T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
EKONOMETRİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN PAYDASINDAKİ POLİNOMUN DERECESİ İLE ORTAYA ÇIKAN f(x) OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONUNUN BÜKÜM NOKTALARININ SAYISI İLE OLAN İLİŞKİSİNİN POLİNOM ÜZERİNDEN KURULMASI

Merve Gülnur BALLI

Danışman
Prof. Dr. Ali Kemal ŞEHİRLİOĞLU

İZMİR-2015

YÜKSEK LİSANS
TEZ/ PROJE ONAY SAYFASI

2009800197

Üniversite : Dokuz Eylül Üniversitesi

Enstitü : Sosyal Bilimler Enstitüsü

Adı ve Soyadı : Merve Gülnur Ballı

Tez Başlığı : Pearson Diferansiyel Denkleminin Paydasındaki Polinomun Derecesi İle Ortaya Çıkan f(x) Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunun Büküm Noktalarının Sayısı İle Olan İlişkisinin Polinom Üzerinden Kurulması

Savunma Tarihi : 21.01.2015

Danışmanı : Prof.Dr.A.Kemal ŞEHİRLİOĞLU

JÜRİ ÜYELERİ

Ünvanı, Adı, Soyadı	Üniversitesi	İmza
Prof.Dr.A.Kemal ŞEHİRLİOĞLU	DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ	.....
Prof.Dr.Cenk ÖZLER	DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ	.....
Doç.Dr.Güçkan YAPAR -	DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ	.....

Oybirliği (X)
Oy Çokluğu ( )

Merve Gülnur Ballı tarafından hazırlanmış ve sunulmuş "**Pearson Diferansiyel Denkleminin Paydasındaki Polinomun Derecesi İle Ortaya Çıkan f(x) Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunun Büküm Noktalarının Sayısı İle Olan İlişkisinin Polinom Üzerinden Kurulması**" başlıklı Tezi( ) / Projesi( ) kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Utku UTKULU
Enstitü Müdürü

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **" Pearson Diferansiyel Denkleminin Paydasındaki Polinomun Derecesi İle Ortaya Çıkan f(x) Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunun Büküm Noktalarının Sayısı İle Olan İlişkisinin Polinom Üzerinden Kurulması "** adlı çalışmanın, tarafımdan, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Tarih

..../..../.....

Merve Gülnur BALLI

İmza

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Pearson Diferansiyel Denkleminin Paydasındaki Polinomun Derecesi İle Ortaya Çıkan f(x) Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunun Büküm Noktalarının Sayısı İle Olan İlişkisinin Polinom Üzerinden Kurulması

Merve Gülnur BALLI

Dokuz Eylül Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü
Ekonometri Anabilim Dalı
Ekonometri Programı

İstatistikte elimizde bulunan veriler gruplandığında bir frekans dağılımı belirtir. Bu frekans dağılımı net bir eğri üzerinde çıkabilir, bu eğri matematiksel bir eğri olarak gösterilir ise frekans dağılımı kolayca tespit edilebilir. Bu frekans dağılımını veren eğriler için en yaygın olarak kullanılan on iki farklı eğri tipine sahip olan Pearson Tip eğrilerdir.

Bu çalışmada Pearson Diferansiyel denklemini sağlayan Pearson Tip eğrilerinin ilişkili olduğu ortogonal polinomlar ve bu ortogonal polinomların özellikleri incelenmiştir. Pearson Diferansiyel denklemini sağlayan fonksiyon uygun aralıklar üzerinde ortogonal polinom sistemleri için ağırlık fonksiyonu olarak özel önem taşır. Pearson Tip eğrileri ve polinomlar arasındaki ilişki ifade edilerek, eğrinin büküm noktalarının sayısı ile olan ilişkisi polinom üzerinden kurulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Büküm Noktaları, Ortogonal Polinom, Pearson Diferansiyel Denklemi

ABSTRACT

Master's Thesis

Enabling The Relationship Between The Polynomial Degree Of The Denaminator Of Pearson Differantial Equation And The Number Of İnflextion Points Of Density Function Which Appears Through That Degree By Polinom

Merve Gülnur BALLI

Dokuz Eylül University
Graduate School of Social Sciences
Department of Econometrics
Econometrics Program

İn statistics, the datas on our hands indicate a frequency distribution when they are grouped. This frequency distribution can exist on a certain curve. İf this curve is showed as a mathematical curve, the frequency distribution can easily fixed. The most widespread type of curve giving this frequency distribution is Pearson type curves with different twelve types.

İn this work, orthogonal polynomials associated with Pearson Type curves satisfying Pearson differantial equation as a weight function carry a special weight with orthogonal polynomial systems on suitable intervals.By expressing relation between Pearson Type curves and polynomials, the relation with number of the inflextion point of curves is constituted on the polynomial.

Keywords: İnflextion Points, Orthogonal Polynomial, Pearson Differantial Equation

PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN PAYDASINDAKİ POLİNOMUN DERECESİ İLE ORTAYA ÇIKAN f(x) OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONUNUN BÜKÜM NOKTALARININ SAYISI İLE OLAN İLİŞKİSİNİN POLİNOM ÜZERİNDEN KURULMASI

İÇİNDEKİLER

YEMİN METNİ iii

ÖZET iv

ABSTRACT iv

İÇİNDEKİLER vi

TABLO LİSTESİ viii

ŞEKİLLER LİSTESİ ix

EKLER LİSTESİ x

GİRİŞ 1

BİRİNCİ BÖLÜM
PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ

1.1. PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ VE MOMENTLER METODU 3

1.2. PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ VE ORTOGONAL POLİNOMLAR İLE İLİŞKİSİ 7

1.2.1. Hermite Polinomu 8

1.2.2. Laguerre Polinomu 17

1.2.3. Jacobi Polinomu 27

İKİNCİ BÖLÜM
PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ VE İLİŞKİLİ POLİNOMLAR

2.1. PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİNİ SAĞLAYAN EĞRİLER VE İLİŞKİLİ POLİNOMLAR 49

2.2. PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN POLİNOMSAL İFADESİ 59

2.3. $P_n(k,x)$ VE D NİN ORTAK KÖKLERİNE İLİŞKİN TEOREMLER 76

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
JACOBİ POLİNOMUNU SAĞLAYAN $P_n(k,x)$ LERİN KÖKLERİYLE OLAN İLİŞKİSİNİN KURULMASI

3.1. $P_n(k,x)$ İN KÖKLERİYLE OLAN İLİŞKİSİ 89

3.2. PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİNİ SAĞLAYAN $P_n(k,x)$ İN BÜKÜM NOKTALARININ SAYISI VE POLİNOMUN DERECESİYLE OLAN İLİŞKİSİ 119

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
PEARSON TİP I EĞRİSİ VE JACOBİ POLİNOMU ÜZERİNE BİR UYGULAMA

4.1 . UYGULAMANIN TANITILMASI 135

4.2 . UYGULAMA 139

SONUÇ 145

KAYNAKÇA 147

EKLER

TABLO LİSTESİ

Tablo 1: Pearson Tip, Denklem Ve Pearson Diferansiyel Denklemi s. 53

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1: $\alpha_{1,k,1}$ in konumu s. 106

Şekil 2: $\alpha_{1,k,1}$ e göre $\alpha_{2,k,i}$ lerin konumu s. 106

Şekil 3: $\alpha_{q+1,k,i}$ lerin $\alpha_{q,k,i}$ lere göre konumları s.109

Şekil 4: $\alpha_{q+1,k,1}$ in $\alpha_{q,k,1}$ e göre konumu s. 110

Şekil 5: $P_{q+1}(k,0)$ ın $\alpha_{q+1,k,q+1}$ in konumu s. 111

Şekil 6: $\alpha_{q+1,k,i}$ lerin konumu s. 112

Şekil 7: $\alpha_{q+2,k,i}$ lerin $\alpha_{q+1,k,i}$ lere göre konumu s. 113

Şekil 8: $P_{q+2,k,q+1}$ nin $\alpha_{q+1,k,q+1}$ deki konumu s. 117

Şekil 9: $\alpha_{q+2,k,q}$ nun konumu s. 117

Şekil 10: $\alpha_{q+2,k,i}$ lerin konumu s. 118

EKLER LİSTESİ

EK 1 : Bir Çarpımın n. Mertebeden Türevi İçin Leibnitz Formülü ek s.1

EK 2 : L'Hospital Kuralı ,Laguerre Polinomu ek s.11

EK 3: Gama Fonksiyonu ek s.13

EK 4: Hermite Polinomunun Rekürans Bağıntısı ek s.13

EK 5: Beta Fonksiyonu ek s.16

GİRİŞ

İstatistikte elimizde bulunan verilerin frekans dağılımı net bir eğri üzerinde çıkabilir, bu eğri matematiksel bir eğri olarak gösterilirse bu frekans dağılımı kolayca tespit edilebilir. Bu frekans dağılımını veren eğriler için en yaygın olarak kullanılan 12 farklı eğri tipine sahip olan *Pearson Tipi* eğrilerdir, bu eğrilerin denklemlerden nasıl elde edildiği ve eğrilerin diferansiyel denklemleri göz önünde bulundurularak incelendi(Hildebrant,1931 : 393).

12 farklı eğri içerisinde Jacobi polinomlarını içeren *Tip I* ve *Tip I* eğrisinin özel bir olayı olan *Tip II;* Hermite polinomlarının kullanımını gerektiren hatanın normal eğrisi olarak adlandırılan *Tip VII*, Laguerre polinomlarını içeren *Tip III* ile ilişkili olduğu görülür(Hildebrant,1931:396).

Karl Pearson tarafından Pearson diferansiyel denklemi; $a_{0,}$ a_1, $b_{0,}$ b_1, b_2 sabitler olmak üzere;

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

ifade edilmiştir(Jackson, 1941 : 142).

Pearson diferansiyel denklemi payı birinci dereceden ve paydası ikinci dereceden bir polinomdur. $y = f(x)$ fonksiyonunun istatistiksel ifadesi Pearson diferansiyel denklemini sağlayan teorik olasılık yoğunluk fonksiyonudur.Bu fonksiyon uygun aralıklar üzerinde ortogonal polinom sistemleri için ağırlık fonksiyonu olarak özel önem taşır (Jackson, 1941 : 147).

Pearson diferansiyel denklemini sağlayan olasılık yoğunluk fonksiyonunun ortogonal polinomlar ile ilişkisi ve bu ortogonal polinomların çeşitli özellikleri bu çalışmada incelenmeye çalışıldı. Pearson diferansiyel denklemindeki sabitler, gözlenmiş verilerden elde edilen ilk dört moment $\mu_{0,}$ $\mu_{1,}$ $\mu_{2,}$ μ_3 bilinmesi halinde $a_{0,}$ $b_{0,}$ b_1, b_2 değerleri *Momentler Metodu* yardımı ile bulunur ve ilk dört momentin bilinmesi ile yer ölçüsü olan aritmetik ortalama, değişim ölçüsü olan varyans, şekil parametreleri olan basıklık ve çarpıklık değerleri bulunur. $a_{0,}$ $b_{0,}$ b_1, b_2 sabitlerinin bilinmesi halinde, Pearson diferansiyel denkleminin paydasındaki polinomun kök-

lerinin durumuna göre dağılış tipleri elde edilir.

Ortogonal polinomların özel türleri olan Hermitte, Jacobi ve Laguerre polinomları için n polinomun derecesini göstermek üzere ve k herhangi bir reel sayı olmak üzere Hermite polinomu için $k = 0$ durumunda $P_n(x)$, Jacobi ve Laguerre polinomları için $P_n(k, x)$ genel ifadeleri altında elde edilen rekürans bağıntılarına göre incelendi. Pearson diferansiyel denkleminin paydasının ve $P_n(k, x)$ lerin ortak kökleriyle olan ilişkisi, bu özel polinomların kökleriyle olan ilişkisi ve elde edilen rekürans bağıntılarından bu özel polinomların derecesi ve Pearson diferansiyel denkleminin paydasındaki polinomun derecesi ile ortaya çıkan olasılık yoğunluk fonksiyonunun büküm noktalarıyla olan ilişkisinin polinom üzerinden kurulması incelenmeye çalışıldı.

BİRİNCİ BÖLÜM
PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ

1.1.PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ VE MOMENTLER METODU

Pearson diferansiyel denklemi Karl Pearson tarafından

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \tag{1.1}$$

şeklinde ifade edilmiştir.

$a_0 = a$, $a_1 = 1$ için Pearson diferansiyel denklemi;

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

dir.

Teorik yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olmak üzere;

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{(x + a)f(x)}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

dir.

Pearson diferansiyel denklemi $\frac{df(x)}{dx} = 0$ olması durumu $x = -a$ iken gerçekleşir ve $f(x)$ fonksiyonuna tek modludur denir, $f(x)$ fonksiyon 0'a eşit olması durumundadır ve x şans değişkeninin sınır noktalarında fonksiyon ve x ekseni arasında düz bir temas olması istenir, bu durumda $f(x) = 0$ olması durumu ihmal edilir. Pearson diferansiyel denkleminin genel çözümü elde edilirken gözlenmiş verilerden elde edilen ilk dört momentin bilinmesi halinde a, b_0, b_1, b_2 momentler cinsinden ifade edilir ve Pearson diferansiyel denklemi çözülür. Pearson diferansiyel denklemine *Momentler Metodu* yöntemi kullanılarak sabitler ifade edildi . Parametre değerleri ile belirli bir tipi ilişkilendirmek için diferansiyel denklemin parametrelerini ilgili tipin parametrelerine göre ifade etmek gereklidir,. Pearson bunu gerçekleştirmek için *Momentler Metodunu* kullanmıştır.

$(b_0+b_1x+b_2x^2)\frac{dy}{dx} = (x-a)y$ şeklindeki diferansiyel denkleminin x şans değişkenin sınırları r ve s olmak üzere momentler metodu uygulanır, denklemin her iki tarafı x^n ile çarpılır,Pearson diferansiyel denkleminin integrali alınır(Dündar,2012:3).

Eşitliğin sol tarafı $\int_r^s x^n(b_0+b_1x+b_2x^2)\frac{dy}{dx}$ ve sağ tarafı $\int_r^s x^n(x-a)f(x)dx$ ifadelerinin integrallenmesi ile eşitliğin sağ tarafı $\int_r^s x^n(x-a)f(x)dx = \mu_{n+1}^{'} - a\mu_n^{'}$ ve sol tarafı ise $-nb_0\mu_{n-1}^{'} - (n+1)b_1\mu_n^{'} - (n+2)\mu_{n+1}^{'}$ elde edilir.

