenirse aşağıdaki gibi bir süreç izlenebilir:

$$z = \frac{ax}{by} = ax \cdot \frac{1}{by} = ax \cdot b^* y^* \tag{20}$$

Burada, $b^* = 1/b$ ve $y^* = 1/y$'dir. Ardından çarpım durumundaki rassal değişkenlerin hesaplamaları kullanılabilir. *1/y* fonksiyonunun MİM'leri *y*'nin MİM'leri cinsinden Taylor serisi kullanılarak ifade edilebilir. Taylor serisi ile İM'lerin hesaplanışı bir sonraki bölümde verilmiştir.

2.2.3. Fonksiyonların Merkezi İstatistiksel Momentlerinin Taylor Serisi ile Belirlenmesi

Bölüm 2.1.1 rassal bir değişkenin MİM'lerinin hesaplanması için bazı formülasyonlar verilmişti. Bunun yanında Bölüm 2.1.2'de ise iki farklı rassal değişkenin matematiksel operasyonları için sonucun MİM'lerinin hesaplanması için formülasyonlar verildi. Fakat bazı özel durumlarda, (örneğin özdeğerlerin (λ_n) MİM'lerinin bilinmesi durumunda doğal frekansların ($\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$) MİM'lerinin hesaplanması veya 1/z fonksiyonunun MİM'lerin, *z*'in MİM'leri cinsinden hesaplanması gibi) bir rassal değişkene bağlı fonksiyonun MİM'lerinin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda Taylor serisi kullanılabilir.

Rassal bir *z* değişkenine bağlı ve [z_0, *z*] aralığında sürekli bir *g* fonksiyonunun *z* noktasındaki değeri Taylor serisi ile hesaplanabilir:

$$g(z) \cong g(z_0) + \frac{(z-z_0)}{1!}\frac{dg(z)}{dx}\bigg|_{z=z_0} + \frac{(z-z_0)^2}{2!}\frac{d^2g(z)}{dz^2}\bigg|_{z=z_0} + \ldots + \frac{(z-z_0)^t}{t!}\frac{d^tg(z)}{dz^t}\bigg|_{z=z_0} \quad (21)$$

Denklem (21)'de verilen *x* değişkeninin $p(z)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu rassal bir değişken olduğunu kabul edelim. Buna göre, $g(z)$ fonksiyonunun beklenen değeri (ortalaması) Denklem (1) ile hesaplanabilir. Denklem (21), Denklem (1)'de yerine yazılırsa,

$$\mu_g \cong g(\mu_z) + \frac{1}{2}\frac{d^2g(z)}{dz^2}\bigg|_{z=\mu_z}\sigma_z^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3g(z)}{dz^3}\bigg|_{z=\mu_z}\sigma_z^3 + \frac{1}{24}\frac{d^4g(z)}{dz^4}\bigg|_{z=\mu_z}\sigma_z^4 + \ldots\ , \quad (22)$$

elde edilir. $g = f^n(z)$ şeklinde bir fonksiyon ise, *g* fonksiyonunun ortalaması Denklem (21) 'de *t=4* için,

$$\mu_g = \mu_{f^n} \cong f^n(\mu_z) + \frac{1}{2}\frac{d^2f^n(z)}{dz^2}\bigg|_{z=\mu_z}\sigma_z^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3f^n(z)}{dz^3}\bigg|_{z=\mu_z}\sigma_z^3 + \frac{1}{24}\frac{d^4f^n(z)}{dz^4}\bigg|_{z=\mu_z}\sigma_z^4\ , \quad (23)$$

ile hesaplanır. Bu denklem ile *g* fonksiyonunun ortalaması, *f* fonksiyonunun *n.* dereceden kuvvetinin μ_z noktasındaki türevleri ve *z* rassal değişkenlerinin istatistiksel momentleri cinsinden ifade edilmiş olunur. *f* fonksiyonun ikinci, üçüncü ve dördüncü derece MİM'leri, Tablo 1'de verilen denklemler kullanılarak,

$$\sigma_f^2 = \mu_{f^2} - \mu_f^2\,, \quad (24)$$

$$\sigma_f^3 = \mu_{f^3} - 3\mu_f\sigma_f^2 - \mu_f^3\,, \quad (25)$$

$$\sigma_f^4 = \mu_{f^4} - 4\mu_f\sigma_f^3 - 6\mu_f^2\sigma_f^2 - \mu_f^4\,, \quad (26)$$

ile belirlenir. Burada, μ_{f^2}, μ_{f^3} ve μ_{f^4} ise Denklem (23) kullanılarak hesaplanır. Titreşim problemlerinde sıkça karşılaşılan 1/z fonksiyonu için İM denklemleri, Denklem (23)'ün *n=1,2,3,4* için yazılmasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mu_{\frac{1}{z}} \cong \frac{1}{\mu_z} + \frac{\sigma_z^2}{\mu_z^3} - \frac{\sigma_z^3}{\mu_z^4} + \frac{\sigma_z^4}{\mu_z^5}\ , \quad (27)$$

$$\mu_{\left(\frac{1}{z}\right)^2} \cong \frac{1}{\mu_z^2} + \frac{3\sigma_z^2}{\mu_z^4} - \frac{4\sigma_z^3}{\mu_z^5} + \frac{5\sigma_z^4}{\mu_z^6}\ , \quad (28)$$

$$\mu_{\left(\frac{1}{z}\right)^3} \cong \frac{1}{\mu_z^3} + \frac{6\sigma_z^2}{\mu_z^5} - \frac{10\sigma_z^3}{\mu_z^6} + \frac{15\sigma_z^4}{\mu_z^7}\ , \quad (29)$$

$$\mu_{\left(\frac{1}{z}\right)^4} \cong \frac{1}{\mu_z^4} + \frac{10\sigma_z^2}{\mu_z^6} - \frac{20\sigma_z^3}{\mu_z^7} + \frac{35\sigma_z^4}{\mu_z^8}\ . \quad (30)$$

Merkezi istatistiksel momentler ise Denklem (27)-(30)'in Denklem (24)-(26)'de yerine yazılmasıyla hesaplanır.

Titreşim çalışmalarında karşılaşılan bir başka fonksiyon ise $\sqrt{z}$ fonksiyonudur. Bu fonksiyon için İM denklemleri,

$$\mu_f = \mu_{\sqrt{z}} \cong \sqrt{\mu_z} - \frac{\sigma_z^2}{8\sqrt{\mu_z^3}} + \frac{3\sigma_z^3}{48\sqrt{\mu_z^5}} - \frac{15\sigma_z^4}{384\sqrt{\mu_z^7}} \ , \tag{31}$$

$$\mu_{f^2} = \mu_z \ , \tag{32}$$

$$\mu_{f^3} = \mu_{\sqrt{z^3}} \cong \sqrt{\mu_z^3} + \frac{3\sigma_z^2}{8\sqrt{\mu_z}} - \frac{\sigma_z^3}{16\sqrt{\mu_z^3}} + \frac{3\sigma_z^4}{128\sqrt{\mu_z^5}} \ , \tag{33}$$

$$\mu_{f^4} = \mu_{z^2} = \sigma_z^2 + \mu_z^2 \ . \tag{34}$$

ile hesaplanır.