Eşitliğin iki tarafından elde edilen değerler yazıldığında

$$-nb_0\mu_{n-1}^{'} - (n+1)b_1\mu_n^{'} - (n+2)b_2\mu_{n+1}^{'} = \mu_{n+1}^{'} - a\mu_n^{'} \tag{1.2}$$

olduğu görülür.$n = 0, 1, 2, 3$ için yukarıdaki elde edilen denklemden ilk dört momentin var olduğu kabulü ile (1.2) denkleminden aşağıdaki değerler elde edilir;

Bu denklem sisteminde $a, b_{0,}b_1, b_2$'yi elde etmek için lineer doğrusal denklem sistemlerinin matrisler ile çözümü uygulanır. Bu kurala göre $a, b_{0,}b_1, b_2$;

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{20\mu_1^{'2}\mu_2^{'}\mu_3^{'} + 13\mu_1^{'}\mu_2^{'}\mu_4^{'} - 12\mu_1^{'3}\mu_4^{'} - 9\mu_1^{'}\mu_2^{'3} - 8\mu_1^{'}\mu_3^{'2} - 3\mu_2^{'2}\mu_3^{'} - \mu_3^{'}\mu_4^{'}}{18\mu_2^{'3} - 6\mu_1^{'2}\mu_2^{'2} - 10\mu_2^{'}\mu_4^{'} - 32\mu_1^{'}\mu_2^{'}\mu_3^{'} + 10\mu_2^{'2}\mu_4^{'} + 8\mu_1^{'3}\mu_3^{'} + 12\mu_3^{'2}};\\
b_0 &= -\frac{4\mu_2^{'2}\mu_4^{'} - 3\mu_2^{'}\mu_3^{'2} - \mu_1^{'}\mu_3^{'}\mu_4^{'} - 3\mu_1^{'2}\mu_2^{'}\mu_4^{'} + 4\mu_1^{'2}\mu_3^{'2} - \mu_1^{'}\mu_2^{'2}\mu_3^{'}}{18\mu_2^{'3} - 6\mu_1^{'2}\mu_2^{'2} - 10\mu_2^{'}\mu_4^{'} - 32\mu_1^{'}\mu_2^{'}\mu_3^{'} + 10\mu_2^{'2}\mu_4^{'} + 8\mu_1^{'3}\mu_3^{'} + 12\mu_3^{'2}};\\
b_1 &= -\frac{(8\mu_1^{'2}\mu_2^{'}\mu_3^{'} + 7\mu_1^{'}\mu_2^{'}\mu_4^{'} - 6\mu_1^{'3}\mu_4^{'} - 3\mu_1^{'}\mu_2^{'3} - 2\mu_1^{'}\mu_3^{'2} - 3\mu_2^{'2}\mu_3^{'} - \mu_3^{'}\mu_4^{'})}{18\mu_2^{'3} - 6\mu_1^{'2}\mu_2^{'2} - 10\mu_2^{'}\mu_4^{'} - 32\mu_1^{'}\mu_2^{'}\mu_3^{'} + 10\mu_2^{'2}\mu_4^{'} + 8\mu_1^{'3}\mu_3^{'} + 12\mu_3^{'2}};\\
b_2 &= -\frac{3\mu_3^{'2} + 6\mu_2^{'3} + 4\mu_1^{'3}\mu_3^{'} + 2\mu_1^{'2}\mu_4^{'} - 3\mu_1^{'2}\mu_2^{'2} - 10\mu_1^{'}\mu_2^{'}\mu_3^{'} - 2\mu_2^{'}\mu_4^{'}}{18\mu_2^{'3} - 6\mu_1^{'2}\mu_2^{'2} - 10\mu_2^{'}\mu_4^{'} - 32\mu_1^{'}\mu_2^{'}\mu_3^{'} + 10\mu_2^{'2}\mu_4^{'} + 8\mu_1^{'3}\mu_3^{'} + 12\mu_3^{'2}}
\end{aligned}$$

Pearson dağılış sistemindeki dağılış tiplerini diferansiyel denklemin paydasındaki fonksiyonun köklerine göre tanımlamıştır. Fonksiyonun iki köke sahip olduğu durumlar ana tipleri tanımlamaktadır;

· Kökler reel ve farklı işaretli ise *Tip I*

· Kökler reel ve aynı işaretli iseler *Tip VI*

· Kökler karmaşık ise *Tip IV* (Dündar, 2012 : 7).

Geriye kalan dağılış tiplerini Pearson geçiş tipleri olarak ifade etmiştir,

Pearson dağılımının belirlenmesinde gözlenmiş verilerden elde edilen ilk dört momentin bilgisi altında belirlenmesi gerekli olan diferansiyel denklem parametrelerinin sayısı ve Pearson diferansiyel denkleminin paydasındaki polinomun köklerinin aldığı değerlere göre dağılış tipleri

$$
\begin{aligned}
b_0 &\neq 0, b_1 = 0, b_2 = 0 \rightarrow \textit{Normal dağılım,} \\
b_0 &\neq 0, b_1 \neq 0, b_2 = 0 \rightarrow \textit{Tip } III,\ X \\
b_0 &\neq 0, b_1 = 0, b_2 \neq 0 \rightarrow \textit{Tip } II,\ VII, \\
b_0 &\neq 0, b_1 \neq 0, b_2 \neq 0 \rightarrow \textit{Tip } I,\ IV,\ V,\ VI,\ VIII,\ IX,\ XI,\ XII.
\end{aligned}
$$

şeklindedir (Dündar, 2012 : 11).

Paydada karesel bir fonksiyonunun yer aldığı $b_2 \neq 0$ için genel çözüm,

$$
\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} &= \frac{(x-a)f(x)}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \\
&= \frac{(x-a)f(x)}{b_2(\frac{b_0}{b_2} + \frac{b_1}{b_2}x + x^2)} \\
&= \frac{(x-a)f(x)}{b_2(x-r_1)(x-r_2)}
\end{aligned}
$$

dir.

Köklerin parametreler cinsinden ifadeleri;

$$
\begin{aligned}
r_{1,2} &= -\frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_2} \\
\frac{df(x)}{dx} &= \frac{(x-a)f(x)}{b_2(x-r_1)(x-r_2)} \\
f(x) &= y \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{(x-a)y}{b_2(x-r_1)(x-r_2)} \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{(x-a)}{b_2(x-r_1)(x-r_2)} \\
\int d\ln y &= \int \frac{(x-a)}{b_2(x-r_1)(x-r_2)}dx \\
&= \frac{1}{b_2}\int \frac{(x-b_1)}{(x-r_1)(x-r_2)}dx
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\ln y &= \frac{1}{b_2}\int \left[\frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_2)}\right]dx \\
&= \frac{1}{b_2}\int \left[\frac{A_1\,(x-r_2) + A_2(x-r_1)}{(x-r_1)\,(x-r_2)}\right]dx \\
&= \frac{1}{b_2}\int \left[\frac{(x-b_1)}{(x-r_1)\,(x-r_2)}\right]dx
\end{aligned}
$$

dir.

$A_1 = \frac{r_1-b_1}{r_1-r_2}$, $A_2 = \frac{b_1-r_2}{r_1-r_2}$. Burada $x > r_1 \rightarrow |x-r_1| = x-r_1; x < r_2 \rightarrow |x-r_2| = r_2 - x$ olup A_1, A_2 ve b_2 değerleri yerine yazılarak

$$
\begin{aligned}
y &= K(x-r_1)^{\frac{A_1}{b_2}}(x-r_2)^{\frac{A_2}{b_2}} \\
m_1 &= \frac{A_1}{b_2} \\
m_2 &= \frac{A_2}{b_2} \\
y &= K(x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_2}
\end{aligned}
$$

bulunur (Dündar, 2012 : 13).Köklerin reel kök, kompleks kök olması ya da kök-

lerin aynı veya farklı işaretli olması durumlarına göre çözümler elde edilir.

1.2. PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ VE ORTOGONAL POLİNOMLAR İLE İLİŞKİSİ

$u = (u_{1,}u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$; R^3'te iki vektör olsun. İki vektörün skalar çarpımı, vektörlerin herbirinin büyüklüğüne bağlı olduğu gibi, vektörler arasındaki θ açısının değerine de bağlıdır. Örneğin

$$u.v = \langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i.v_i = |u|\,|v| \cos\theta$$

$\theta = 0^\circ$ durumunda çarpımın değeri maksimum ve $\theta = 90^\circ$ olduğunda çarpım sıfır olur (Aydın ve diğerleri, 2005 : 418).

Vektörlerin birbirlerine dik olmaları fonksiyonlar içinde geçerlidir. Herhangi bir $a \leq x \leq b$ aralığında tarif edilmiş sonsuz sayıda sürekli fonksiyondan oluşan $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, ...$ ailesinden alınan herhangi iki fonksiyon, $[a, b]$ aralığında bir $r(x)$ fonksiyonuna göre ortogonal ise;

$$\begin{aligned} \langle \varphi_m(x)\varphi_n(x)\rangle &= \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)r(x)dx = 0; \quad m \neq n \\ &= \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_n(x)r(x)dx = 1 \end{aligned}$$

dir.

$\{\varphi_n(x)\}, n = 1, 2, 3, ...$ ailesine $a \leq x \leq b$ aralığında $r(x)$ fonksiyonuna göre bir ortogonal set adı verilir. $\{\varphi_n(x)\}, n = 1, 2, 3, ...$ fonksiyonlarının herbiri, bir $a \leq x \leq b$ aralığında $r(x)$ fonksiyonuna göre normalize olmuş ortogonal fonksiyonlar ise $\{\varphi_n(x)\}$ ailesine ortonormal set denir(Aydın ve diğerleri, 2005 : 418).

Pearson diferansiyel denklemini sağlayan Hermite, Jacobi ve Laguerre polinomları ortogonallik şartlarını sağlar,bu polinomların rekürans bağıntıları, ortonormal fonksiyonlar cinsinden seriye açılımı, diferansiyel denklemlerle olan ilişkisi alt başlıklarda incelenecektir.

1.2.1. Hermite Polinomu

Hermite polinomu; $(-\infty, \infty)$ aralığı üzerinde ortogonaldir, ağırlık fonksiyonu $\rho(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 'dir. Pearson diferansiyel denkleminde teorik olasılık yoğunluk fonksiyonunu sağlayan ağırlık fonksiyonu $\rho(x)$'in $n.$ dereceden türevi $\phi^{(n)}(x)$ olarak ifade edilir. $n.$ dereceden Hermite polinomunun gösterimi;

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n \phi(x)}{dx^n}$$

şeklindedir.

Hermite polinomunun ağırlık fonksiyonu olan $e^{-\frac{x^2}{2}}$'nin ardışık türevleri;

$$\begin{aligned} \phi^{'}(x) &= -x.e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ \phi^{''}(x) &= (x^2-1).e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ \phi^{'''}(x) &= (-x^3+3x).e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

bulunur.

n . dereceden türev; $\phi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x).e^{-\frac{x^2}{2}}$ ifadesidir. Elde edilen ardışık türevlerin bilgisi altında $n.$ dereceden bir Hermite polinomunun $n.$dereceden türevi alınmış olan ağırlık fonksiyonu ile olan gösterimi; $H_n(x) = (-1)^n.e^{\frac{x^2}{2}}.\frac{d^n\phi(x)}{dx^n}$ şeklindedir veya bu ifade

$$\phi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x).e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1.3}$$

şeklinde de gösterilebilir. (1.3) ifadesinin tekrar türevinin alınması ile

$$\phi^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}[x.H_n(x) - H_n^{'}(x)]e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1.4}$$

denklemi elde edilir (Jackson, 1941 : 176).

(1.4) denkleminde $x.H_n(x) - H_n^{'}(x)$ ifadesi $(n+1).$ dereceden bir polinomdur. $x.H_n(x) - H_n^{'}(x)$ ile yeniden ifade edilerek, $n.$ dereceden Hermite polinomunun türevinin alınması ile

$$H_n^{'}(x) = (-1)^n(x.e^{\frac{x^2}{2}}\phi^{(n)}(x) + e^{\frac{x^2}{2}}\phi^{(n+1)}(x))$$

elde edilir ve bu elde edilen türev $H_{n+1}(x) = x.H_n(x) - H_n^{'}(x)$ ifadesinde yerine koyulması ile

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= x.H_n(x) - H_n^{'}(x) \\ &= x.(-1)^n.\phi^{(n)}(x) - \left[(-1)^n\left[x.e^{\frac{x^2}{2}}\phi^{(n)}(x) + e^{\frac{x^2}{2}}\phi^{(n+1)}(x)\right]\right] \end{aligned}$$

$$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}e^{\frac{x^2}{2}}\phi^{(n+1)}(x) \tag{1.5}$$

elde edilir.

Hermite polinomları için $(-\infty, \infty)$ aralığında

$\cdot$ $m \leq n$ için

$\cdot\cdot$ $m < n$ durumu ortogonallik ,

$\cdots$ $m = n$ durumu polinomların normalize olma durumunu ifade eder. Hermite polinomunun ortonormal olma durumu

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x).H_n(x).\phi(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x).(-1)^n.e^{\frac{x^2}{2}}\phi^{(n)}(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= (-1)^n.\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x).\phi^{(n)}(x)dx \end{aligned}$$

integrali ile incelenir. $m.$ dereceden bir Hermite polinomunun $n.$ dereceden ağırlık fonksiyonu olan çarpımının integrali kısmi integrasyon ile

$$I = (-1)^n.(H_m(x).\phi^{n-1}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{n-1}(x).H_m^{'}(x)dx)$$

şeklinde bulunur.

I eşitliğinin tekrar integralinin alınması ile

$$I = (-1)^{n+2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{n-2}(x).H_m^{''}(x)dx)$$

elde edilir ve $m.$ dereceden integral alınması ile

$$I = (-1)^{n+m} \int_{-\infty}^{\infty} H_m^m(x).\phi^{(n-m)}(x)dx$$

bulunur (Jackson, 1941 : 177).

$n - m > 0$ ise birden fazla kısmi integrasyon uygulanır. $H_m(x)$; $m.$ Dereceden bir polinom olması sebebiyle $H_m^m(x)$ bir sabittir dolayısıyla $H_m^{m+1}(x) = 0$' dır. $H_m^m(x)$ ile $\phi^{n-m}(x)$'in basit integrasyonu uygulanır ve ifade

$$\begin{aligned} I &= (-1)^{n+m}. \int_{-\infty}^{\infty} c.\phi^{n-m}(x)dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

sonucu ile Hermite polinom ailesinden alınan birbirinden farklı herhangi iki polinomun ortogonallik şartı sağladığı görülür. Diğer bir ifadeyle $(n-m) > 0$ durumu için $H_m(x)$ ve $H_n(x)$ Pearson diferansiyel denklemini sağlayan ağırlık fonksıyonu $\rho(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 'e göre $(-\infty, \infty)$ aralığında diktir (Jackson, 1941 : 177).

Hermite polinomlarının her birinin normunun 1'e eşit olması için polinomun normalize çarpanı bulunur. $m = n$ durumu normalize edilmiş durumu

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x).H_n(x).e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x).(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\phi^{(n)}(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n.H_n(x).\phi^{(n)}(x)dx \end{aligned}$$

şeklindedir.

Kısmi integrasyon ile;

$$\begin{aligned} I &= (-1)^n \left[H_n(x)\phi^{(n-1)}(x) \mid_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(n-1)}(x).H_n^{'}(x)dx \right] \\ &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(n-1)}(x).H_n^{'}(x)dx \end{aligned}$$

n defa ardışık integralin alınması ile

$$\begin{aligned} I &= (-1)^{n+n} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(n-n)}(x).H_n^n(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x).H_n^n(x)dx \end{aligned}$$

bulunur.

$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \phi^n(x)$, $\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $H_n^n(x) = sabit$ ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x).H_n^n(x)dx \\ &= n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= n!\sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

elde edilen normalize çarpanıdır. Normalize edilmiş Hermite polinomları $h_n = \frac{H_n}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}}$ ile gösterilir (Jackson, 1941 : 178). Hermite polinomları ortonormal bır fonksiyon ailesidir .