2.2.4. Fonksiyonların Merkezi İstatistiksel Momentlerinin Taylor Serisi ile Belirlenmesi

Bir rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunun (OYF) bilinmesi durumunda merkezi istatistiksel momentleri hesaplanabilmektedir. Az sayıda örnekleme sahip rassal değişkenin istatistiksel özelliklerinin belirlenmesi gibi bazı özel durumlarda bir rassal değişkenin merkezi istatistiksel momentlerinin bilinmesi durumunda OYF'nin belirlenmesi gerekebilir. Bu gibi durumlarda Pearson modeli (veya Pearson dağılımı) kullanılır (Pearson, 1963). Rassal değişkenin OYF, rassal değişkenin merkezi istatistiksel momentleri kullanılarak hesaplanan standart istatistiksel momentleri (ortalama, varyans, çarpıklık (skewness) ve basıklık (kurtosis)) yardımıyla belirlenir. Pearson modeli ile OYF'nin belirlenmesi için aşağıdaki genel diferansiyel denklemin çözülmesi gereklidir (Pearson, 1963):

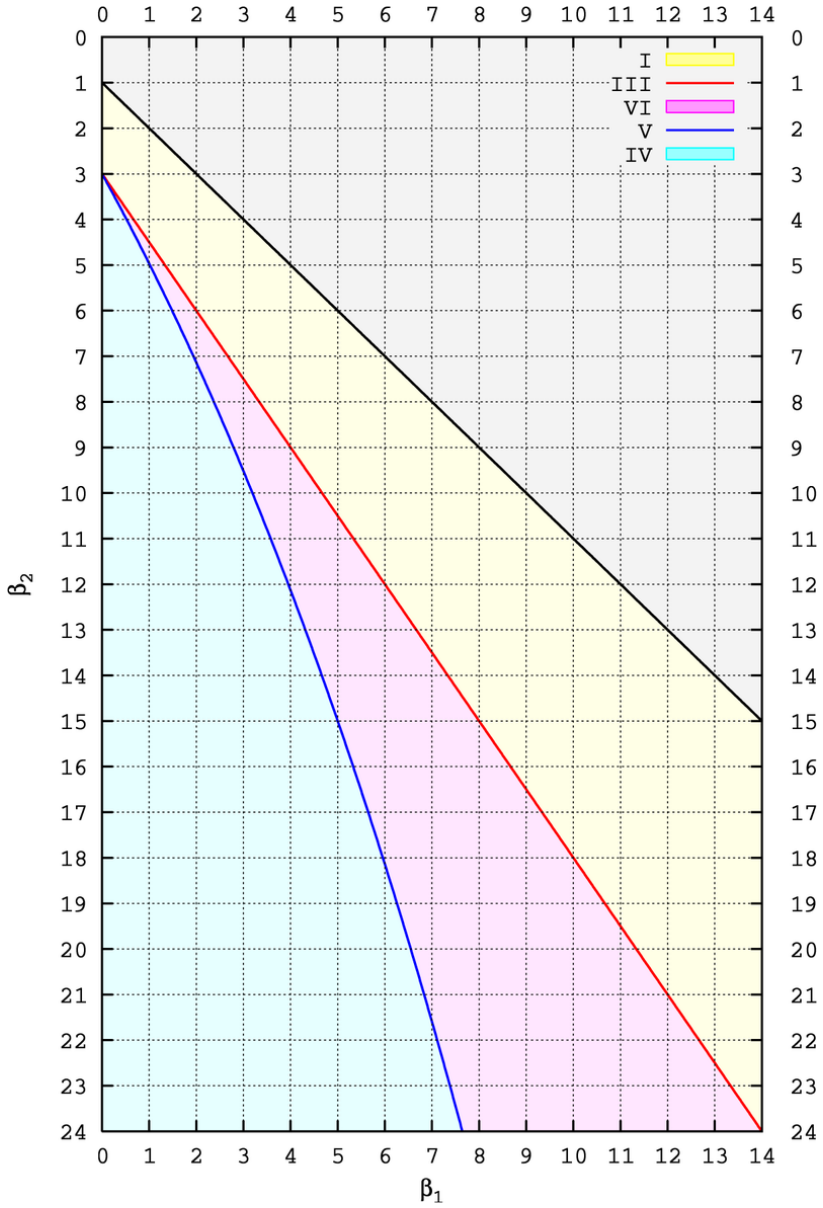
$$\frac{dp_z/dz}{p_z} + \frac{z + c_1}{c_0 + c_1 z + c_2 z^2} = 0 . \tag{35}$$

Burada, z rassal değişken, p_z OYF, c_0, c_1 ve c_2 varyans, çarpıklık ve basıklık ile ilişkili deterministik katsayılardır. Denklem (35)'in çözüm formu,

$$p_z = C \exp\left(-\int \frac{z + c_1}{c_0 + c_1 z + c_2 z^2} \right), \tag{36}$$

şeklindedir ve burada, C katsayısı $\int_\Omega p(z)dz = 1$ denklemini sağlayacak şekilde seçilir. Denklem (36)'nın çözümü integrasyonun paydasında yer alan ikinci dereceden denklemin diskriminantının işaretine göre oldukça basitleşir. Bunun yanında, Pearson bu basitleştirme

işlemi için dağılımın tipinin belirlendiği ve daha sonra Pearson grafiği olarak bilinen bir grafik yayınlamıştır (N. L. Johnson vd., 1995) (Şekil 3). Bu grafikte, rassal değişkenin çarpıklığının karesi ($\beta_1=s^2$) ve basıklığı ($\beta_2=k$) Pearson grafiğinde işaretlenir. İşaretlenen nokta belirli bir dağılım tipi ve dolayısıyla OYF'e karşılık gelir ve Denklem (36)'nın basitleştirilmiş halini kullanabilir. Pearson modeli ve grafiği ile ilgi daha detaylı bilgi için (N. L. Johnson vd., 1995; Pearson, 1963) referansları incelenebilir. Bu projede, Pearson modeli ve grafiği hem belirsiz deneysel ölçümlerle elde edilen elastisite modülü ve yoğunluğun hem de özdeğerlerin OYF'i belirlemek için kullanılmıştır.



Şekil 3. Örnek bir Pearson grafiği

2.3. Katmanlı Kompozit Çubuğun Sonlu Elemanlar Modeli

Proje önerisinde incelenecek olan belirsiz kompozit çubuklarının sayısal analizinin Ayrık Tekil Konvolüsyon Yöntemi ile yapılacağı belirtilmiştir. Fakat projede uygulama kolaylığı sağlaması ve ilerleyen dönemlerdeki çalışmalarda incelenecek lokal belirsizliklerin modellemelerinde Ayrık Tekil Konvolüsyon yönteminin uygun olmaması nedeniyle projede sayısal analiz yöntemi olarak sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır.

Whitney (1987) simetrik katmanlı, açısal oryantasyonu çubuk kenarlarına paralel şekilde üretilen ince kompozit çubukların, klasik ince çubuk teorisindeki eğilme direngenliğinin (EI_y), kompozit çubuklardaki eşdeğer direngenlik ($E_x^b I_y$) ile yer değiştirilmesi durumunda klasik ince çubuk teorisi incelenebileceğini belirtmiştir. Burada, eşdeğer direngenlik katmanların elastisite modüllerinin bilinmesi durumunda şu şekilde hesaplanabilir:

$$E_x^b I_y = \sum_{k=1}^{N} E_x^k I^k \quad . \tag{37}$$

Denklem (37), yukarıda verilen kabullere uygun bir kompozit çubuk üretilerek deneysel olarak belirlenen elastisite modülünün (E_x^b) klasik çubuk teorisinde kullanılması ile istenilen analizin yapılabileceğini belirtmektedir. Klasik ince çubuk teorisine göre, kompozit çubuğun homojen diferansiyel denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$E_x^b I_y \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial^4 x} + \rho S \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial^2 t} = 0 \ . \tag{38}$$

Burada, I_y y ekseni etrafındaki alan atalet momenti, ρ yoğunluk, S ise kesit alanı, x çubuğun uzunluğunun bulunduğu eksen, t zaman, w çubuğun z eksenindeki yer değiştirmesidir. Denklem (38), sonlu elemanlar yöntemi ile aşağıdaki gibi modellenebilir:

$$\left(\bar{\mathbf{K}} - \lambda_n \bar{\mathbf{M}}\right)\{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{0}\} \ . \tag{39}$$

Burada, $\bar{\mathbf{M}}$ ve $\bar{\mathbf{K}}$ sırasıyla çubuğun global kütle ve direngenlik matrisleri, λ_n çubuğun özdeğerleri, $\sqrt{\lambda_n} = \omega_n = 2\pi f_n$ çubuğun doğal frekansı, **w** ise sonlu elemanlar ile modellenen çubuğun düğüm noktalarıdır. Global kütle ve direngenlik matrisi, lokal kütle (**m**) ve direngenlik (**k**) matrisi kullanılarak oluşturulur:

$$\mathbf{m} = \frac{\rho S l}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} , \tag{40}$$

$$\mathbf{k} = \frac{E_x^b I_y}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} , \tag{41}$$

ve burada *l* eleman uzunluğudur.