Her biri $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli olan $\varphi_n(x)$ ortonormal fonksiyonlar ailesini göz önüne alınsın. Bir ortonormal fonksiyona birim fonksiyon gözü ile bakılabildiğinden, herhangi bir $a \leq x \leq b$ aralığıda sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu;

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x); (n = 1, 2, 3, ...)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada c_n katsayıları $n = 1, 2, 3...$ bulunması gereken

sayılardır. k herhangi bir sayı olmak üzere eşitliğin her iki tarafı $\varphi_k(x)$ ortonormal fonksiyonu ile çarpılarak $f(x).\varphi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n.}\varphi_n(x)\varphi_k(x)$ olur ve fonksiyonun aralığı üzerinde integrali

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x).\varphi_k(x)dx &= \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x).\varphi_k(x)dx\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b c_n\varphi_n(x).\varphi_k(x)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n\int_a^b \varphi_n(x).\varphi_k(x)dx\end{aligned}$$

dir. Bu ifadenin bilgisi altında $n = k$ durumu için

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x).\varphi_k(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n\int_a^b \varphi_n(x).\varphi_k(x)dx \\ \int_a^b f(x).\varphi_k(x)dx &= c_1.\int_a^b \varphi_1(x).\varphi_k(x)dx + ... + c_k\int_a^b \varphi_k(x).\varphi_k(x)dx + ... \\ &= 0 + 0 + ... + c_k.1 + ... + 0 + ...\end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x).\varphi_k(x)dx = c_k \qquad n = 1, 2, 3, ..., k, ... \tag{1.6}$$

(1.6) formulünün aracılığı ile katsayılar elde edilir (Aydın ve diğerleri, 2005 : 428).

Hermite polinomunun normalize edilmiş ifadesi $h_k(x) = \frac{1}{\sqrt{k!\sqrt{2\pi}}}H_k(x)$ ve ağırlık fonksiyonu $\rho(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ dir. Hermite polinomlarının seri açılımlarındaki katsayılar;

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x).\frac{H_k(x)}{\sqrt{k!\sqrt{2\pi}}}.e^{-\frac{x^2}{2}}dx \tag{1.7}$$

şeklinde bulunur (Jackson, 1941 : 178).

Yukarıda gösterildiği gibi (1.6) formülünün bilgisi altında Hermite polinomları için uygulanmasıyla katsayılar (1.7) formulü ile elde edilir. Bu serilere Gram-Charlier Serileri adı verilir (Jackson, 1941 : 179).

Hermite polinomları için rekürans bağıntıları; ağırlık fonksiyonunun türevi ile Hermite polinomları arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibi elde edilir. Hermite polinomunun ağırlık fonksiyonunun birinci türevi ile kendisinin x ile çarpımının toplamı (1.8) denklemini verir.

$\rho(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \phi^{'}(x) = -x.e^{-\frac{x^2}{2}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi^{'}(x) + x.\phi(x) &= 0 \\ -x.e^{-\frac{x^2}{2}} + x.e^{\frac{x^2}{2}} &= 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

(1.8) denkleminin tekrar türevinin alınması ile

$$-e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2.e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2.e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \tag{1.9}$$

denklemi elde edilir, (1.9) denkleminin tekrar türevinin alınması ile

$$\phi^{'''}(x) + x.\phi^{''}(x) + 2.\phi^{'}(x) = 0 \tag{1.10}$$

elde edilir.Bu işlemin n kez türevlerinin alınması ile genel bir eşitlik olan

$$\phi^{(n+1)}(x) + x.\phi^{(n)}(x) + n.\phi^{(n-1)}(x) = 0 \tag{1.11}$$

elde edilir.(1.4) denkleminden faydanılması ile $\phi^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}}.H_n(x)$ ve $\phi^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1}.e^{-\frac{x^2}{2}}.H_{n-1}(x)$ denklemlerini eşitlik (1.11)' de yerine koyulması ile

$$\begin{bmatrix} (-1)^{n+1} \\ (x.H_n(x) - H_n^{'}(x)) \end{bmatrix} .e^{-\frac{x^2}{2}} + x.(-1)^n.e^{-\frac{x^2}{2}}.H_n(x) + n.(-1)^{n-1}.e^{-\frac{x^2}{2}} H_{n-1}(x) = 0 \tag{1.12}$$

ve bu ifadenin düzenlenmiş hali olan, üç ardışık Hermite polinomunun rekürans ilişkisini gösteren

$$[H_{n+1}(x) - x.H_n(x) + n.H_{n-1}(x)] = 0 \tag{1.13}$$

denklemi elde edilir (Jackson, 1941 : 179).

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \frac{H_n(x)}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}}, \\ h_n(x).\sqrt{n!\sqrt{2\pi}} &= H_n(x), \\ h_{n+1}(x).(n+1)!\sqrt{2\pi})^{\frac{1}{2}} &= H_{n+1}(x), \\ h_{n-1}(x)((n-1)!\sqrt{2\pi})^{\frac{1}{2}} &= H_{n-1}(x) \end{aligned}$$

ifadelerinin (1.13) denkleminde yazılması ile normalize edilmiş Hermite polinomlarının rekürans ilişkisinin gösterimi olan

$$(n+1)^{\frac{1}{2}} h_{n+1}(x) - x.h_n(x) + n^{\frac{1}{2}} h_{n-1}(x) = 0 \tag{1.14}$$

denklemi bulunur. (1.14) denkleminin bilgisinden faydanılarak elde edilen $(n+1)$. dereceden Hermite polinomuna karşılık gelen eşitlik $(x.H_n(x) - H_n^{'}(x)) = H_{n+1}(x)$ ve (1.13) rekürans bağıntısının denkliklerinden istifade edilmesi ile

$$\begin{aligned} (x.H_n(x) - H_n^{'}(x)) &= x.H_n(x) - nH_{n-1}(x) \\ -H_n^{'}(x) &= -nH_{n-1}^{'}(x) \end{aligned}$$

ve bu ifadeden

$$H_n^{'}(x) = nH_{n-1}(x)$$

ilişkisi elde edilir. $H_n^{'}(x) = nH_{n-1}(x)$ denklemini $n = n+1$ için gösterimi

$$H_{n+1}^{'}(x) = (n+1).H_n(x)$$

dir. Bu elde eldilen denklem $H_{n+1}^{'}(x) = (n+1).H_n(x)$ ifadesi

(1.13) denkleminin türevlenmesiyle ortaya çıkan

$$H_{n+1}^{'}(x) - x.H_{n}^{'}(x) - H_n(x) + H_{n}^{''}(x) = 0$$

ifadesinde kullanılarak

$$(n+1).H_n(x) - xH_{n}^{'}(x) - H_n(x) + H_{n}^{''}(x) = 0$$

sonucu bulunur.

Bu ifadenin düzenlenmesi ile

$$H_{n}^{''}(x) - x.H_{n}^{'}(x) + n.H_n(x) = 0 \tag{1.15}$$

elde edilir. (1.15) bağıntısı; Hermite polinomunun ikinci dereceden, birinci dereceden türevi ve kendisi ile ifade edilmiş rekürans ilişkisini gösterir (Jackson, 1941 : 180).

Yukarıda elde edilen rekürans ilişkileri kullanılarak Hermite polinomlarının tek ve çift indisli değerleri için $x = 0$ durumundaki değerler ve Hermite polinomları aşağıda ifade edilmiştir.

$x = 0$ için 1.13 denkleminde ifade edildiğinde

$$\begin{aligned} [H_{n+1}(x) - x.H_n(x) + n.H_{n-1}(x)] &= 0 \\ [H_{n+1}(0) - 0.H_n(0) + n.H_{n-1}(0)] &= 0 \\ H_{n+1}(0) &= -n.H_{n-1}(0) \end{aligned}$$

elde edilir (Jackson, 1941 : 180).

Hermite polinomu $k = 1$ için

$$\begin{aligned} H_2(x) &= 1.e^{\frac{x^2}{2}}(x^2-1).e^{-\frac{x^2}{2}} \\ H_2(0) &= (-1) \end{aligned}$$

$k = 2$ için

$$\begin{aligned} H_4(x) &= 1.e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \left[\left(3 - 3x^2\right) e^{-\frac{x^2}{2}} + (3x - x^3)(-x.e^{-\frac{x^2}{2}}) \right] \\ H_4(0) &= 3 \end{aligned}$$

bulunur. Hermite polinomlarının çift indisli derecelerinin sabit terimlerinin $k = 0, 1, 2, 3, ...$ için $H_{2k}(0) = (-1)^k.1.3.5.7...$ genel ifadesiyle gösterilir(Jackson, 1941 : 180). Hermite polinomlarının tek indisli polinomlarının sabit terimlerinin sıfır ve çift indisli polinomlarının ise negatif ve pozitif sabit terimlere sahip oldugu görülür.

Aşağıda hermite polinomlarının ilk üç tanesinin polinomsal ifadesi açılarak ifade edilmiştir:

$$H_n(x) = (-1)^n.e^{\frac{x}{2}}.(e^{-\frac{x}{2}})^n,$$

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_1(x) = x,$$

$$H_2(x) = (x^2 - 1)$$

ve

$$H_3(x) = (x^3 - 3x)$$

elde edilir(Jackson, 1941 : 181).

Ağırlık fonksiyonu olan $\rho(x)$

$$\begin{aligned}\frac{\rho^{'}(x)}{\rho(x)} &= \frac{a_0+a_1x}{b_0+b_1x+b_2x^2}\\ &= \frac{\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{'}}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = -x\end{aligned}$$

Pearson Diferansiyel denklemini sağlar (Jackson, 1941 : 181).

$b_1 = b_2 = a_0 = 0, b_0 = 1, a_1 = -1$, ve $P_n(x), n.$ Dereceden bir polinomun genel ifadesini göstermek üzere ;

$$(b_0+b_1x+b_2x^2)P_n^{''}(x)+[(b_1+a_0)+(2b_2+a_1)x]\,P_n^{'}(x)-[b_2n(n+1)+a_1n]\,P_n(x)=0 \tag{1.16}$$

dir (Jackson, 1941 : 164).

Ağırlık fonksiyonu ile elde edilen ikinci dereceden diferansiyel denklemindeki sabit katsayıları (1.16) denkleminde normalize edilmiş Hermite polinomu gösterimi altında

$$h_n^{''}(x) - x.h_n^{'}(x) + nh_n(x) = 0$$

ikinci dereceden diferansiyel denklemi elde edilir (Jackson, 1941 : 180).

1.2.2. Laguerre Polinomu

Laguerre polinomu $(0,\infty)$ aralığında ortogonaldir, Laguerre polinomunun ağırlık fonksiyonu $\alpha > -1$ olmak üzere $\rho(x) = x^{\alpha}.e^{-x}$ 'dir. $n.$ dereceden ağırlık fonksiyonu $\phi_n(x) = x^{\alpha+n}.e^{-x}$ ile ifade edilir, $n.$ dereceden ağırlık fonksiyonunun $n.$dereceden türevi EK 1'de ifade edilen Leibniz formülü yardımıyla;

$$\phi_n^{(n)}(x) = (-1)^n x^{\alpha}e^{-x}\begin{pmatrix} x^n + \binom{n}{1}(\alpha+n).x^{n-1} + \binom{n}{2}(\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{n-2} \\ +...+(\alpha+n)(\alpha+n-1)...\alpha.x^0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Elde edilen türev sonucunda $\phi_n^n(x)$, x^n'in katsayısı olarak $(-1)^n$ ve

$x^{\alpha}.e^{-x}$'in çarpımı ile n.dereceden bir polinomun çarpımı olduğu görülür. n.dereceden polinomsal kısım $L_n^{\alpha}(x)$ ile gösterilmek üzere n.dereceden türevi alınmış ağırlık fonksiyonu $\phi_n^{(n)}(x).(-1)^n.x^{-\alpha}.e^x = L_n^{\alpha}(x)$ şeklini alır ve

$$L_n^{\alpha}(x) = (-1)^n.x^{-\alpha}.e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}.e^{-x})$$

ile gösterilen polinomlara Laguerre polinomu denir ve Laguerre polinomunun açık ifadesi

$$\begin{aligned} L_n^{\alpha}(x) &= (-1)^n x^{-\alpha} e^x \phi_n^n(x) \\ &= (-1)^{2n}.x^0.e^0.(x^n + \binom{n}{1}(\alpha+n)x^{n-1} + \binom{n}{2}(\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{n-2} \\ &\quad +... + \binom{n}{n}(\alpha+n)(\alpha+n-1)...\alpha.x^0) \\ &= x^n + \binom{n}{1}(\alpha+n)x^{n-1} + ... + (\alpha+n)(\alpha+n-1)...\alpha.x^0 \end{aligned}$$

dir, n. dereceden Laguerre polinomunun başkatsayısı 1'dir(Jackson, 1941:184).

n. dereceden ağırlık fonksıyonunun n den daha düşük dereceli türevleri EK 1 elde edilen leibnitz formülünün uygulanması ile

$$\phi_n^{n-1}(x) = x^{\alpha+1}.e^{-x} \begin{pmatrix} -x^{n-1} + \binom{n-1}{1}(\alpha+n)x^{n-2} \\ +... - \binom{n-1}{n-1}(\alpha+n)..(\alpha+1) \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$x = \infty$ durumunda, $x^{\alpha+n}.e^{-x}$ için ortaya çıkan belirsizliği EK 2'de incelenen durumda 0'a eşit olduğu bilgisinden faydanılarak $x = 0$ ve $x = \infty$ için $\alpha > -1$ faktörünü göz önünde bulundurularak

$$\phi_n^{n-1}(x) = 0$$

elde edilir.

Laguerre polinomunun ortogonallik ve normalize şartlarının incelenmesi durumunda;

$$\int_0^\infty x^\alpha.e^{-x}.L_m(x).L_n(x)dx = (-1)^n \int_0^\infty L_m(x).\phi_n^{(n)}(x)dx$$

$$I = (-1)^n \int_0^\infty L_m(x).\phi_n^{(n)}(x)dx$$

ve bu elde edilen ifadeye kısmi integrasyon uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} I &= (-1)^n \left[L_m(x)\phi_n^{n-1}(x) \mid_0^\infty - \int_0^\infty L_m(x).\phi_n^{n-1}(x)dx \right] \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^\infty L_m^{'}(x).\phi_n^{n-1}(x)dx \end{aligned}$$

bulunur.