2.4. MİM Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Birlikte Kullanılması

Belirsiz elastisite ve yoğunluğa sahip bir çubuğun sayısal modeli, Denklem (40)-(41)'den elde edilen global kütle ve direngenlik matrislerinin Denklem (39)'da kullanılması ile aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left(E_x^b\left(\xi_1\right)r\left(\xi_2\right)\mathbf{K}-\lambda_n\mathbf{M}\right)\left\{\mathbf{w}\right\}=\left\{\mathbf{0}\right\}\ . \tag{42}$$

Burada, $\mathbf{K}=\bar{\mathbf{K}}/E_x^b$, $\mathbf{M}=\bar{\mathbf{M}}/\rho$ ve $r=1/\rho$ özgül hacimdir.

Bu bölümde İstatistiksel moment analizi (İMA) ile belirsiz çubuğun özdeğerlerinin merkezi istatistiksel momentleri için ihtiyaç duyulan denklemler kapalı formda elde edilecektir. Denklem (42) kullanılarak özdeğerlerin ortalaması (μ_{λ_n}),

$$\left(\mu_{E_x^b}\mu_r\mathbf{K}-\mu_{\lambda_n}\mathbf{M}\right)\left\{\mathbf{w}\right\}=\left\{\mathbf{0}\right\}\ , \tag{43}$$

denkleminin özdeğerlerinin belirlenmesi ile hesaplanır. Burada, μ alt indisinde gösterilen belirsiz parametrenin ortalamasıdır. Denklem (42)'nın varyansının alınması ile aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\sigma^2_{\left(E_x^b r\mathbf{K}-\lambda_n\mathbf{M}\right)}\sigma^2_{\{\mathbf{w}\}}+\sigma^2_{\left(E_x^b r\mathbf{K}-\lambda_n\mathbf{M}\right)}\mu^2_{\{\mathbf{w}\}}+\mu^2_{\left(E_x^b r\mathbf{K}-\lambda_n\mathbf{M}\right)}\sigma^2_{\{\mathbf{w}\}}=0\ . \tag{44}$$

$\mu_{\left(E_x^b r\mathbf{K}-\lambda_n\mathbf{M}\right)}=0$ olduğundan ve titreşimin sıfır olmadığı durum için, Denklem (44)'in çözümü

$$\sigma^2_{\left(E_x^b r\mathbf{K}-\lambda_n\mathbf{M}\right)}=0\ , \tag{45}$$

ile hesaplanır. Denklem (45), iki rassal değişkenin toplamının varyansı (Tablo 2) kullanılarak şu şekilde yazılır:

$$\sigma^2_{E_x^b r}\mathbf{K}^2+\sigma^2_{\lambda_n}\mathbf{M}^2=0\ . \tag{46}$$

Burada, $\sigma^2_{\lambda_n}$ özdeğerlerin varyansıdır. Belirsiz elastisite modülü ve özgül hacmin çarpımının varyansı ise Tablo 2 kullanılarak şu şekilde hesaplanır:

$$\sigma^2_{E_x^b r}=\sigma^2_{E_x^b}\sigma^2_r+\sigma^2_{E_x^b}\mu^2_r+\mu^2_{E_x^b}\sigma^2_r\ . \tag{47}$$

Özdeğerlerin varyansı Denklem (46) kullanılarak hesaplanır. 3. Derece merkezi istatistiksel moment varyans hesaplamasına benzer şekilde,

$$\sigma^3_{\left(E_x^b r\mathbf{K}-\lambda_n\mathbf{M}\right)}=\sigma^3_{E_x^b r}\mathbf{K}^3-\sigma^3_{\lambda_n}\mathbf{M}^3=0\ , \tag{48}$$

elde edilir. Burada,

$$\sigma^3_{E^b_x r} = \sigma^3_{E^b_x}\left(\sigma^3_r + 3\sigma^2_r\mu_r + \mu^3_r\right) + 3\sigma^3_{E^b_x}\mu_{E^b_x}\left(\sigma^3_r + 2\sigma^2_r\mu_r\right) + \mu^3_{E^b_x}\sigma^3_r \ . \tag{49}$$

Denklem (46)'un karekökü kullanılarak, Denklem (48)'deki özdeğerlerin 3. derece merkezi istatistiksel momenti şu şekilde hesaplanır:

$$\sigma^3_\lambda = \frac{\left(\sigma^3_{E^b_x}\left(\sigma^3_r + 3\sigma^2_r\mu_r + \mu^3_r\right) + 3\sigma^3_{E^b_x}\mu_{E^b_x}\left(\sigma^3_r + 2\sigma^2_r\mu_r\right) + \mu^3_{E^b_x}\sigma^3_r\right)\left(\sigma_\lambda\right)^3}{\left(\sigma^2_{E^b_x}\sigma^2_r + \sigma^2_{E^b_x}\mu^2_r + \mu^2_{E^b_x}\sigma^2_r\right)^{\frac{3}{2}}} \ . \tag{50}$$

Yukarıdaki denklemde σ^3 ve $\left(\sigma\right)^3$ sırasıyla 3. derece merkezi istatistiksel momenti ve standart sapmanın (varyansın karekökünün) küpüdür. 3. derece merkezi istatistiksel momente benzer olarak 4. derece merkezi istatistiksel moment şu şekilde hesaplanır:

$$\sigma^4_\lambda = \frac{6\left(\sigma^2_{E^b_x r}\right)^2 - \sigma^4_{E^b_x r}}{\left(\sigma^2_{E^b_x r}\right)^2}\left(\sigma^2_\lambda\right)^2 \ . \tag{51}$$

Denklem (51)'te σ^4 dördüncü derece merkezi istatistiksel moment, $\left(\sigma^2\right)^2$ ise varyansın karesidir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\sigma^4_{E^b_x r} = {} & \sigma^4_{E^b_x}\left(\sigma^4_r + 4\sigma^3_r\mu_r + 6\sigma^2_r\mu^2_r + \mu^4_r\right) + 4\sigma^3_{E^b_x}\mu_{E^b_x}\left(\sigma^4_r + 3\sigma^3_r\mu_r + 3\sigma^2_r\mu^2_r\right) \\ & + 6\sigma^2_{E^b_x}\mu^2_{E^b_x}\left(\sigma^4_r + 2\sigma^3_r\mu_r + \sigma^2_r\mu^2_r\right) + \mu^4_{E^b_x}\sigma^4_r\end{aligned} \ . \tag{52}$$

3. SAYISAL ÇALIŞMALAR

Projenin başarıya ulaşması için proje önerisinde sunulan iş paketleri Tablo 3'te sunulmuştur. Tablo 3 incelendiğinde projenin başarıya ulaştığını göstermek amacıyla aşağıdaki sayısal çalışmaların tamamlanması gereklidir. Aşağıda listelenen çalışmaların sonuçlarının sonuç raporunda sunulduğu bölüm de listenin başında koyu olarak belirtilmiştir.