$\phi_n^{n-1}(\infty) = 0$ ve $\phi_n^{n-1}(0) = 0$ bilgisinden faydanılması ile

$$\begin{aligned} L_m^\alpha(x) &= x^m - \binom{m}{1}(\alpha+m)\,x^{m-1} + ... + (\alpha+m)\,(\alpha+m-1)\,...\alpha.1 \\ L_m^\alpha(0) &= (\alpha+m)\,(\alpha+m-1)\,...\alpha \\ L_m^\alpha(\infty) &= (-1)^m\,(\infty)^{-\alpha}\,e^\infty \phi_m^m(\infty^{\alpha+n}.e^{-\infty}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \phi_n^n(x) &= x^{\alpha+n}.e^{-x} - \binom{n}{1}(\alpha+n)\,x^{\alpha+n-1}.e^{-x} + ... + (\alpha+n)\,...\alpha.x^\alpha.e^{-x} \\ \phi_n^n(\infty) &= 0 \end{aligned}$$

yukarıda elde edilen bilgiler altında I denklemi yukarıda elde edilen bilgiler ile

$$\begin{aligned} I &= (-1)^n \left[L_m(\infty).\phi_n^{n-1}(\infty) - L_m(0).\phi_n^{n-1}(0) - \int_0^\infty \phi_n^{n-1}(x).L_m^{'}(x)dx \right] \\ &= (-1)^{n+1}.\int_0^\infty \phi_n^{n-1}(x).L_m^{'}(x)dx \end{aligned}$$

tekrar kısmi integrasyon ile

$$I = (-1)^{n+2}\left[L_m^{'}(x).\phi_n^{n-2}(x)\mid_0^{\infty} -\int_0^{\infty}\phi_n^{n-2}(x).L_m^{''}(x)dx\right]$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} L_m^{'}(x) &= m.x^{m-1} - \binom{m}{1}(\alpha+m)(m-1)x^{m-2} \\ &\quad +... - \binom{m}{m-1}(\alpha+m)(\alpha+m-1)...(\alpha+1) \end{aligned}$$

ve

$$L_m^{'}(0) = -\binom{m}{m-1}(\alpha+m).(\alpha+m-1)...(\alpha+1)$$

ifadeleri kısmi integrasyonda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} I &= (-1)^{n+1}.\left[(m.0+...+0-0) - \int_0^{\infty}\phi_n^{n-2}(x).L_m^{''}(x)dx\right] \\ &= (-1)^{n+1}.\left(-\int_0^{\infty}\phi_n^{n-2}(x).L_m^{''}(x)dx.)\right) \\ &= (-1)^{n+2}.\int_0^{\infty}\phi_n^{n-2}(x).L_m^{''}(x)dx \end{aligned}$$

bulunur. I denkleminin m kez kısmi integrali alınmaya devam edildiğinde

$$I = (-1)^{n+m}\int_0^{\infty}\phi_n^{(n-m)}(x).L_m^m(x)dx$$

elde edilir. $m.$ dereceden bir polinomun $(m+1).$ dereceden türevi sıfırdır ve $L_m(x) = x^m$, $L_m^{'}(x) = m.x^{m-1}$ ve devam eden türevlerinde $m.$ dereceden Laguerre polinomunun $m.$ dereceden türevi $L_m^m(x) = m!$ bilgisi altında

$$I = (-1)^{n+m}.\int_0^{\infty}\phi_n^{(n-m)}(x).(L_m(x))^{(m)}dx \tag{1.17}$$

denklemi elde edilir (Jackson,1941 : 185).

$n > m$ ise ; $L_m^{m+1}(x) = 0$ olması sebebiyle kısmi integrasyonla $I = 0$ sonucunu verir. Daha sonra

$$\begin{aligned} I &= (-1)^{n+m} \int_0^\infty m! \phi_n^{n-m}(x) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Elde edilen I denkleminin sonucu olan sıfır değeri ile $L_m(x)$ ve $L_n(x)$ polinomlarının ağırlık fonksiyonu $x^\alpha . e^{-x}$ için ortogonaldir sonucuna varılır (Jackson, 1941 : 185).

*$m = n$ için Laguerre polinomlarının normalize durumu ;

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty x^\alpha . e^{-x} . L_n(x) . L_n(x) . dx \\ &= \int_0^\infty x^\alpha . e^{-x} . (-1)^n . x^{-\alpha} . e^x . \phi_n^n(x) L_n(x) dx \\ &= \int_0^\infty (-1)^n . \phi_n^n(x) L_n(x) dx \end{aligned}$$

I denklemine n kez kısmi integrasyon uygulanması ile

$$\begin{aligned} I &= (-1)^{2n} . \int_0^\infty \phi_n(x) . L_n^n(x) dx \\ &= \int_0^\infty \phi_n(x) . L_n^n(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadede bulunan $n.$ dereceden Laguere polinomu ve n. dereceden türevi aşağıdaki gibi gösterilir:

$$L_n(x) = x^n - \binom{n}{1} (\alpha + n) . x^{n-1} + ... + (\alpha + n) (\alpha + n - 1) ... \alpha . x^0$$

$$L_n^n(x) = n.(n-1)...1 = n!$$

$$I = n!\int_0^\infty \phi_n(x)dx = n!.\int_0^\infty x^{\alpha+n}.e^{-x}dx$$

$n.$ dereceden Laguerre polinomunun büyüklüğünü verir ve EK 3'te ifade edilen gama fonksiyonu ile I denklemi tekrar ifade edildiğinde

$$I = n!\Gamma(\alpha+n+1)$$

ile gösterilir ve normalize edilmiş Laguerre polinomunun $\imath_n(x)$ ile gösterimi $\imath_n(x) = \frac{L_n(x)}{\sqrt{n!\Gamma(\alpha+n+1)}}$ şeklindedir (Jackson, 1941 : 185).

Normalize edilmiş Laguerre polinomunun seri açılımındaki c_k katsayıları;

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x).\rho(x).\frac{L_k(x)}{\sqrt{k!\Gamma(\alpha+k+1)}}.dx &= c_{k.}\int_0^\infty \rho(x).\frac{L_k(x).L_k(x)}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}dx \\ \int_0^\infty f(x).\rho(x).\frac{L_k(x)}{\sqrt{k!\Gamma(\alpha+k+1)}}.dx &= c_{k.}.1\end{aligned}$$

$\rho(x) = x^\alpha.e^{-x}$ olmak üzere ,

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{k!\Gamma(\alpha+k+1)}}\int_0^\infty x^\alpha.e^{-x}f(x).L_k(x)dx \tag{1.18}$$

(1.18) denklemi elde edilir (Jackson, 1941 : 186) .

Laguerre polinomunun ağırlık fonksiyonu $\rho(x) = x^\alpha.e^{-x}$ Pearson diferansiyel denklemini sağlar.

$$\begin{aligned}\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} &= \frac{a_0+a_1x}{b_0+b_1x+b_2x^2} \\ &= \frac{\alpha-x}{x}\end{aligned} \tag{1.19}$$

elde edilir. $a_0 = \alpha, a_1 = -1, b_0 = b_2 = 0, b_1 = 1;$ (1.19) Ağırlık fonksiyonu ile elde

edilen ikinci dereceden diferansiyel denklemindeki sabit katsayıları (1.16) nolu denklemde yazılması ile

$$x.L_n^{''}(x) + (\alpha + 1 - x)\, L_n^{'}(x) + nL_n(x) = 0 \tag{1.20}$$

ikinci dereceden Laguerre polinomunun diferansiyel denklemi elde edilir(Jackson,1941 : 186).

$$x.P_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} P_{n+1}(x) + c_{nn}.P_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} P_{n-1}(x) \tag{1.21}$$

$$c_{nn} = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$$

(1.21) denklemi ile ortogonal polinomlar arasındaki rekürans bağıntısı elde edilir(Jackson, 1941:157). (1.21) denklemindeki polinomlar normalize edilmiş polinomlardır. Polinomun derecesi n çift olduğu varsayımı altında a_n, $\imath_n(x)$ normalize edilmiş polinomunun başkatsayısını göstermek üzere $a_n = \frac{1}{\sqrt{n!\Gamma(\alpha+n+1)}}$ ve b_n ise ; x^{n-1}'in katsayısı $\frac{-n(\alpha+n)}{\sqrt{n!\Gamma(\alpha+n+1)}}$dir(Jackson, 1941 : 186).

EK 1'de gösterilen n.dereceden Laguerre polinomu;

$$\begin{aligned} L_n(x) &= (-1)^n x^n - (-1)^n(\alpha+n).x^{n-1} + (-1)^n \binom{n}{2}(\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{n-2} \\ &\quad + ... + (-1)^n \binom{n}{n}(\alpha+n)(\alpha+n-1)...\alpha \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$$P_n(x) = a_k.x^k + b_k x^{k-1} + ...$$

$$\begin{aligned} c_{nn} &= \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \\ &= \left(-\frac{n.\,(\alpha+n)}{\sqrt{d_n}}.\sqrt{d_n}\right) - \left(-\frac{(n+1).(\alpha+n+1)\sqrt{d_{n+1}}}{\sqrt{d_{n+1}}}\right) \\ &= \alpha + 2n + 1 \end{aligned}$$

elde edilir(Jackson, 1941 : 186).

$(n+1)$. dereceden Laguerre Polinomu için a_{n+1}, b_{n+1} değerleri EK 1'de verilen Leibniz formülünden faydanılarak yapılan açılım,

$$L_{n+1}(x) = x^{n+1} - \binom{n+1}{1}(\alpha+n+1)\,x^n + ... - (\alpha+n+1)\,...\alpha.x^{\alpha}$$

ve

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)!\Gamma\,(\alpha+n+2)}}$$

$$b_{n+1} = -\frac{(n+1)\,(\alpha+n+1)}{\sqrt{(n+1)!\Gamma\,(\alpha+n+2)}}$$

$$\imath_n = \frac{L_n(x)}{\sqrt{n!(n+1)!\Gamma\,(\alpha+n+1)}}$$

değerleri göz önünde tutularak;

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n!\Gamma\,(\alpha+n+1)}}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)!\Gamma\,(\alpha+n+2)}}$$

$$a_{n-1} = \frac{-1}{\sqrt{(n-1)!\Gamma\,(\alpha+n)}}$$

ve $(n-1)$. dereceden EK 1'de elde edilen

$$L_{n-1}(x) = x^{n-1} - \binom{n-1}{1}(\alpha+n-1)\,x^{n-2} + ... - (\alpha+n-1)\,(\alpha+n-2)\,..\alpha$$

açılımından ve

$$a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{(n-1)!\Gamma\,(\alpha+n)}}$$

kısmi integrasyonun I denklemine uygulanması ile

$$\begin{aligned} I &= (-1)^{n+1}\left(L_{n+1}(x)\phi^n_{n+1}(x)\mid_0^\infty - \int_0^\infty \phi^n_{n+1}(x)L'_{n+1}(x)dx\right) \\ &= (-1)^{n+2}\int_0^\infty \phi^n_{n+1}(x)L'_{n+1}(x)dx \end{aligned}$$

ve $(n+1)$ kez ardışık integrallenme işleminin devamında

$$I = (-1)^{2n+2}\int_0^\infty \phi_{n+1}(x)L^{n+1}_{n+1}(x)dx$$

$$L_{n+1}(x) = x^{n+1}$$

$$L^{n+1}_{n+1}(x) = (n+1)!$$

$(n+1)$. dereceden Laguerre polinomunun büyüklüğü elde edilir. Elde edilen bilgiler (1.21) denkleminde yazılması ile$x.L_n(x) = L_{n+1}(x)+(\alpha+2n+1)\,L_n(x)+ n\,(\alpha+n)\,L_{n-1}(x)$ elde edilir ve ifadenin düzenlenmesi ile

$$L_{n+1}(x) - (x-\alpha-2n-1)L_n(x) + n\,(\alpha+n)\,L_{n-1}(x)$$

$(n+1)$., n. ve $(n-1)$. dereceden Laguerre polinomlarından oluşan rekürans ilişkisi elde edilir(Jackson, 1941 : 186).Diğer bir rekürans ilişkisi olan $L_n(x)$ ve

$L_n^{'}(x)$ polinomlarına bağlı olan ilişki şu şekildedir.

$$\begin{aligned} L_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1}x^{-\alpha}.e^{x}.\phi_{n+1}^{n+1}(x) \\ &= (-1)^{n+1}x^{-\alpha}.e^{x}.\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{\alpha+n+1}.e^{-x}) \end{aligned}$$

$(n+1)$.dereceden Laguerre polinomunda bulunan parantezin içindeki ifadeyi x ve $x^{\alpha+n}.e^{-x}$'in çarpımı olarak ele alınması ile EK 1'de Leibniz formülü kullanılması ile

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}^{n+1}(x) &= x.\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{\alpha+n}.e^{-x}) + (n+1).\frac{d^{n}}{dx^{n}}(x^{\alpha+n}.e^{-x}) \\ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{\alpha+n+1}.e^{-x}) &= x.\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{\alpha+n}.e^{-x}) + (n+1).\frac{d^{n}}{dx^{n}}(x^{\alpha+n}.e^{-x}) \end{aligned}$$

elde edilir.

$L_n(x) = (-1)^n.x^{-\alpha}.e^{x}.\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}.e^{-x}); n.$ dereceden Laguerre polinomundan ağırlık fonksiyonun çekilmesi ile elde edilen

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}.e^{-x}) = L_n(x).(-1)^n.x^{\alpha}.e^{-x}$$

ve

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha+n}.e^{-x}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(L_n(x).(-1)^n x^{\alpha}.e^{-x}\right) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{\alpha+n}.e^{-x})$$

eşitliklerinden faydanılması ile

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{\alpha+n+1}.e^{-x}) &= x.\frac{d}{dx}\left((-1)^n x^{\alpha}.e^{-x}L_n(x)\right) + (n+1).(-1)^n.x^{\alpha}e^{-x}L_n(x) \\ (-1)^{n+1}.x^{\alpha}.e^{-x}.L_{n+1}(x) &= (-1)^n.x^{\alpha}.e^{-x}.\left[(\alpha+n+1-x)\,L_n(x) + xL_n^{'}(x)\right] \\ L_{n+1}(x) &= (x-\alpha-n-1)\,L_n(x) - xL_n^{'}(x) \end{aligned}$$

$$L_{n+1}(x) = (x - \alpha - n - 1)\, L_n(x) - xL_n^{'}(x) \tag{1.22}$$

(1.22) eşitliği ile $(n+1)$. dereceden Laguerre polinomu; n. dereceden Laguerre polinomu ve türeviyle ilişkili rekürans bağıntısı elde edilir(Jackson,1941 : 187).

1.2.3 Jacobi Polinomu

Jacobi polinomunun ortogonallik alanı $(-1,1)$'dir ve $\alpha > -1, \beta > -1$ olmak üzere reel sayılardır ve ağırlık fonksiyonu; $\rho(x) = (1-x)^{\alpha}.(1+x)^{\beta}$(Jackson, 1941 : 166). Jacobi polinomları $J_n(x, \alpha, \beta)$ ile ifade edilir.

Rodrigues formulü

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

gibi ifade edilmiştir(Jackson,1941 : 57).

$2n$ dereceli polinomun n. türevi olan formülün sağ kısmı, n. dereceden bir polinomu ifade eder. Bu polinom $(1-x^2)\, y^{''} - 2xy^{'} + n.(n+1)y = 0$ olan diferansiyel denklemin çözümünü sağlar.

$z = (x^2-1)^n$olmak üzere ;

$$z^{'} = 2nx((x^2-1)^{n-1}$$

Dolayısıyla ;

$$\begin{aligned} z - (x^2-1)^n &= 0 \\ z^{'} - 2xn(x^2-1)^{n-1}. &= 0 \\ z^{'} - 2xn\frac{z}{(x^2-1)} &= 0 \\ (x^2-1)z^{'} - 2xnz &= 0 \end{aligned}$$

$$(x^2-1)z^{'} - 2xnz = 0 \tag{1.23}$$

(1.23) denklemin ardışık türevleri alınarak $(k+1)$ kez diferansiyellenmesi ile

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2-1)z^{''} - (2n-2)xz^{'} - 2nz \\ 0 &= (x^2-1)z^{'''} - (2n-4)xz^{''} - (4n-2)z^{'} = 0 \\ 0 &= (x^2-1)z^{k+2} - (2n-2k-2)xz^{k+1} - [2n+(2n-2)+...+(2n-2k)]z^{k} \end{aligned}$$

elde edilir. $k=n$ için

$$(x^2-1)z^{n+2} + 2xz^{n+1} - [2n+(2n-2)+(2n-4)+...+0]\,z^{n} = 0$$

denkleminde $[2n+(2n-2)+(2n-4)+....+0] = n.(n+1)$'dir ve ve bu ifadeyi denklemde yerine koyulması ile

$$(x^2-1)z^{n+2} + 2xz^{n+1} - n(n+1)z^{n} = 0$$

elde edilir. $y = \frac{d^n z}{dx^n}$ olması sebebiyle ve $(x^2-1)z^{n+2} + 2xz^{n+1} - n(n+1)z^{n} = 0$ diferansiyel denklemi (-1) ile çarpılarak ifade

$$(1-x^2)y^{''} - 2xy^{'} + n.(n+1)y = 0$$

ifadesine dönüşür. Sonuç olarak $\frac{d^n z}{dx^n} = K.P_n(x)$ şeklinde bir ifade elde edilir. K; $\frac{d^n z}{dx^n}$ içindeki başkatsayılar; $2n.(2n-1)..(n+1)$'dir. Buna rağmen $P_n(x)$ içindeki x^n'in katsayısı $\frac{1.3.5.7.....(2n-1)}{2.3.4.....n} = \frac{1.3.5.7.....(2n-1)}{n!}$, ye göre $1.3.5\ldots\ldots(2n-1)/n!$'dir.Bunun sonucu olarak ; $K = 2n/1.3.5.....(2n) = 2^n.n!$ 'dir.