- **Bölüm 3.1.** Farklı dağılım türlerinde belirsiz parametrelerin örneklenerek farklı matematiksel operasyonları durumundaki yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentlerinin sayısal olarak elde edilmesi (İş Paketi 1.d)
- **Bölüm 3.2.** Kompozit çubuklar için sayısal modelin doğrulanması (İş Paketi 2)
- **Bölüm 3.3.** 50 adet kompozit çubuk örneklemi üretilerek deneysel elastisite modülü ve yoğunluğunun belirlenmesi ve üretilen belirsiz çubuklar için deneysel titreşim analizinin yapılması (İş Paketi 3.a-c)
- **Bölüm 3.4.** Deneysel belirsiz kompozit çubukların belirsiz elastisite modülü ve yoğunluğun MİM'lerinin sayısal modele beslenerek sayısal belirsizlik analizinin yapılması (İş Paketi 4.a)
- **Bölüm 3.4.** Deneysel belirsizlik verilerinin sayısal modelde kullanılarak sayısal Monte Carlo simülasyonu (MCS) ile analizinin yapılması ve sonuçların İM analizi ile karşılaştırılması (İş Paketi 4.b-c)

3.1. Rassal Değişkenlerin Matematiksel Operasyonlarının MİM'lerinin Hesaplanması

Bu bölümde, Bölüm 2.2'de ortaya konulan denklemlerin doğrulama çalışmaları yapılacaktır. Bu kapsamda, *x* ve *y* birbirinden bağımsız, farklı dağılımlara sahip rassal değişkenler olduklarını kabul edelim. Bu kapsamda, *x* rassal değişkeni ortalaması 5 ($\mu_x = 5$), standart sapması 1.2 ($\sigma_x = 1.2$) olan normal dağılıma ve *y* rassal değişkeni a=8 ve b=12 aralığında düzgün (uniform) dağılıma sahip olsun.

Dağılım setlerinde adı geçen dağılımların standartlaştırılmış istatistiksel momentlerinin analitik ifadeleri Tablo 4'te sunulmuştur.

Tablo 3. Proje iş paketleri

İP No	İş Paketlerinin Adı ve Hedefleri	Başarı Ölçütü ve Projenin Başarısına Katkısı
1	**Farklı matematiksel operatörler (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi) için yüksek dereceli istatistiksel momentlerin analitik olarak elde edilmesi** **<u>İş paketi kapsamında yapılacak çalışmalar</u>** a. Bir belirsiz parametrenin yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentlerinin analitik ifadelerinin belirlenmesi b. Toplama ve çıkarma işlemleri için yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentlerin analitik ifadelerinin elde edilmesi c. Çarpma ve bölme işlemleri için yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentlerin analitik ifadelerinin elde edilmesi d. Farklı dağılım türlerinde belirsiz parametrelerin örneklenerek farklı matematiksel operasyonları durumundaki yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentlerinin sayısal olarak elde edilmesi d.1. Farklı dağılımlar için farklı merkezi istatistiksel momentlere sahip örneklemlerin türetilmesi d.2. Matematiksel operasyonlar sonucunda yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentlerin hesaplanması	**Başarı Ölçütü: %20** Bilindiği üzere titreşim sistemlerindeki belirsiz parametreler birbirleriyle farklı matematiksel operatörler ile etkileşim içindedir. Ayrıca bu etkileşim sonucunda belirsiz cevabın tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu nedenle bu iş paketinde ilk olarak farklı matematiksel operatörler için yüksek dereceli merkezi istatistiksel moment ifadeleri elde edilecektir.
2	**Belirsiz bir yapı olarak seçilen kompozit çubuğun stokastik diferansiyel denkleminin yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentleri için türetilmesi** **<u>İş paketi kapsamında yapılacak çalışmalar</u>** a. Yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentler lamine kompozit çubuğun diferansiyel denklemlerine kapalı formda uygulanması	**Başarı Ölçütü: %10** Bu iş paketinde bir önceki 1. iş paketinde elde edilen ifadeler kompozit çubuğun diferansiyel denklemlerine uygulanarak sayısal yöntem ile çözüm için gereken denklemler elde edilecektir.
3	**Belirsiz bir yapı olarak kompozit çubukların belirsizliklerinin deneysel olarak elde edilmesi** **<u>İş paketi kapsamında yapılacak çalışmalar</u>** a. Aynı laminasyon sayısında aynı oryantasyonda 50 adet kompozit çubuk (deney örneklemi) imal edilmesi b. Kompozit çubukların elastisite modülünün ve yoğunluğunun deneysel olarak ölçülmesi ve elde edilen belirsiz elastisite ve yoğunluk değerlerinin merkezi istatistiksel momentlerinin belirlenmesi c. Her bir örneklem için ilk üç doğal frekans ve bu doğal frekansları kapsayan titreşim cevap fonksiyonları deneysel olarak elde edilmesi	**Başarı Ölçütü: %20** Belirsiz bir sistem olarak seçilen kompozit çubukların farklı örneklemlerinin elastisite modülü ve yoğunluğu deneysel olarak belirlenecek ve bu parametrelerin merkezi istatistiksel momentlerini hesaplanacaktır. Ayrıca daha sonra bu çubukların doğal frekansları ve titreşim cevap fonksiyonları deneysel olarak elde edilecektir.
4	**Belirsiz titreşen yapıların cevapları için i-İMA ile yüksek dereceli momentlerin elde edilmesi ve doğrulama çalışması** **<u>İş paketi kapsamında yapılacak çalışmalar</u>** a. IP2'de elde edilen çubuğun diferansiyel denklemleri, İP3'te belirlenen belirsizlik girdileri ile birlikte Ayrık Tekil Konvolüsyon (ATK) Yöntemi ile çözülerek doğal frekans ve cevap parametrelerinin ilk dört merkezi istatistiksel momentleri elde edilmesi (bu yöntem i-İMA olarak tanımlanmıştır) b. Her bir belirsiz örneklem için ATK kullanılarak Monte Carlo (MC) simülasyonları gerçekleştirilmesi c. Deneysel, MC ve i-İMA sonuçları karşılaştırılarak, i-İMA yönteminin performansı başarım açısından ve hesaplama süresi açısından ortaya konulacaktır	**Başarı Ölçütü: %50** Bu iş paketinde IP3'te merkezi istatistiksel momentleri hesaplanan çubuklar için belirsizlik analizi i-İMA ve Monte Carlo simülasyonu ile gerçekleştirilecektir. Böylelikle yöntemin başarısı reel bir sistem ile karşılaştırılarak test edilmiş olacaktır.

Tablo 4. Normal ve düzgün dağılımın analitik standartlaştırılmış istatistiksel momentleri

	Normal Dağılım	Düzgün Dağılım
Ortalama	μ	$\frac{a+b}{2}$
Varyans	σ^2	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Çarpıklık	0	0
Basıklık	3	1.8

x ve *y* rassal değişkenlerinin birbirleri ile toplanması (*x+y*) ve çarpılması (*x.y*) durumlarındaki sonucun MİM'leri Bölüm 2.2'de verilen denklemler ile hesaplanmış ve sonuçlar Monte-Carlo simülasyonu (MCS) ile Tablo 5'te karşılaştırılmıştır. Bu çalışmalara ek olarak, 1/y ve $\sqrt{y}$ fonksiyonlarının MİM'leri de y'nin MİM'leri kullanılarak hesaplanarak sonuçlar Tablo 6'da sunulmuştur. MCS yapılırken her bir rassal değişken için 1000 örneklem üretilmiştir. Ayrıca örnekleme hatalarını azaltmak için örnekleme işlemi 50 defa tekrarlanmıştır. MCS sonuçları sunulurken 50 sonucun ortalaması alınmıştır. Bunun yanında, analitik olarak hesaplanan sonuç kullanılarak Pearson modeli ile olasılık yoğunluk fonksiyonu (OYF) elde edilmiştir ve MCS sonucu elde edilen OYF'ler ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 5. İki rassal değişkeninin farklı matematiksel operasyonları sonucundaki merkezi ve standartlaştırılmış istatistiksel momentleri

	z=x+y		z=x.y	
	İM analizi	**MCS**	**İM analizi**	**MCS**
Ortalama (μ_z)	15	15	50	50.0189
Varyans (σ_z^2)	2.7733	2.7591	179.2533	177.6171
3. derece MİM (σ_z^3)	0	-0.0385	576	563.724
Çarpıklık (s_z)	0	-0.0084	0.24	0.2381
4. derece MİM (σ_z^4)	20.9408	20.8351	98695.746	97381.096
Basıklık (k_z)	2.7726	2.7369	3.0716	3.0868

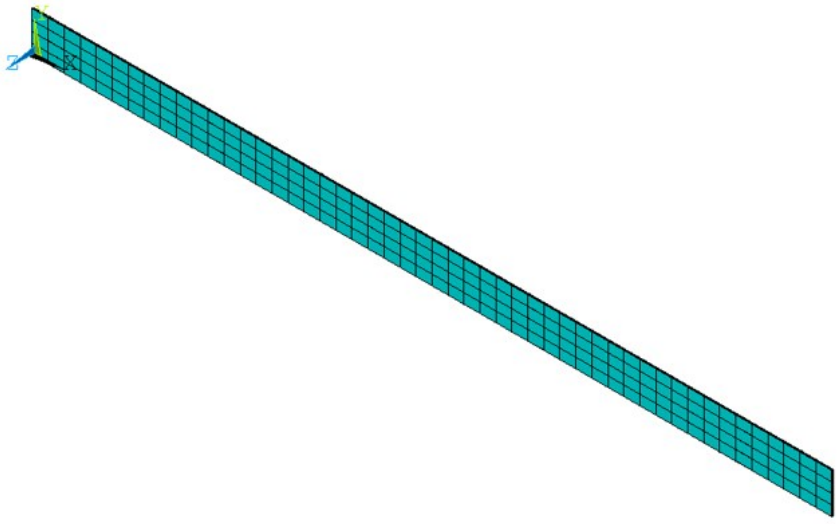
Tablo 6. y rassal değişkeni için 1/y ve $\sqrt{y}$ fonksiyonlarının merkezi ve standartlaştırılmış istatistiksel momentleri

	z=1/y		z=$\sqrt{y}$	
	İM analizi	**MCS**	**İM analizi**	**MCS**
Ortalama (μ_z)	0,1014	0,1014	3,1570	3,1563
Varyans (σ_z^2)	0,0001	0,0001	0,0336	0,0336
3. derece MİM (σ_z^3)	3,80E-07	4,76E-07	-4,14E-04	-4,29E-04
Çarpıklık (s_z)	0,2266	0,2811	-0,0674	-0,0696
4. derece MİM (σ_z^4)	2,83E-08	3,83E-08	1,99E-03	2,04E-03
Basıklık (k_z)	1,4244	1,8977	1,7634	1,8088

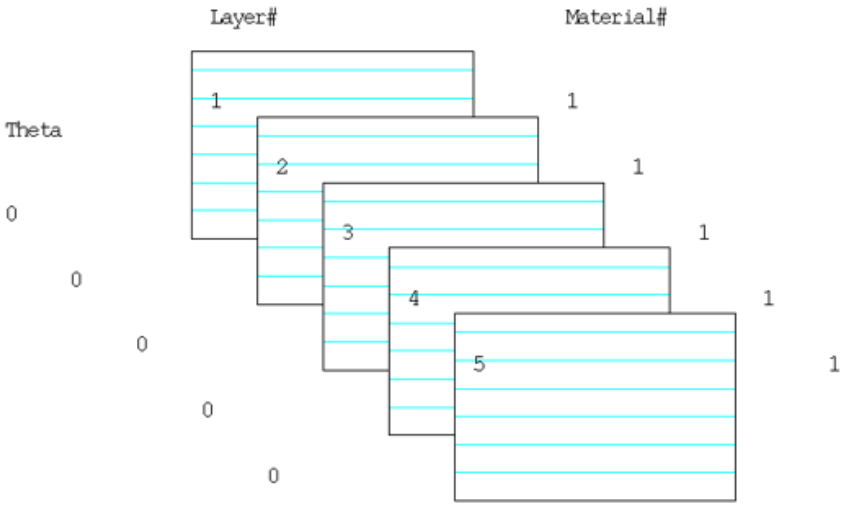
Tablo 5 ve 6'dan görüldüğü üzere elde edilen sonuçlar birbirleriyle oldukça uyumludur. Tablo 6'da görülen küçük sapmalar, MCS'deki örnekleme hataları ve Taylor serisindeki terim sayısı ile ilgiliyken, Tablo 5'teki sapmalar sadece MSC'deki örnekleme hatalarından kaynaklanmaktadır.

3.2. Katmanlı Kompozit Çubuk Sayısal Modelinin Doğrulanması

Bu bölümde Şekil 4'te Ansys modeli görülen 5 katmanlı ve tüm katmanları 0 yönünde (çubuğun uzunluğu yönünde) olan bir ankastre kompozit çubuk incelenmiştir. Tablo 7'de çubuğun mekanik ve fiziksel özellikleri verilmiştir. Sayısal analizde çubuğun doğal frekansları Ansys ve Bölüm 2.3'te verilen klasik ince çubuk teorisi kullanılarak ile belirlenmiştir ve sonuçlar Tablo 8'de karşılaştırılmıştır. Sonuçlar ince çubuk için kullanılan analitik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Analizlerde ilk 3 doğal frekans belirlenmiştir. Ansys ile modelleme çalışmalarında katmanlı kompozit çubuğu modellemek amacıyla Shell 181 elemanı kullanılmıştır.



a)



b)

Şekil 4. Kompozit çubuğun a) Ansys modeli ve b) katmanları

Tablo 7. Kompozit çubuğun mekanik ve fiziksel özellikleri

Mekanik/Fiziksel Özellik	**Değer**
x yönündeki elastisite modülü	40 MPa
y yönündeki elastisite modülü	1 MPa
Yoğunluk	1600 kg/m^3
Poisson oranı	0.161
Uzunluk	1 m
Genişlik	0.05 m
Kalınlık	0.002 m

Tablo 8. Kompozit çubuğun ilk 3 doğal frekansı (Hz)

Mod Sırası	**Analitik**	**ANSYS Shell 181 N=50x4**	**İnce Çubuk Teorisi N=20**
1	1,6154	1,6156	1,6154
2	10,1235	10,1332	10,1236
3	28,3462	28,0616	28,3467

Tablo 8'de görüldüğü doğal frekanslar birbirleriyle uyumludur. Ansys modelinde 3. doğal frekansın analitik doğal frekansa göre daha düşük hesaplanmasının sebebi Shell 181 elemanının kalın kabuk teorisini kullanması olabilir. Sonuçlar Bölüm 2.3'te belirtilen kabuller sağlandığında ince çubuk teorisinin güvenilir bir şekilde kullanılabileceğini göstermektedir. Bu sonuçlara dayanarak sonraki çalışmalarda sadece 0 yönünde katmanlara sahip kompozit

kirişlerin üretilmesi planlanmaktadır. Üretilecek olan kompozit çubuğun mekanik özellikleri belirlendikten sonra analizler deneysel sonuçlar ile karşılaştırılacaktır.