$P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ifadesinde yerine koyulması ile;

$$z = (x^2-1)^n$$

$$P_n(x) = \frac{1}{K}\frac{d^n z}{dx^n}$$

. Bu elde edilen polinomlar ilk dört Legendre polinomudur ,Legendre polinomları Rodrigues formülünden elde edilir ve genel ortogonal polinom ifadesi ile ifade edilmiş gösterimi;

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \end{aligned}$$

'dir.Legendre polinomlarının genelleştirilmiş hali Jacobi polinomlarını verir(Jackson,1941 : 46).

Legendre polinomu üzerinden inceleme devamında $g(x), h(x)$ fonksiyonlar ve $\phi_n(x) = g(x).h(x), g(x) = (1-x)^{\alpha+n}, h(x) = (1+x)^{\beta+n}$ olmak üzere Leibniz formulü yardımıyla; α, β tamsayı değil ; $-1 < x < 1$ için $g(x)$ ve $h(x)$'i reel ve pozitif yapması için seçilir. Sonucun $n.$ türevi Leibniz formülü ile ;

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= (1-x)^{\alpha+n}.(1+x)^{\beta+n} \\ \phi_n^n(x) &= \left((1-x)^{\alpha+n}.(1+x)^{\beta+n}\right)^{(n)} \\ &= \left((1-x)^{\alpha+n}\right)^{(n)}.(1+x)^{\beta+n} + n.\left((1-x)^{\alpha+n}\right)^{(n-1)}.((1+x)^{\beta+n})' \\ &\quad + \frac{n.(n-1)}{2!}((1-x)^{\alpha+n})^{(n-2)}((1+x)^{\beta+n})'' \\ &\quad + ... + ((1-x)^{\alpha+n})((1+x)^{\beta+n})^{(n)} \end{aligned}$$

$$\phi_n^n(x) = g^{(n)}(x)h(x) + n.g^{(n-1)}(x)h'(x) + \frac{n(n-1)}{2!}g^{(n-2)}(x).h''(x) + ... + g(x).h^{(n)}(x)$$

$0 \leq j \leq n$ için $g^{(i)}(x); (1-x)^{\alpha+n-i} = (1-x)^{\alpha}(1-x)^{n-i}$'nin sürekli bir çarpanıdır şöyle ki;

$$g^{(i)}(x) = \left((1-x)^{\alpha+n-i}\right)^{(i)}$$

$$\left((1-x)^{\alpha+n}\right)' = (\alpha+n).(1-x)^{\alpha+n-1}.(-1)$$

$$\left((1-x)^{\alpha+n}\right)'' = (\alpha+n).(\alpha+n-1)(1-x)^{\alpha+n-2}$$

$g^{(i)}(x)$ ifadesi $(\alpha+n-i)$ .dereceden polinoma karşılık gelen bir polinom α ve n 'ye bağlı sabit k olmak üzere $g^{(i)}(x)$ ifadesi ;$(1-x)^{\alpha}(1-x)^{n-i}$ 'nin sabit bir k katı olduğu görülür.

$h^{(n-i)}(x)$; $(1+x)^{\beta}(1+x)^{i}$ cinsinden ifade edildiğinde

$$h^{(n-i)}(x) = ((1+x)^{\beta+n})^{(n-i)}$$

$$((1+x)^{\beta+n})' = (\beta+n)\,(1+x)^{\beta+n-1}$$

$$((1+x)^{\beta+n})'' = (\beta+n)\,(\beta+n-1)\,(1+x)^{\beta+n-2}$$

$$((1+x)^{\beta+n})''' = (\beta+n)\,(\beta+n-1)\,(\beta+n-2)\,(1+x)^{\beta+n-3} = t.(1+x)^{\beta+n-3}$$

t, β ve n'ye bağlı sabitlerdir, dolayısıyla $h^{(n-i)}(x) = t.(1+x)^{\beta+n-n+i}$; $h^{(n-i)}(x)$; $(1+x)$ polinomunun $(\beta+i)$. dereceden bir polinomudur. $h^{(n-i)}(x)$; görüldüğü gibi $h^{(n-i)}(x) = t.(1+x)^{(\beta+i)}$; $(1+x)^{\beta}.(1+x)^{i}$ 'nin bir katıdır.

$$\phi_n^n(x) = g^{(n)}(x)h(x)+n.g^{(n-1)}(x)h'(x)+\frac{n(n-1)}{2!}g^{(n-2)}(x).h''(x)+...+g(x).h^{(n)}(x)$$

$0 \leq j \leq n$ için

$$g^{(n)}(x) = (\alpha + n)(\alpha + n - 1)...(\alpha + n - i - 1)(1 - x)^{\alpha}$$

$$h(x) = (1 + x)^{\beta + n}$$

$$h^{'}(x) = (\beta + n)(1 + x)^{\beta + n - 1}$$

$$h^{''}(x) = (\beta + n)(\beta + n - 1)(1 + x)^{\beta + n - 2}$$

Ve n.dereceden türevi olan $h(x)$ fonksiyonu;

$$h^{n}(x) = (\beta + n)(\beta + n - 1).(\beta + 1)(1 + x)$$

$$\begin{aligned} \phi_n^n(x) &= (\alpha + n)(\alpha + n - 1)..(\alpha + 1)(1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta + n} + .. \\ &\quad .. + (1 - x)^{\alpha + n}(\beta + n)(\beta + n - 1)...(\beta + 1)(1 + x)^{\beta} \\ &= k.(1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta + n} + ... + t(1 - x)^{\alpha + n}.(1 + x)^{\beta} \end{aligned}$$

$$\phi_n^n(x) = k.(1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}.(1 + x)^{n} + .. + \binom{n}{i} g^{(i)}(x)h^{(n-1)}(x) + .. + g(x).h^{(n)}(x) \tag{1.24}$$

elde edilir (Jackson,1941 : 167).

Elde edilen (1.24) denklemi $g^{(i)}(x)$ ve $h^{(n-i)}(x)$'in hesaplanmasının amacı; Leibniz formülüne göre $\phi_n(x)$'in n. türevinin açılımında ve binom açılımından gelen $g^{(i)}(x)$ ve $h^{(n-i)}(x)$ değerlerinin yerine koyabilmek ve gelecek katsayılar hakkında fikir edinebilmektir.Dolayısıyla $\phi_n^n(x)$ en fazla n. dereceden bir polinom ile bu çarpımın sonucu olan $(1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}$'ye sahiptir.$y_n(x)$ ile bu polinomu ifade edilmesi ile;

$$\phi_n^n(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}.y_n(x)$$

ifadesine dönüşür.

$y_n(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]$;$y_n(x)$; $\frac{(-1)^n}{2^n.n!}$ ile çarpılarak ve Jacobi polinomunu $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ gösterimi ile

$$J_n(x,\alpha,\beta) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}.(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]$$

elde edilir, $\alpha = \beta = 0$ için Legendre polinomları için Rodrigues formülünün genelleştirilmesidir(Jackson, 1941 : 167).

$\phi_n^{(k)}(x)$; $k < n$ için ;

$$\phi_n(x) = (1-x)^{\alpha+n}.(1+x)^{\beta+n}$$

$$\phi_n^{'}(x) = (1-x)^{\alpha+n-1}(1+x)^{\beta+n-1}\left(\beta-\alpha-x\beta-\alpha-x\left(\alpha-2n-\beta\right)\right)$$

$n = 2$ için Leibniz formülü ile açılımı EK 1' de belirtildiği üzere

$$\begin{aligned}\phi_n^{''}(x) &= (1-x)^{\alpha+n}(\beta+n)(\beta+n-1)(1+x)^{\beta+n-2} \\ &\quad -2.\left(\alpha+n\right).(1-x)^{\alpha+n-1}.(\beta+n)(1+x)^{\beta+n-1} \\ &\quad +(1+x)^{\beta+n}.\left(\alpha+n\right).\left(\alpha+n-1\right).(1-x)^{\alpha+n-2}\end{aligned}$$

$\phi_n^{'''}(x),..,\phi_n^k(x)$ için yukarıdaki ilk iki türev açılımından da görüleceği üzere $\phi_n^k(x)$; $(1-x)^{\alpha+n-k}$ ve $(1+x)^{\beta+n-k}$ çarpımlarına sahip olduğu görülür.$\alpha > -1$, $\beta > -1$ olması sebebiyle $\alpha+n-k \geq \alpha+1 > 0, \beta+n-k \geq \beta+1 > 0$; $\phi_n^k(x); x = \mp 1$ için yok olur (Jackson, 1941 : 167). Bu durumu $k = 2$ için gösterimi aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}\phi_n^{''}(x) &= (1-x)^{\alpha+n}(\beta+n)(\beta+n-1)(1+x)^{\beta+n-2} \\ &\quad -2.(\alpha+n).(1-x)^{\alpha+n-1}.(\beta+n)(1+x)^{\beta+n-1} \\ &\quad +(1+x)^{\beta+n}.(\alpha+n).(\alpha+n-1).(1-x)^{\alpha+n-2}\end{aligned}$$

$x = 1$ için;

$$\phi_n^{''}(1) = 0$$

$x = -1$ için,

$$\phi_n^{''}(-1) = 0$$

Ortogonallik şartlarının incelenmesi ise;

$$I = \int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}y_m(x).y_n(x)dx$$

$$y_n(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]$$

$$\begin{aligned}I &= \int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}y_m(x).(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]dx \\ &= \int_{-1}^{+1}y_m(x).\phi_n^{(n)}(x)dx\end{aligned}$$

I denklemi kısmi integrasyon ile

$$I = y_m(x).\phi_n^{n-1}(x)\mid_{-1}^{+1} -1.\int_{-1}^{1}\phi_n^{n-1}(x).y_m^{'}(x)dx$$

$$\phi_n^{(n-1)}(1) = 0$$

$$\phi_n^{(n-1)}(-1) = 0$$

$x = \pm 1'de$

$$\phi_n^{(n)}(x) = 0$$

$$I = 0 - 1.\int_{-1}^{1} \phi_n^{n-1}(x).y_m^{'}(x)dx$$

$u = y_m^{'}(x), du = y_m^{''}(x)dx, \phi_n^{n-1}(x)dx = dv, \phi_n^{n-2}(x) = v;$

$$I = -(y_m^{'}(x)\phi_n^{n-2}(x) \mid_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{1} \phi_n^{n-2}(x).y_m^{''}(x)dx)$$

$I = 0 + (-1)^2.\int_{-1}^{1} \phi_n^{n-2}(x).y_m^{''}(x)dx$ bu sürecin m ardışık türevi ile

$$I = (-1)^m \int_{-1}^{+1} y_m^{(m)}(x)\phi_n^{n-m}(x)dx$$

elde edilir. $m < n$ ise daha fazla kısmi integrasyon ile

$$I = (-1)^{m+1} \int_{-1}^{+1} y_m^{(m+1)}(x)\phi_n^{(n-m-1)}(x)dx = 0$$

y_m; en fazla m. Dereceden bir polinom olması sebebiyle $y_m^{(m+1)}(x) = 0$ 'dır, $I = 0$ elde edilir ve bunun sonucu olarak $y_m(x)$ ve $y_n(x)$; $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir(Jackson,1941 : 168).

$m = n$ için normalize durum;

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta y_n(x)y_n(x)dx \\ &= \int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta y_n(x)(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\phi_n^{(n)}(x)dx \\ &= \int_{-1}^{+1} y_n(x)\phi_n^{(n)}(x)dx \end{aligned}$$

I denkleminin kısmi integrasyonuna devam edilmesi ile

$$I = y_n(x)\phi_n^{(n-1)}(x) \mid_{-1}^{+1} -1.\int_{-1}^{1} \phi_n^{n-1}(x).y_n^{'}(x)dx$$

elde edilir. $\phi_n^{n-1}(1) = 0$, $\phi_n^{n-1}(-1) = 0$, $x = \pm 1' de, \phi_n^n(x) = 0$ bilgileri altında n kez integrallenme işlemine devam edilmesi ile $I = \int_{-1}^{1} \phi_n(x).y_n^n(x)dx$ elde edilir ve bu ifade için $y_n^n(x)$ inceleme altına alınması ile

$$\begin{aligned} y_n(x) &= (1-x)^{-\alpha}.(1+x)^{-\beta}.\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right) \\ &= (1-x)^{-\alpha}.(1+x)^{-\beta}.\frac{d^n}{dx^n}\left(((-1)(x-1))^{\alpha+n}.(1+x)^{\beta+n}\right) \\ &= (1-x)^{-\alpha}.(1+x)^{-\beta}.\frac{d^n}{dx^n}(-1)^{\alpha+n}(x-1)^{\alpha+n}.(1+x)^{\beta+n}) \\ &= (-1)^{-\alpha}(x-1)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}(-1)^{\alpha+n}.\frac{d^n}{dx^n}\left((x-1)^{\alpha+n}.(1+x)^{\beta+n}\right) \end{aligned}$$

$$y_n(x) = (-1)^{-\alpha}(x-1)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}(-1)^{\alpha+n}.\frac{d^n}{dx^n}\left((x-1)^{\alpha+n}.(1+x)^{\beta+n}\right)$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left((x-1)^{\alpha+n}.(1+x)^{\beta+n}\right)$$

$\frac{d^n}{dx^n}\left((x-1)^{\alpha+n}.(1+x)^{\beta+n}\right)$ ifadesi aşağıdaki gibi incelenmiştir:

$(x-1)^{\alpha+n}.(1+x)^{\beta+n}$ $2n$ dereceli denklemin $n.$ dereceden türevi ; $n.$ dereceden x^n ve x^n 'in katsayısı bağlı bir sonuç olacağı için $y_n(x)$ ifadesinde n'den daha düşük dereceli polinomların türevleri sıfır değerini almaları sebebiyle en yüksek dereceli polinom alınarak türev uygulanır.

$$\left(x^{\alpha+n}.x^{\beta+n}\right)^{(n)} = \left(x^{\alpha+\beta+2n}\right)^{(n)}$$

$$1.türevi; (\alpha+\beta+2n).x^{\alpha+\beta+2n-1}$$

$$2.türevi; (\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1).x^{\alpha+\beta+2n-2}$$

ve devam eden n ardışık türevle elde edilen n.dereceden türevi; λ_n,$x^{\alpha+\beta+n}$ 'nin katsayısını göstermek üzere

$$(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1).....(\alpha+\beta+n+1)x^{\alpha+\beta+n} = \lambda_n x^{\alpha+\beta+n}$$