3.3. Kompozit Çubuk Örneklemlerinin Üretilmesi, Belirsiz Mekanik Özelliklerinin ve Belirsiz Doğal Frekansının Deneysel Olarak Belirlenmesi

İM analizinin deneysel olarak doğrulanabilmesi için tüm katmanları 0 yönünde (çubuk boyunca) olan 5 katmanlı, cam elyaf kompozit plaka, vakum infüzyon yöntemi ile üretilmiştir. Bu plakadan 100 adet kompozit çubuk kesilerek çıkarılmıştır. Bu 100 örneklemden 50 tanesi elastisite modüllerinin belirlenebilmesi amacıyla çekme testi için kullanılmıştır. Kalan 50 örneklemden ise kütle ölçümleri gerçekleştirilerek yoğunluğun belirsizliği elde edilmiştir. Kütle ölçümlerinde kullanılan örneklemler Şekil 5'te deneysel modal test düzeneği ile birlikte sunulmuştur. Elde edilen belirsizlik sonuçları Tablo 9'da sunulmuştur. Ayrıca çekme testindeki numunelerden bir tanesi için Poisson oranı ölçülerek 0.1883 olarak elde edilmiştir.



Şekil 5. Kompozit çubuk örneklemleri ve deneysel modal test düzeneği

Tablo 9'da sunulan veriler ayrık olduğundan bu verilerin MİM'leri şu şekilde hesaplanır:

$$\mu_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ , \tag{53}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \mu_x\right)^2 , \tag{54}$$

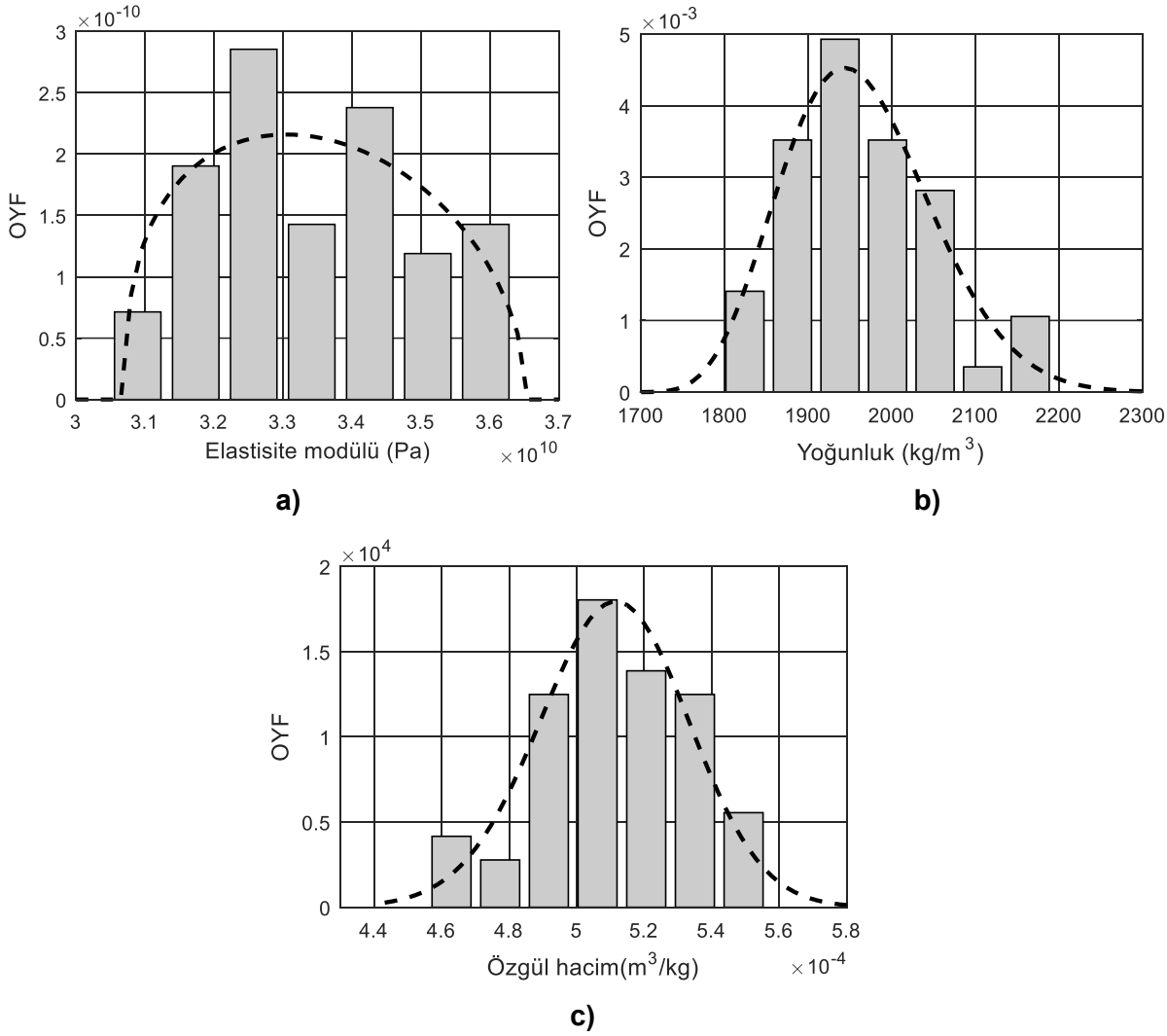
$$\sigma_x^3 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \mu_x\right)^3 , \tag{55}$$

$$\sigma_x^4 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \mu_x\right)^4 . \tag{56}$$

Tablo 9. Kompozit çubuk için ölçülen belirsiz Elastisite modülü ve yoğunluk

Örneklem	Elastisite Modülü (MPa)	Yoğunluk (kg/m3)	Örneklem	Elastisite Modülü (MPa)	Yoğunluk (kg/m3)	Örneklem	Elastisite Modülü (MPa)	Yoğunluk (kg/m3)
1	33364	2050,28	18	32690	1869,28	35	34633	1871,24
2	32096	1998,19	19	32091	1941,46	36	31635	2143,39
3	33139	1894,76	20	32150	1959,90	37	33510	2055,86
4	35289	1799,38	21	32356	1830,76	38	32629	2041,54
5	35322	2141,59	22	32276	1985,95	39	31698	1886,19
6	32618	1911,54	23	31015	1891,20	40	34565	1997,88
7	34952	1977,65	24	31876	1959,20	41	35786	1915,86
8	32782	2020,60	25	34496	1999,40	42	33892	1938,91
9	31790	1978,61	26	34595	1883,51	43	32871	1914,76
10	34591	1883,50	27	30473	1941,08	44	35774	1872,20
11	32621	1924,32	28	32723	2000,70	45	36358	1883,12
12	34000	1956,34	29	32251	1796,53	46	35855	1948,40
13	34900	2106,13	30	32176	2064,76	47	35607	1809,33
14	34408	1887,60	31	34390	2194,44	48	30986	2024,75
15	35662	2041,29	32	34700	2057,61	49	34080	1957,00
16	33409	1996,83	33	31728	1938,51	50	32205	2033,30
17	33771	1946,16	34	33687	2008,03			

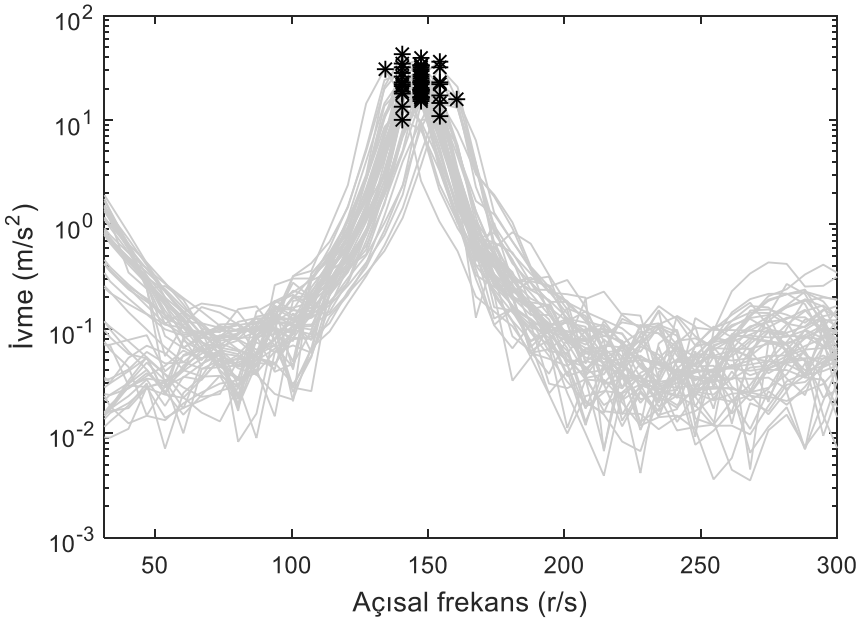
Yukarıdaki denklemler kullanılarak, elastisite modülünün ve yoğunluğun MİM'leri ($\left[\mu_x, \sigma_x^2, \sigma_x^3, \sigma_x^4\right]$) sırasıyla yaklaşık olarak $\left[3.3449e10, 2.1738e18, 3.17e26, 9.4202e36\right]$ ve $\left[1962.6, 7612.7, 238872.5, 173248689.9\right]$ olarak hesaplanmıştır. Elde edilen MİM'ler yardımıyla standartlaştırılmış İM'ler hesaplanmıştır ve Elastisite modülü ve yoğunluk için Pearson modeli ile dağılım uydurulmuştur. Ayrıca, ilerleyen bölümde modellemede kolaylık olması için yoğunluk değerinden ziyade yoğunluğun çarpmaya göre tersi (özgül hacim) değeri kullanılacaktır. Özgül hacim için de OYF'u elde edilmiştir. Elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonları (OYF) Şekil 6'da sunulmuştur.



Şekil 6. a) Elastisite modülünün, b) yoğunluğun ve c) özgül hacmin OYF'leri (gri: deneysel belirsiz verileri, siyah: Pearson modeli ile deneysel veriye uydurulan OYF)

Şekil 6'da görüldüğü üzere deneysel veriler ile Pearson modeli sonuçları birbirleriyle uyumludur.

Belirsiz mekanik özelliklerin belirlenmesinin ardından 50 adet kompozit çubuk örneklemi için deneysel olarak doğal frekanslar belirlenmiştir. Bu kapsamda, 160x40x0.9 mm boyutlarındaki ankastre çubukların belirli bir ilk deplasmandan serbest titreşimleri ölçülmüştür. Titreşim ölçümleri sırasındaki güç spektrumları elde edilmiştir. Deneylerde çubukların yalnızca ilk doğal frekansı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar Şekil 7'de sunulmuştur.



Şekil 7. Kompozit çubuğun deneysel ivme-frekans spektrumu (gri: deneysel cevaplar, siyah nokta: doğal frekans)

Elde edilen deneysel belirsiz doğal frekansların değerleri Tablo 10'da sunulmuştur.

Tablo 10. Kompozit çubuklar için ölçülen belirsiz doğal frekanslar (r/s)

Örneklem	Doğal frekans	Örneklem	Doğal frekans	Örneklem	Doğal frekans
1	160,85	18	140,74	35	147,45
2	147,45	19	140,74	36	147,45
3	140,74	20	147,45	37	140,74
4	140,74	21	140,74	38	134,04
5	147,45	22	147,45	39	140,74
6	147,45	23	147,45	40	147,45
7	147,45	24	147,45	41	154,15
8	147,45	25	147,45	42	147,45
9	147,45	26	147,45	43	147,45
10	147,45	27	147,45	44	154,15
11	140,74	28	154,15	45	140,74
12	154,15	29	154,15	46	147,45
13	140,74	30	140,74	47	154,15
14	147,45	31	147,45	48	147,45
15	147,45	32	147,45	49	147,45
16	154,15	33	147,45	50	140,74
17	147,45	34	147,45		

3.4. Belirsiz Kompozit Çubukların Sayısal Analizi ve Deneysel Sonuçlar ile Karşılaştırılması

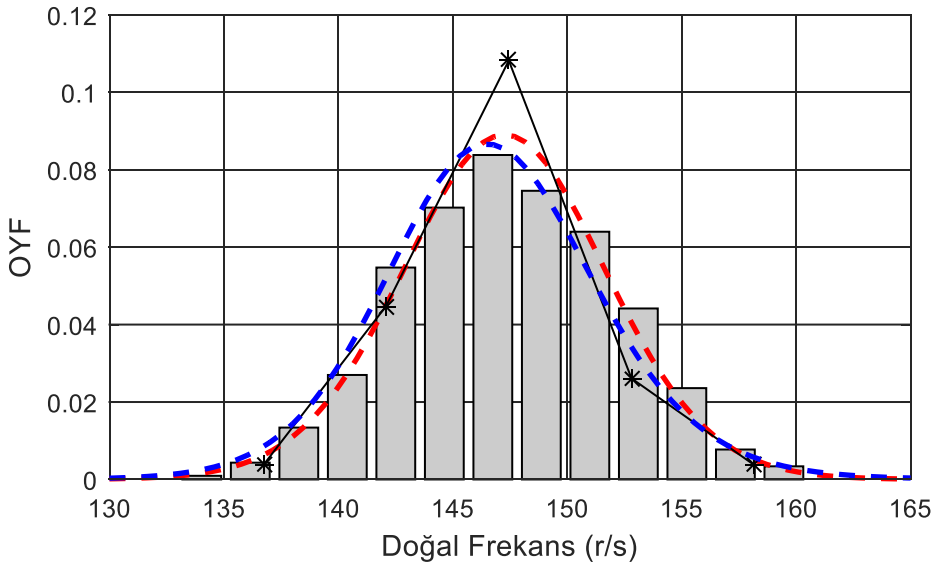
Bu bölümde, incelenen kompozit çubukların sayısal belirsizlik analizi

- İM analizi,
- Monte Carlo Simülasyonu (MCS),

ile gerçekleştirilmiştir. Bu kapsamda cevap parametresi olarak çubuğun birinci doğal frekansı incelenerek doğal frekanslarının MİM'leri ve dağılımı hesaplanmıştır. İM analizinde belirsiz kompozit çubuğun bir önceki bölümde elde edilen deneysel elastisite modülü ve yoğunluk değerlerinin MİM'leri Bölüm 2.4'te açıklanan yönteme beslenerek özdeğerlerin MİM'leri hesaplanmıştır. Ardından Bölüm 2.2.3'te bahsedilen Taylor serisi kullanımı ile doğal frekansların (r/s) MİM'leri ve daha sonra bu MİM'lerin Pearson modeli ile kullanılması ile doğal frekansların dağılımı hesaplanmıştır. MCS'de belirsiz parametrelerin tüm kombinasyonları (50 yoğunluk ve 50 elastisite modülü örneklemi sonucunda toplamda 2500 örneklem) için birinci doğal frekans incelenmiştir. Bunun yanında hesaplanan sonuçlar, deneysel olarak belirlenen birinci doğal frekans ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen MİM'ler Tablo 11'de, OYF'ler Şekil 8'de sunulmuştur.