şeklinde ifade edilir.$(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}$ ifadesini $x^{\alpha+\beta+2n}$ ile bölünüp çarpılması ile çarpım değerinde bir değişiklik olmaması sebebiyle;

$$\begin{aligned}(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n} &= \frac{x^{\alpha+\beta+2n}}{x^{\alpha+n}.x^{\beta+n}}.(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n} \\ &= x^{\alpha+\beta+2n}.\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\alpha+n}.\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\beta+n} \\ &= x^{\alpha+\beta+2n}.\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha+n}.\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\beta+n}\end{aligned}$$

elde edilen ifadedeki son iki çarpımı

$$(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n} = x^{\alpha+\beta+2n}.\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha+n}.\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\beta+n}$$

için binomial teorem ile açıldığında ;

$$(a)\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha+n} = 1+(\alpha+n).\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)}{2!}.\frac{1}{x^2}+..+\left(-\frac{1}{x}\right)^{\alpha+n}$$

$$(b)\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\beta+n} = 1+(\beta+n).\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(\beta+n)(\beta+n-1)}{2!}.\frac{1}{x^2}+...+\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta+n}$$

ifadeleri denklemde yerine koyulması ile

$$\begin{aligned}(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n} &= x^{\alpha+\beta+2n}.\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha+n}.\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\beta+n} \\ &= x^{\alpha+\beta+2n}.\left(1+\frac{\beta-\alpha}{x}+...\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^{\alpha+n}.(1+x)^{\beta+n}\right] &= \left[x^{\alpha+\beta+2n}+(\beta-\alpha)\,x^{\alpha+\beta+2n-1}+...\right]^{(n)} \\ &= (\alpha+\beta+2n)\,(\alpha+\beta+2n-1)\,.. \\ &\quad ...\,(\alpha+\beta+n+1)\,x^{\alpha+\beta+n} \\ &\quad +(\beta-\alpha)\,(\alpha+\beta+2n-1)\,. \\ &\quad .\,(\alpha+\beta+n)\,.x^{\alpha+\beta+n-1}+.....\end{aligned}$$

$$\lambda_n=(\alpha+\beta+2n)\,(\alpha+\beta+2n-1)\,...\,(\alpha+\beta+n+1)$$

$$\mu_n=(\beta-\alpha)\,(\alpha+\beta+2n-1)\,...\,(\alpha+\beta+n)$$

ve $\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^{\alpha+n}.(1+x)^{\beta+n}\right]$ ifadesini λ_n ve μ_n ile gösterilmesi ile

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^{\alpha+n}.(1+x)^{\beta+n}\right]=\lambda_n x^{\alpha+\beta+n}+\mu_n.x^{\alpha+\beta+n-1}+...$$

$$\lambda_n=(\alpha+\beta+2n)\,(\alpha+\beta+2n-1)\,...\,(\alpha+\beta+n+1)$$

$$\mu_n=(\beta-\alpha)\,(\alpha+\beta+2n-1)\,...\,(\alpha+\beta+n)$$

denklikleri ile elde edilen ifadeyi $y_n(x)=(-1)^n(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^{\alpha+n}.(1+x)^{\beta+n}\right]$ ifadesinin denklemin

her iki tarafında $x^{-\alpha-\beta}$ ile çarpılıp bölünmesi ile

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= (-1)^n(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^{\alpha+n}.(1+x)^{\beta+n}\right] \\
&= (-1)^n.(x)^{-\alpha-\beta}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\alpha}.\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\beta}.x^{\alpha+\beta}.\left(\lambda_n x^n+\mu_n.x^{n-1}+....\right) \\
&= (-1)^n.\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\alpha}.\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\beta}.\lambda_n x^n+\mu_n.x^{n-1} \\
&= (-1)^n.\left(1+\frac{\alpha}{x}+...\right)\left(1-\frac{\beta}{x}+...\right)\left(\lambda_n x^n+\mu_n.x^{n-1}+....\right) \\
&= \alpha_n.x^n+\beta_n.x^{n-1}+.....
\end{aligned}$$

x^n ve x^{n-1}'in katsayıları sırası ile;$\alpha_n=(-1)^n\lambda_n$ ve $\beta_n=(-1)^n\left[\mu_n+(\alpha-\beta)\lambda_n\right]$ göstermek üzere ;

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= \left((-1)^n.\lambda_n.x^n+(-1)^n\mu_n x^{n-1}+...\right)\left(1+\frac{\alpha}{x}+...\right)\left(1-\frac{\beta}{x}+...\right) \\
&= \left((-1)^n.\lambda_n.x^n+(-1)^n\mu_n x^{n-1}+...\right)\left(1-\frac{\beta}{x}+...+\frac{\alpha}{x}-\frac{\beta\alpha}{x^2}+...\right) \\
&= \begin{pmatrix}
(-1)^n.\lambda_n.x^n-(-1)^n.\lambda_n.\beta.x^{n-1}+....+(-1)^n.\lambda_n.\alpha.x^{n-1} \\
-(-1)^n\lambda_n.\beta.\alpha.x^{n-2}+.. \\
..+(-1)^n\mu_n x^{n-1}-(-1)^n\mu_n.\beta.x^{n-2}+.. \\
..+(-1)^n\mu_n\alpha x^{n-2}-(-1)^n\mu_n\beta\alpha x^{n-3}+.....
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\alpha_n=(-1)^n.\lambda_n$$

$$\beta_n=(-1)^n.\left[\mu_n+(\alpha-\beta)\lambda_n\right]$$

geçişi

$$y_n(x)=\alpha_n x^n+\beta_n x^{n-1}+...$$

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= (-1)^n.\lambda_n \\
&= (-1)^n\left((\alpha+\beta+2n)\ldots(\alpha+\beta+n+1)\right) \\
\beta_n &= (-1)^n(.\left[\mu_n+(\alpha-\beta)\lambda_n\right] \\
&= (-1)^n\left(\alpha-\beta\right)n\left(\alpha+\beta+2n-1\right)\ldots\left(\alpha+\beta+n+1\right)
\end{aligned}$$

ve gama fonksiyonunun tanımının faydanılması ile

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= (-1)^n\left((\alpha+\beta+2n)\ldots(\alpha+\beta+n+1)\right) \\
\beta_n &= (-1)^n\left(\alpha-\beta\right)n\left(\alpha+\beta+2n-1\right)..\left(\alpha+\beta+n+1\right) \\
\alpha_n &= (-1)^n\frac{\Gamma\left(\alpha+\beta+2n+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+n+1\right)}
\end{aligned}$$

$\alpha=\beta$ durumunda $\beta_n=(-1)^n\left(\alpha-\alpha\right)n\left(\alpha+\alpha+2n-1\right)..\left(2\alpha+n+1\right))$ ifadesi $\beta_n=0$ olur. $n=0$ için tüm α,β için $y_0(x)=1$ 'dir.Elde edilen ifadelerle tekrar ifade edilirse $y_n^{(n)}(x)=\alpha_n.n!$ ifadesinde denklemde yerine koyulması ile

$$\begin{aligned}
I &= (-1)^n\int_{-1}^{+1}\phi_n(x).y_n^{(n)}(x)dx \\
&= (-1)^n\int_{-1}^{+1}\phi_n(x).\alpha_n.n!dx
\end{aligned}$$

ifadesine dönüşür(Jackson, 1941 : 169).

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\left[y_n(x)\right]^2dx=I$$

$$I=(-1)^n.n!.\alpha_n.\int_{-1}^{+1}\phi_n(x)dx$$

ve elde edilen bu I denkleminde bulunan $\int_{-1}^{+1}\phi_n(x)dx=\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}dx$ ifadesi aşağıdaki gibi incelenmesi ;

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}(1+x) \\ 1-t &= \frac{1-x}{2} \end{aligned}$$

$dx = 2dt$ ve bilgileri ile

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \phi_n(x)dx &= \int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}dx \\ &= \int_{-1}^{+1} (2.(1-t))^{\alpha+n}(2t)^{\beta+n}2dx \\ &= 2^{\alpha+\beta+2n+1}\int_{0}^{1} t^{\beta+n}.(1-t)^{\alpha+n}dt \end{aligned}$$

elde edilir(Jackson,1941 : 171).

Elde edilen ifadede aşağıdaki dönüşümlerin uygulanması ve ;

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \phi_n(x)dx &= 2^{\alpha+\beta+2n+1}\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)} \\ &= 2^{\alpha+\beta+2n+1}\int_{-1}^{1} t^{\beta+n}.(1-t)^{\alpha+n}dt \end{aligned}$$

elde edilir.Bu denklem $I = (-1)^n n!\alpha_n \int_{-1}^{+1} \phi_n(x)dx$ denkleminde ifade edilmesi ile

$$I = (-1)^n n!\alpha_n.2^{\alpha+\beta+2n+1}\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}$$

$\alpha_n = (-1)^n.\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$

$$\begin{aligned} I &= (-1)^n n!\alpha_n \int_{-1}^{+1} \phi_n(x)dx \\ &= (-1)^{2n}.n!.2^{\alpha+\beta+2n+1}.\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)} \end{aligned}$$

I denkleminin Gama fonksiyonu cinsinden ifadesi elde edilir.

Jacobi Polinomu $J_n(x,\alpha,\beta)$;

$$\begin{aligned} J_n(x,\alpha,\beta) &= \frac{(-1)^n}{2^n.n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}(\phi_n(x)) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n.n!}.y_n(x) \end{aligned}$$

ve $J_n(x,\alpha,\beta)$ polinomunun normalize edilmiş hali;

$$\begin{aligned} \delta_n &= \frac{(-1)^n}{2^n.n!}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}.\frac{(-1)^n}{2^n.n!}.(y_n(x))^2\,dx \\ &= \frac{1}{2^{2n}.(n!)^2}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}.(y_n(x))^2\,dx \end{aligned}$$

$I=\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}.(y_n(x))^2\,dx$ bilgisi ile δ_n ifadesinde kullanılması ile $\delta_n = \frac{I}{2^{2n}.(n!)^2}$şekline dönüşür (Jackson, 1941 : 172). I denkleminin Gama fonksiyonu cinsinden ifadesi olan $I = n!2^{\alpha+\beta+2n+1}\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$ tekrar δ_n ifadesinde yazılması ile

$$\delta_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!}.\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n+1)}$$

elde edilir.δ_n 'in karekökü Jacobi polinomumun $m=n$ için ortogonal olduğu aralıkta normalize çarpanını veren değerdir (Jackson, 1941 : 172).

Jacobi polinomlarının seri açılımındaki katsayıları

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{\delta_{k-1}}}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}.f(x).J_k(x,\alpha,\beta)dx \qquad (1.25)$$

(1.25) formülünden katsayılar elde edilir(Jackson, 1941 : 172).

Jacobi Polinomları için rekürans ilişkisi,ortogonal polinomlar için rekürans formulünden faydalanılarak aşağıda ifade edilmiştir.

$$J_n(x,\alpha,\beta) = \frac{(-1)^n}{2^n.n!}y_n(x)$$

$y_n(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}(\phi_n(x)), \phi_n(x) = (1-x)^{\alpha+n}.(1+x)^{\beta+n}$ olmak üzere normalize edilmiş Jacobi Polinomunu ; $j_n(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{\sqrt{\delta_n}}J_n(x,\alpha,\beta)$ ifadesi ile gösterilmek üzere

$$\begin{aligned}
j_n(x,\alpha,\beta) &= \frac{1}{\sqrt{\delta_n}}J_n(x,\alpha,\beta) \\
\delta_n &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!}.\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)} \\
j_n(x,\alpha,\beta) &= \frac{1}{\sqrt{\delta_n}}.\frac{(-1)^n}{2^n.n!}y_n(x) \\
j_n(x,\alpha,\beta) &= \frac{1}{\sqrt{\delta_n}}.\frac{(-1)^n}{2^n.n!}.\left(\alpha_n.x^n + \beta_n x^{n-1} + ..\right) \\
\alpha_n &= (-1)^n\lambda_n \\
\beta_n &= (-1)^n\left[\mu_n + (\alpha-\beta)\lambda_n\right]
\end{aligned}$$

bilgileri ile $P_n(x)$'in normalize edilmiş şeklinde bulunan x^n ve x^{n-1} 'in katsayıları a_n ve b_n ile gösterilmek üzere;

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= (-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \\
\beta_n &= (-1)^n(\alpha-\beta)n\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \\
a_n &= \frac{(-1)^n\alpha_n}{\sqrt{\delta_n}2^n n!} \\
b_n &= \frac{(-1)^n\beta_n}{\sqrt{\delta_n}2^n n!}
\end{aligned}$$

Yukarıda ifade edilen katsayıların içinde gerekli olan ifadelerin açılımının aşağıda incelenmesi ile

1.

$$.\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = -\frac{(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)}$$

2.

$$\begin{aligned} .\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{(-1)^n\alpha_n}{\sqrt{\delta_n}2^n n!}\frac{\sqrt{\delta_{n+1}}2^{n+1}(n+1)!}{(-1)^{n+1}\alpha_{n+1}} \\ &= -2(n+1).\left(\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right)^{1/2}.\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{a_n} &= \frac{(-1)^n\beta_n}{\sqrt{\delta_n}2^n n!}\frac{\sqrt{\delta_n}2^n n!}{(-1)^n\alpha_n} \\ &= \frac{\beta_n}{\alpha_n} \\ &= \frac{(\alpha-\beta)n}{(\alpha+\beta+2n)} \end{aligned}$$

elde edilir(Jackson,1941 : 173).Rekürans bağıntısı;

$$xp_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}}p_{n+1}(x) + c_{nn}p_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n}p_{n-1}(x) \tag{1.26}$$

denklemi ile gösterilir(Jackson,1941 : 157). Bu ifadede yer alan c_{nn}; $\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = c_{nn}$ ve formülde gerekli olan ifadelerin elde edilmesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{(-1)^{n+1}\beta_{n+1}}{\sqrt{\delta_{n+1}}2^{n+1}(n+1)!}\frac{\sqrt{\delta_{n+1}}2^{n+1}(n+1)!}{(-1)^{n+1}.a_{n+1}} \\ &= \frac{\beta_{n+1}}{a_{n+1}} \\ &= \frac{(\alpha-\beta)(n+1)}{(\alpha+\beta+2n+2)} \end{aligned}$$

$$\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n)}$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \left(\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right)\frac{2n}{(-1)^{-1}}\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$$

$\frac{a_{n-1}}{a_n}$ ifadesinde bulunan

$$*\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = -\frac{(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)}$$

$$\begin{aligned}
*\delta_n &= \frac{2^{(\alpha+\beta+1)}}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n+1)} \\
*\delta_{n-1} &= \frac{2^{(\alpha+\beta+1)}}{(n-1)!}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)(\alpha+\beta+2n-1)} \\
*\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} &= (-1)\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+3)} \\
\alpha_n &= \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \\
\alpha_{n+1} &= (-1)^{n+1}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+3)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)} \\
\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} &= (-1)\frac{(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)} \\
\delta_{n+1} &= \frac{2^{(\alpha+\beta+1)}}{(n+1)!}\frac{\Gamma(\alpha+n+2)\Gamma(\beta+n+2)}{(\alpha+\beta+n+2)(\alpha+\beta+2n+3)} \\
\delta_n &= \frac{2^{(\alpha+\beta+1)}}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n+1)} \\
\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} &= \frac{1}{n}\frac{(\alpha+n+1)(\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n+1)}{(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n+3)} \\
\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} &= \frac{1}{n}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n-1)}{(\alpha+\beta+n)(\alpha+\beta+2n+1)}
\end{aligned}$$

Bulunan değerler (1.26) denkleminde ifade edilmesi ile

$$\begin{aligned}
xp_n(x) &= \frac{a_n}{a_{n+1}}p_{n+1}(x) + c_{nn}p_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n}p_{n-1}(x) \\
&= -2(n+1)\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\left(\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right)^{1/2}p_{n+1}(x) \\
&\quad + \frac{\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}p_n(x) \\
&\quad + \frac{a_{n-1}}{a_n}p_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x\frac{P_n(x)}{(\delta_n)^{1/2}} &= \frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{P_{n+1}(x)}{(\delta_{n+1})^{1/2}} + c_{nn}\frac{P_n(x)}{(\delta_n)^{1/2}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{P_{n-1}(x)}{(\delta_{n-1})^{1/2}} \\
x\frac{P_n(x)}{(\delta_n)^{1/2}} &= (-2)(n+1)\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\frac{(\delta_{n+1})^{1/2}}{(\delta_n)^{1/2}}\frac{P_{n+1}(x)}{(\delta_{n+1})^{1/2}} + \\
&\quad \frac{\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{(\alpha+\beta+2n)\,(\alpha+\beta+2n+2)}\frac{P_n(x)}{(\delta_n)^{1/2}} \\
&\quad + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{P_{n-1}(x)}{(\delta_{n-1})^{1/2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{n-1} &= \frac{(-1)^{n-1}\alpha_{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!{\delta_{n-1}}^{1/2}} \\
a_n &= \frac{(-1)^n\alpha_n}{2^n n!(\delta_n)^{1/2}} \\
\frac{a_{n-1}}{a_n} &= \left((-1)\,\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}2n(\delta_n)^{1/2}\frac{(\alpha+\beta+2n-1)\,(n-1)!\Gamma\,(\alpha+\beta+n)}{\Gamma\,(\alpha+n)\,\Gamma\,(\beta+n)\,2^{\alpha+\beta+1}}\right)
\end{aligned}
$$

rekürans denkleminin tekrar düzenlenmesi ile,

$$
\begin{aligned}
x\frac{P_n(x)}{(\delta_n)^{1/2}} &= (-2)(n+1)\frac{P_{n+1}(x)}{(\delta_{n+1})^{1/2}} + \frac{\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{(\alpha+\beta+2n)\,(\alpha+\beta+2n+2)}\frac{P_n(x)}{(\delta_n)^{1/2}} \\
&\quad + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{P_{n-1}(x)}{(\delta_{n-1})^{1/2}}
\end{aligned}
$$

$$
*\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{P_{n-1}(x)}{(\delta_{n-1})^{1/2}} = \frac{2.\,(\alpha+n)\,(\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n)\,(\alpha+\beta+2n+1)}\frac{P_{n-1}(x)}{(\delta_n)^{1/2}}
$$

elde edilir.Tüm sadeleştirilmelerin yapılması ile Jacobi polinomları için (1.26) denkleminin ifade ettiği rekürans formülü

$$
\begin{aligned}
xP_n(x) &= (-2)(n+1)\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}P_{n+1}(x) + \frac{\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}P_n(x) \\
&\quad + \frac{2(\alpha+n)(\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)}P_{n-1}(x) \\
&= 2.(n+1)\frac{(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)}P_{n+1}(x) \\
&\quad + \frac{\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}P_n(x) \\
&\quad + \frac{2(\alpha+n)(\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)}P_{n-1}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)\,x.P_n(x) &= 2.(n+1) \\
&\quad \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ +n+1 \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ +2n \end{pmatrix} P_{n+1}(x) \\
&\quad + \left(\beta^2-\alpha^2\right) \\
&\quad \begin{pmatrix} \alpha+\beta+ \\ 2n+1 \end{pmatrix} P_n(x) \\
&\quad +2.(\alpha+n)(\beta+n) \\
&\quad \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ +2n+2 \end{pmatrix} P_{n-1}(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir.Yukarıda yapılan işlemlerin açıklaması aşağıdadır.

a_n, b_n katsayıları ile kıyaslandığında; $P_n(x)$'in katsayılarını tutan sırasıyla $(-1)^n \frac{\alpha_n}{(2^n.n!)}$ ve $(-1)^n \frac{\beta_n}{(2^n.n!)}$;

$$a_n = \frac{(-1)^n \alpha_n}{2^n.n!\delta_n^{1/2}}$$

,

$$b_n = \frac{(-1)^n \beta_n}{2^n.n!\delta_n^{1/2}};$$

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \frac{(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = -2(n+1)\left(\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right)^{1/2}$$

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{(\alpha-\beta)n}{(\alpha+\beta+2n)}$$

$$\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}$$

Bu değerler rekürans formülü ile yer değiştirebilir. $k = n+1$, n, $n-1$ için normalize edilmiş Jacobi polinomu olan $\frac{J_k(x,\alpha,\beta)}{\delta_k^{1/2}}$ ile $j_k(x)$ 'in yer değiştirilmesiyle, bu formül;

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)\,x.J_n(x,\alpha,\beta) \;=\; & 2.(n+1) \\ & \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ +n+1 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ +2n \end{pmatrix}. \\ & J_{n+1}(x,\alpha,\beta) \\ & +\left(\beta^2-\alpha^2\right) \\ & \begin{pmatrix} \alpha+\beta+ \\ 2n+1 \end{pmatrix} \\ & J_n(x,\alpha,\beta)+ \\ & 2.(\alpha+n) \\ & (\beta+n) \\ & (\alpha+\beta+2n+2) \\ & J_{n-1}(x,\alpha,\beta)\end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir(Jackson,1941 : 173).

Jacobi polinomlarının diferansiyel denklemlerle olan ilişkisi Pearson diferansiyel denklemini ağırlık fonksiyonu sağladığı gerçeğinden faydanılarak Jacobi polinomu için bulunan diferansiyel denklem aşağıda belirtilen (1.27) denklemi ile ifade edilmiştir.

Bulunan değerler (1.27) denkleminde ifade edilmesi ile

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ +b_1x \\ +b_2x^2 \end{bmatrix} P_n''(x) + \begin{bmatrix} b_1 \\ +a_0 \\ +(2b_2 \\ +a_1)x \end{bmatrix} P_n'(x) - \begin{bmatrix} b_2n \\ (n+1) \\ +a_1n \end{bmatrix} P_n(x) = 0 \qquad (1.27)$$

$$\left(1-x^2\right) J_n''(x,\alpha,\beta) + \begin{bmatrix} \beta-\alpha \\ -(\alpha+\beta+2)x \end{bmatrix} J_n'(x,\alpha,\beta) + n \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ +n+1 \end{bmatrix} J_n(x,\alpha,\beta) = 0$$

ikinci dereceden diferansiyel denklemi elde edilir($Jackson, 1941 : 174$).

İKİNCİ BÖLÜM
PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ VE İLİŞKİLİ POLİNOMLAR

2.1.PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİNİ SAĞLAYAN EĞRİLER VE İLİŞKİLİ POLİNOMLAR

İstatistikte elimizde bulunan veriler gruplandığında bir frekans dağılımı belirtir Bu frekans dağılımı net bir eğri üzerinde çıkabilir, bu eğri matematiksel bir eğri olarak gösterilirse bir denklem kurulabilir ve bu frekans dağılımı kolayca tespit edilebilir ve bu frekans dağılımını veren eğriler için en yaygın olarak kullanılan 12 farklı eğri tipine sahip olan *Pearson Tipi* eğrilerdir(Hildebrant, 1931 : 393).

(1.1) denklemi ile ifade edilen *Pearson Diferansiyel* denklemini sağlayan 12 farklı eğri tipi vardır ve bu eğrilerin denklemleri ve onlardan elde edilen diferansiyel denklemler aşağıdaki gibidir:

1.

$$
\begin{aligned}
y &= y_0\left(1+\frac{x}{a}\right)^{va}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{vb} \\
\frac{dy}{dx} &= va.\left(1+\frac{x}{a}\right)^{va-1}.\frac{1}{a}.\left(1-\frac{x}{b}\right)^{vb}y_0+\left(1+\frac{x}{a}\right)^{va}vb\left(1-\frac{x}{b}\right)^{vb-1}.\left(-\frac{1}{b}\right).y_0 \\
&= v.y_0\frac{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{va}.\left(1-\frac{x}{b}\right)^{vb}}{\left(1+\frac{x}{a}\right).\left(1-\frac{x}{b}\right)}.\frac{-(ax+bx)}{ab} \\
&= \frac{vyx(a+b)}{(a+x)(x-b)}
\end{aligned}
$$

2.

$$\begin{aligned} y &= y_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^m \\ \frac{dy}{dx} &= m.\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{m-1}.\frac{-2x}{a^2}.y_0 \\ &= \frac{-2mx}{a^2}.\frac{a^2}{(a^2-x^2)}.y \\ &= \frac{-2mxy}{(a^2-x^2)} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} y &= y_0\left(1+\frac{x}{a}\right)^{va}.e^{-vx} \\ \frac{dy}{dx} &= \left(1+\frac{x}{a}\right)^{va-1}.e^{-vx}.y_0.\left(\frac{va}{a}-\left(1+\frac{x}{a}\right)v\right) \\ &= \frac{-vx}{a+x}.y \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} y &= y_0\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-m}.e^{-v.\arctan\frac{x}{a}} \\ \frac{dy}{dx} &= y_0\left[\begin{array}{c}(-m).\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-m-1}.\left(\frac{2x}{a^2}\right).e^{-v.\arctan\frac{x}{a}} \\ +\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-m}.\left(-\frac{av}{a^2+x^2}\right).e^{-v.\arctan\frac{x}{a}}\end{array}\right] \end{aligned}$$

$-v.\arctan\frac{x}{a}=u$ olması sebebiyle

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y_0\left[\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-m-1}.e^{-v.\arctan\frac{x}{a}}\left(-\frac{2mx}{a^2}+\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right).\left(-\frac{av}{a^2+x^2}\right)\right)\right] \\ &= y.\left(\frac{-2mx-av}{a^2+x^2}\right) \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} y &= y_0.x^{-h}.e^{-v/x} \\ \frac{dy}{dx} &= -h.x^{-h-1}.e^{-v/x}y_0 + x^{-h}.(v.x^{-2}.e^{-v/x})y_0 \\ &= y_0.x^{-h}.e^{-v/x}\left(-\frac{h}{x}+\frac{v}{x^2}\right) \\ &= y.\left(\frac{v-hx}{x^2}\right) \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} y &= y_0.(x-a)^q.x^{-h} \\ \frac{dy}{dx} &= y_0.q.(x-a)^{q-1}.x^{-h} + y_0(x-a)^q.(-h).x^{-h-1} \\ &= y_0(x-a)^q.x^{-h}\left(-\frac{a}{x-a}+\frac{-h}{x}\right) \\ &= y.\left(\frac{ha+(a-h)x}{x^2-ax}\right) \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} y &= y_0.e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\ \frac{dy}{dx} &= -y_0\frac{x^2}{\sigma^2}.e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\ &= -\frac{x^2}{\sigma^2}.y \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} y &= y_0\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-m} \\ \frac{dy}{dx} &= -m.y_0.\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-m-1}.\frac{1}{a} \\ &= -\frac{m}{a+x}y \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} y &= y_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^m \\ \frac{dy}{dx} &= m.y_0. \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{m-1} .\frac{1}{a} \\ &= \frac{my}{a+x} \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} y &= \frac{n}{\sigma} e^{\pm\frac{x}{\sigma}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{n}{\sigma}(\pm\frac{1}{\sigma} e^{\pm\frac{x}{\sigma}}) \\ &= \pm\frac{1}{\sigma} y \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} y &= y_0.x^{-m} \\ \frac{dy}{dx} &= -m.y_0.x^{-m-1} \\ &= -\frac{m}{x} y \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} y &= y_0 \left(\frac{a_1 + x}{a_2 - x}\right)^p \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{h.(a_1 + a_2 + 2x)}{(a_1 + x).(a_2 + x)} y \end{aligned}$$

Tablo1: PearsonTip, Denklem Ve Pearson Diferansiyel Denklemi

$T\dot{I}p\ I$	$y = y_0\left(1+\frac{x}{a}\right)^{va}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{vb}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{vyx(a+b)}{(a+x)(x-b)}y$
$TipII$	$y = y_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{m}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{-2mxy}{(a^2-x^2)}$
$TipIII$	$y = y_0\left(1+\frac{x}{a}\right)^{va}.e^{-vx}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{-vx}{a+x}.y$
$TipIV$	$y = y_0\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-m}.e^{-v.\arctan\frac{x}{a}}$	$\frac{dy}{dx} = y.\left(\frac{-2mx-av}{a^2+x^2}\right)$
$TipV$	$y = y_0.x^{-h}.e^{-v/x}$	$\frac{dy}{dx} = y.\left(\frac{v-hx}{x^2}\right)$
$T\dot{I}pVI$	$y = y_0.(x-a)^{q}.x^{-h}$	$\frac{dy}{dx} = y.\left(\frac{ha+(a-h)x}{x^2-ax}\right)$
$TipVII$	$y = y_0.e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{\sigma^2}.y$
$TipVIII$	$y = y_0\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-m}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{m}{a+x}y$
$TipIX$	$y = y_0\left(1+\frac{x}{a}\right)^{m}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{my}{a+x}$
$TipX$	$y = \frac{n}{\sigma}e^{\pm\frac{x}{\sigma}}$	$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sigma}y$
$TipXI$	$y = y_0.x^{-m}$	$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sigma}y$
$TipXII$	$y = y_0\left(\frac{a_1+x}{a_2-x}\right)^{p}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{h.(a_1+a_2+2x)}{(a_1+x).(a_2+x)}y$

: $Kaynak$:$Hildebrant, 1931 : 393$

şeklindedir(Hildebrant,1931 : 380).

Hatanın normal eğrisi olarak kullanılan eğriler $TipIII$ ve $TipVII$'dir (Hildebrant, 1931 : 380). Romanovsky, hatanın normal eğrisi Hermite polinomlarının kullanımını gerektirdiği gibi; Pearson, Jacobi Polinomlarını içeren $TipI$ ve $TipI$'in özel bir olayı olan $TipII$'yi buldu, $TipIII$, Laguerre polinomunu içerir(Hildebrant, 1931 : 396).$TipIV$ eğrisinin genelleştirilmesinde $\theta = \arctan(x/a)$ olmak üzere; $P_n(m,x) = (a^2+x^2)^m e^{v\theta}.\frac{d^n}{dx^n}\left[(a^2+x^2)^{-m+n}.e^{-v\theta}\right]$ polinomu kullanılır. $P_n(m,x) = (a^2+x^2)^m e^{v\theta}.\frac{d^n}{dx^n}\left[(a^2+x^2)^{-m+n}.e^{-v\theta}\right], \rho(x) = (a^2+x^2)^{-m}e^{-v\arctan x/a}, \phi_n(x) = (a^2+x^2)^{-m+n}e^{-v\arctan x/a}$ ve

$$\frac{\rho^{'}(x)}{\rho(x)} = \frac{a_0+a_1x}{b_0+b_1x+b_2x^2}$$

bilgisi ile

$$\rho^{'}(x) = (a^2+x^2)^{-m-1}.e^{-v\arctan x/a}.(-2mx-va)$$

$$\frac{\rho^{'}(x)}{\rho(x)} = \frac{(-2mx - va)}{(a^2 + x^2)}$$

$a_0 = -va, a_1 = -2m, b_0 = a^2, b_1 = 0, b_2 = 1$ elde edilir. 1.27 denkleminde ifade edilmesi ile

$$(a^2 + x^2)P_n^{''}(x) + [-va + (2 - 2m)x]\, P_n^{'}(x) - [n(n+1) - 2mn]\, P_n(x) = 0$$

İfadesi elde edilir(Hildebrant, 1931 : 397).