Tablo 11. Birinci doğal frekansın hesaplanan MİM'leri

	ortalama	varyans	3. derece MİM	çarpıklık	4. derece MİM	basıklık
İM Analizi	147,2408	21,0827	-0,7866	-0,0081	1427,9304	3,2126
MCS	147,3848	21,1080	0,7005	0,0072	1204,9856	2,7045
Deney	146,7752	23,8064	18,0623	0,1555	2042,0095	3,6031



Şekil 8. Kompozit çubuğun belirsiz doğal frekanslarının OYF'u (gri: sayısal MCS, kırmızı: İM analizi ve Pearson modeli, siyah: deneysel MCS, mavi: deneysel MCS-Pearson modeli)

Analizlerden aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

i. Sayısal MCS ve İM analizi sonuçları birbirleriyle oldukça uyumludur.

ii. Deneysel sonuçlarda ortalama ve varyans değerleri başarılı bir şekilde hesaplanırken, 3. ve 4. derece MİM'lerde sapmalar mevcuttur. Bu durum, mekanik özelliklerdeki belirsizlik çiftinin (elastisite modülü ve yoğunluk) kesin olarak bilinememesinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

iii. deneysel sonuçlardan elde edilen MİM'lerin kullanılarak elde edilen OYF (Şekil 8 mavi eğri), İM analizi (Şekil 8 kırmızı eğri) ve sayısal MCS sonuçları (Şekil 8 gri eğri) ile oldukça uyumludur. Aradaki küçük sapmaların ihmal edilebilir seviyede olduğu düşünülmektedir.

iv. Analizlerde Intel(R) Core(TM) i5-3230M CPU @ 2.60GHz, 64 Bit Win10 işletim sistemine sahip bilgisayar kullanılmıştır. İM analizi sonuçları 0.012 saniyede elde edilirken, MCS yaklaşık olarak 3.2 saniye sürmüştür. Buna göre İM analizi ile yaklaşık olarak 260 kat daha hızlı bir şekilde analiz yapabilmiştir. Dolayısıyla önerilen yöntem hesaplama süreleri ve hassasiyet açısından oldukça başarılıdır. Daha karmaşık yapılar incelendiğinde çözüm süresindeki oranının artacağı düşünülmektedir.

v. Sonuçlar İM analizinin, matematik modelin elde edilebildiği, reel uygulamalarda karşılaşılan daha karmaşık yapılarda kullanılabileceğini göstermektedir. Bu yönüyle önerilen yöntem gelecek vadetmektedir.

4. SONUÇLAR

Proje kapsamında İş paketlerinde verilen ana çalışmalar başarılı bir şekilde tamamlanmıştır. Yapılan çalışmalar analitik geliştirmeler, sayısal modellemeler ve deneysel ölçümler olmak üzere üç yolla gerçekleştirilmiştir.

Proje önerisinde sunulan proje amaçları proje sonunda net bir şekilde tamamlanmıştır. Proje sonunda ortaya çıkan yöntem İstatistiksel Moment Analizi olarak isimlendirilmiştir. Bu yöntem, aşağıda belirtilen kapasitelere sahiptir:

1. Sayısal modeli herhangi bir yol ile elde edilen yapının belirsiz girdilerine karşılık sonucun merkezi istatistiksel momentlerini hesaplayabilme,
2. Belirsiz girdilere karşılık sonucun dağılımını hesaplayabilme.

Yöntemle ilgili olarak yapılan performans testleri sonuçları uluslararası bir makale formatında hazırlanmaktadır.

Proje sonucunda elde edilen teknik sonuçlar, ilgili bölümlerde detaylı bir şekilde ifade edilmiştir.

Sonuç olarak önerilen projede hedeflenen noktaya başarı ile ulaşılmış ve bundan sonraki araştırma ve uygulama çalışmalarını tetikleyecek nitelikli bilgi, uzman ekip ve yüksek bir motivasyon elde edilmiştir.

EK-1. Proje Sonuç Raporunun İş Paketlerindeki Hedeflerle İlişkisi

İP No	İş Paketlerinin Adı ve Hedefleri	Proje Sonuç Raporu Bölüm Numarası
1	**Farklı matematiksel operatörler (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi) için yüksek dereceli istatistiksel momentlerin analitik olarak elde edilmesi** **İş paketi kapsamında yapılacak çalışmalar**	Bölüm 2.2 ve Bölüm 3.1
	a. Bir belirsiz parametrenin yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentlerinin analitik ifadelerinin belirlenmesi	Bölüm 2.2.1
	b. Toplama ve çıkarma işlemleri için yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentlerin analitik ifadelerinin elde edilmesi	Bölüm 2.2.2-Bölüm 2.2.3
	c. Çarpma ve bölme işlemleri için yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentlerin analitik ifadelerinin elde edilmesi	Bölüm 2.2.2
	d. Farklı dağılım türlerinde belirsiz parametrelerin örneklenerek farklı matematiksel operasyonları durumundaki yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentlerinin sayısal olarak elde edilmesi	Bölüm 3.1
	d.1. Farklı dağılımlar için farklı merkezi istatistiksel momentlere sahip örneklemlerin türetilmesi	Bölüm 3.1
	d.2. Matematiksel operasyonlar sonucunda yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentlerin hesaplanması	Bölüm 3.1
2	**Belirsiz bir yapı olarak seçilen kompozit çubuğun stokastik diferansiyel denkleminin yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentleri için türetilmesi** **İş paketi kapsamında yapılacak çalışmalar**	Bölüm 2.3-2.4
	a. Yüksek dereceli merkezi istatistiksel momentler lamine kompozit çubuğun diferansiyel denklemlerine kapalı formda uygulanması	
3	**Belirsiz bir yapı olarak kompozit çubukların belirsizliklerinin deneysel olarak elde edilmesi** **İş paketi kapsamında yapılacak çalışmalar**	Bölüm 3.3
	a. Aynı laminasyon sayısında aynı oryantasyonda 50 adet kompozit çubuk (deney örneklemi) imal edilmesi	
	b. Kompozit çubukların elastisite modülünün ve yoğunluğunun deneysel olarak ölçülmesi ve elde edilen belirsiz elastisite ve yoğunluk değerlerinin merkezi istatistiksel momentlerinin belirlenmesi	
	c. Her bir örneklem için ilk üç doğal frekans ve bu doğal frekansları kapsayan titreşim cevap fonksiyonları deneysel olarak elde edilmesi	
4	**Belirsiz titreşen yapıların cevapları için İM Analizi ile yüksek dereceli momentlerin elde edilmesi ve doğrulama çalışması** **İş paketi kapsamında yapılacak çalışmalar**	Bölüm 2.1-Bölüm 3.4
	a. IP2'de elde edilen çubuğun diferansiyel denklemleri, İP3'te belirlenen belirsizlik girdileri ile birlikte Ayrık Tekil Konvolüsyon (ATK) Yöntemi ile çözülerek doğal frekans ve cevap parametrelerinin ilk dört merkezi istatistiksel momentleri elde edilmesi	Bölüm 3.4
	b. Her bir belirsiz örneklem için ATK kullanılarak Monte Carlo (MC) simülasyonları gerçekleştirilmesi	
	c. Deneysel, MC ve İM Analizi sonuçları karşılaştırılarak, İM Analizi yönteminin performansı başarım açısından ve hesaplama süresi açısından ortaya konulacaktır	