$TipV$ eğrisinin genelleştirilmesinde $P_n(h,x) = x^h.e^{\frac{v}{x}}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{-h+2n}e^{-\frac{v}{x}}\right)$ polinomu kullanılır ve ağırlık fonksiyonu $\rho(x) = x^{-h}.e^{-\frac{v}{x}}$,

$$\rho^{'}(x) = e^{-\frac{v}{x}}.x^{-h-1}.(-h + \frac{v}{x})$$

$$\frac{\rho^{'}(x)}{\rho(x)} = \frac{-hx + v}{x^2}$$

$a_0 = v, a_1 = -h, b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 = 1$

$$(x^2)P_n^{''}(x) + [v + (2 - h)x]\, P_n^{'}(x) - [n(n + 1 - h)]\, P_n(x) = 0$$

elde edilir, ikinci dereceden diferansiyel denklemi sağlar(Hildebrant, 1931 : 380).

$TipVI$ eğrisinin genelleştirilmesinde Romanovsky; $P_n(-h,q,x) = (x-a)^{-q}.x^h.\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^{q+n}.x^{-h+n}\right]$ elde etmiştir ve

$$\begin{aligned}
P_n(-h,q,x) &= (x-a)^{-q}.x^h.\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^{q+n}.x^{-h+n}\right] \\
\rho(x) &= (x-a)^q.x^{-h} \\
\phi_n(x) &= (x-a)^{q+n}.x^{-h} \\
\rho^{'}(x) &= (x-a)^q.x^{-h}\left(\frac{q}{x-a} + \frac{-h}{x}\right) \\
\frac{\rho^{'}(x)}{\rho(x)} &= \frac{x(q-h) + ha}{x^2 - ax}
\end{aligned}$$

$$b_0 = 0, b_1 = -a, b_2 = 1, a_0 = ha, a_1 = q - h$$

$$x.(x-a)P_n^{''}(x) + [(1-h)(x-a) + (q+1)x]\, P_n^{'}(x) - [n(n+1+q-h)]\, P_n(x) = 0$$

İkinci dereceden diferansiyel denklemi sağlar(Hildebrant,1931 : 396).

Romanavsky $y = A_0u_0 + A_1u_1 + A_2u_2 + ...$ şeklinde $u_0, u_{1,}u_2, ...$ x'e bağlı bir fonksiyon ve $A_0, A_{1,}A_2, ...$ sabiti göstermek üzere $Tip\ I - II - III$ ve $TipVII$ eğrilerini sonsuz serilerle ifade etmiştir.

$TipI$ eğrisi $y = y_0\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{va}\left(1 - \frac{x}{b}\right)^{vb}$ için $\alpha > -1, \beta > -1$ a ve b herhangi bir sabit olmak üzere $u_0 = (a+x)^{\alpha}(b-x)^{\beta\prime}$dır. Bu fonksiyon $(-a, b)$ aralığında sürekli ve tanımlıdır(Romanovsky,1924 : 107)

$$\begin{aligned}
u_k &= D^k(a+x)^{\alpha+k}(b-x)^{\beta+k}, (k = 1, 2, 3...) \\
u_k &= u_0\phi_k \\
(\alpha+i)_k &= (\alpha+i)\,(\alpha+i+1)\,...\,(\alpha+k) \\
(\beta+h)_k &= (\beta+h)\,(\beta+h+1)\,...\,(\beta+h) \\
\phi_k &= (\alpha+1)_k\,(b-x)^k - \frac{k}{1}\,(\alpha+2)\,(\beta+k)_k\,(b-x)^{k-1}\,(a+x) + ... + \\
&\quad (-1)^k(\beta+1)_k(a+x)^k
\end{aligned}$$

ϕ_k;Jacobi polinomlarıdır.Ortogonal ve normalize durumu

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{b} u_0.\phi_k.\phi_h dx &= 0, h \neq k \\
\int_{-a}^{b} u_0.\phi_k.\phi_h dx &= J_k, h = k
\end{aligned}$$

sağlar(Romanovsky,1924 : 108) Ayrıntılı çözümü *bölüm* 1.2.3 te ele alınmıştır.

$h = k$ durumu için k kez kısmi integrasyondan sonra $z = \frac{a+x}{a+b}$ dönüşümü ile $(-a, b)$ den $(0, 1)$ aralığında

$$\begin{aligned}
J_k &= \int_{-a}^{b} u_0.\phi_k.\phi_h dx \\
&= (-1)^k.D^k.\phi_k \int_{-a}^{b} (a+x)^{\alpha+k} (b-x)^{\beta+k} dx \\
&= (-1)^k.D^k.\phi_k J_k^{'} \\
J_k^{'} &= \int_{-a}^{b} (a+x)^{\alpha+k} (b-x)^{\beta+k} dx \\
&= (a+b)^{\alpha+\beta+2k+1} \int_0^1 z^{\alpha+k} (1-z)^{\beta+k} dz \\
&= (a+b)^{\alpha+\beta+2k+1} B(\alpha+k+1, \beta+k+1) \\
&= (a+b)^{\alpha+\beta+2k+1} . \frac{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\beta+k+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2k+2)}
\end{aligned}$$

gama fonksiyonun $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ özelliğinden faydanılması ile $\Gamma(\beta+k+1) = (\beta)_k \Gamma(\beta); \Gamma(\alpha+k+1) = (\alpha)_k \Gamma(\alpha)$,

$$\begin{aligned}
J_k^{'} &= (a+b)^{\alpha+\beta+2k+1} . \frac{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\beta+k+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2k+2)} \\
&= (a+b)^{\alpha+\beta+2k+1} . \frac{(\alpha)_k (\beta)_k \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)_{2k+1} \Gamma(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

$J_k = (-1)^k.D^k.\phi_k J_k^{'}$ jacobi polinomunun

$$(-1)^k.D^k.\phi_k = k!(\alpha+\beta+k+1)_{2k}$$

ifadesinde

$$\lambda_k = k!(\alpha+\beta+k+1)_{2k} (a+b)^{\alpha+\beta+2k+1} . \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\alpha+\beta)_{2k+1}}$$

ile ifade edilirse

$$J_k = \lambda_k \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

elde edilir(Romanovsky,1924 : 109).

$y = A_0u_0 + A_1u_1 + A_2u_2 + ...$ serisi sağ kısmındaki terimler $(-a, b)$ aralığında yakınsak olsun ve kısaca $y = \sum_{h=0}^{\infty} A_h u_h$ gösterilmek üzere $.\phi_0 = 1, \phi_1, \phi_2, ...$ polinomlarının herhangi biri ile terim terime çarpılıp $(-a, b)$ aralığında integrali alındığında

$$\begin{aligned} y &= \sum_{h=0}^{\infty} A_h u_h \\ S_k &= \int_{-a}^{b} y\phi_k dx \\ \int_{-a}^{b} y\phi_k dx &= \int_{-a}^{b} \phi_k \sum_{h=0}^{\infty} A_h u_h dx \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} A_h \int_{-a}^{b} u_0\phi_h\phi_k dx \\ S_k &= A_k J_k \\ A_k &= \frac{S_k}{J_k}, \qquad (k = 0, 1, 2, ...) \end{aligned}$$

A_k,katsayıları bulunur.$S_0 = \int_{-a}^{b} ydx'tir$. Bu bilgiler altında;

$$\begin{aligned} y &= A_0u_0 + A_1u_1 + A_2u_2 + ... \\ y &= \frac{S_0}{J_0}u_0 + \frac{S_1}{J_1}u_1 + \frac{S_2}{J_2}u_2 + ... \end{aligned}$$

$J_k = \lambda_k \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, eşitlikte yerinde ifade edildiğinde

$$\begin{aligned} y &= \frac{S_0}{\lambda_0}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}u_0 + \frac{S_1}{\lambda_1}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}u_1 + ... \\ y &= \frac{S_0}{\lambda_0}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}u_0\left[1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\frac{S_1}{S_0}\phi_1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_2}\frac{S_2}{S_0}\phi_2 + ...\right] \end{aligned}$$

elde edilir(Romanovsky,1924 : 110).

Bu serinin ilk terimi $y = \frac{S_0}{\lambda_0}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}u_0$ verilen y fonksiyonu için bir yaklaşım olarak ilişkilendirilir.

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= (a+b)^{\alpha+\beta+1}.\frac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} \\
y &= \frac{S_0}{\lambda_0}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}u_0 \\
&= \frac{S_0}{(a+b)^{\alpha+\beta+1}.}\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}{\alpha.\beta}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(a+x)^{\alpha}.(b-x)^{\beta} \\
&= \frac{S_0}{(a+b)^{\alpha+\beta+1}.}.\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}(a+x)^{\alpha}.(b-x)^{\beta}
\end{aligned}$$

$\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}=v$ olsun.y fonksiyonunun sağ tarafını b^{β}, a^{α} ile çarpılıp bölünmesi ile

$$\begin{aligned}
y &= \frac{S_0}{(a+b)^{\alpha+\beta+1}.}.\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}a^{\alpha}b^{\beta}(\frac{a+x}{a})^{\alpha}.(\frac{b-x}{b})^{\beta} \\
&= \frac{S_0}{(a+b)(a+b)^{\alpha+\beta}.}.\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\left(\frac{\alpha}{v}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{v}\right)^{\beta}(1+\frac{x}{a})^{\alpha}.(1-\frac{x}{b})^{\beta} \\
&= \frac{S_0}{(a+b)\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{v^{\alpha+\beta}}.}.\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}.\frac{\alpha^{\alpha}.\beta^{\beta}}{v^{\alpha+\beta}}.(1+\frac{x}{a})^{\alpha}.(1-\frac{x}{b})^{\beta} \\
&= \frac{S_0}{(a+b)}\frac{\alpha^{\alpha}.\beta^{\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}(1+\frac{x}{a})^{\alpha}.(1-\frac{x}{b})^{\beta}
\end{aligned}$$

$y_0=\frac{S_0}{(a+b)}\frac{\alpha^{\alpha}.\beta^{\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}$ olmak üzere

$$y=y_0(1+\frac{x}{a})^{\alpha}.(1-\frac{x}{b})^{\beta}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{a} &= \frac{\beta}{b}=v \\
y &= y_0(1+\frac{x}{a})^{\alpha}.(1-\frac{x}{b})^{\beta} \\
y &= y_0(1+\frac{x}{a})^{av}.(1-\frac{x}{b})^{bv}
\end{aligned}$$

Bu ifade $TipI$ eğrisinin frekans denklemini temsil eder(Romanovsky,1924 : 111).

$$\left(1-x^2\right)y^{''}+2\left[\alpha-\beta-\left(\alpha+\beta\right)x\right]y^{'}+n\left[n-1+2\left(\alpha+\beta\right)\right]y=0$$

ikinci dereceden diferansiyel denklemi sağlar (Fujiwara, 1925 : 1)

2.2. PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN POLİNOMSAL İFADESİ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{a_0+a_1x}{b_0+b_1x+b_2x^2}$$

Pearson diferansiyel denkleminin payı birinci dereceden ve paydası ikinci dereceden bir polinomdur. Pay N ve paydanın D ile gösterimi aşağıda ifade edildiği gibidir.

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{N}{D}$$

Teorem 2.1 : $\frac{dy}{dx}=\frac{N}{D}y$'nin bir çözümü ise, $\frac{D^n}{y}\frac{d^ny}{dx^n}$ en fazla n.dereceden bir polinomdur(Hildebrant, 1931 : 399).

İspat: $n=1$ için pay birinci dereceden bir polinom olan N ifadesini $P_1(x)$ olduğu açıktır ; $D.\frac{dy}{dx}=Ny, \frac{1}{y}D\frac{dy}{dx}=P_1(x)$ için sağlar. $D.\frac{dy}{dx}=Ny$ ifadesinin diferansiyellenmesi ile $D.\frac{d^2y}{dx^2}+D^{'}\frac{dy}{dx}=N.\frac{dy}{dx}+N^{'}y$ elde edilir. İfadenin D ile çarpılması durumunda ;

$$D^2\frac{d^2y}{dx^2}+D.D^{'}\frac{dy}{dx}=N.D.\frac{dy}{dx}+N^{'}Dy \tag{2.1}$$

ifadesine dönüşür. $D.\frac{dy}{dx}=Ny$ ifadesi (2.1) eşitliğinde yerine koyulması ile denklem $D^2\frac{d^2y}{dx^2}+D^{'}Ny=N.N.y+N^{'}Dy$ şeklini alır ve y parantezine alınarak;

$$D^2\frac{d^2y}{dx^2}=\left(N^2-ND^{'}+N^{'}D\right)y \tag{2.2}$$

elde edilir.$\left(N^2-ND^{'}+N^{'}D\right)$ ikinci dereceden bir polinomdur . $D^{'}$ lineer, $N^{'}$ sabit, $D=b_0+b_1x+b_2x^2, N=a_0+a_1x, N^{'}=a_1$'dir.

Yukaridaki belirtilen değerler ile (2.2) denkleminde gösterilmiş şekli aşağıdaki eşitlikte ifade edilmiştir.

$$D^2\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\left(\begin{array}{c} a_0^2 - a_0b_1 + a_0b_1 + x(2a_0a_1 \\ -2a_0b_2 - a_1b_1 - 2a_1b_2 + a_1b_1 \end{array}\right)x + (a_1^2 + a_1b_2)x^2\right]y$$

$D^{'}$, lineer; $N^{'}$sabit ve $\left(N^2 - ND^{'} + N^{'}D\right)$ ikinci dereceden bir polinom olduğu açıktır ve n için bu ifadenin genelleştirilmiş şekli; N, D ve türevlerine bağlı olarak n.dereceden bir polinoma karşılık gelir ve $D^n.\frac{d^ny}{dx^n} = P_n(x)y$ şeklinde ifade edilir. $m \leq n$ için $D^n.\frac{d^ny}{dx^n} = P_n(x)y$ eşitliğinin diferansiyellenmesi ile

$$nD^{n-1}D^{'}\frac{d^ny}{dx^n} + D^n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}y = P_n(x)\frac{dy}{dx} + \frac{dP_n(x)}{dx}y$$

elde edilir ve denklemin her iki tarafının D ile çarpılması ile;

$$nD^nD^{'}\frac{d^ny}{dx^n} + D^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}y = DP_n(x)\frac{dy}{dx} + D\frac{dP_n(x)}{dx}y \tag{2.3}$$

ifadesine dönüşür ve bu eşitlik $\frac{dy}{dx} = \frac{N}{D}y$ ve $D^n.\frac{d^ny}{dx^n} = P_n(x)y$ eşitliklerinin faydanılması ile yeniden düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} D^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} &= D.P_n(x).\frac{dy}{dx} - nD^nD^{'}\frac{d^ny}{dx^n} + D.\frac{dP_n(x)}{dx}y \\ P_{n+1}(x)y &= D.P_n(x)\frac{N}{D}y - nD^{'}P_n(x)y + D.\frac{dP_n(x)}{dx}y \\ &= \left[NP_n(x)y - nD^{'}P_n(x)y + D.\frac{dP_n(x)}{dx}y\right] \\ &= y\left[P_n(x)\left[N - nD^{'}\right] + D.\frac{dP_n(x)}{dx}\right] \end{aligned}$$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x)\left[N - nD^{'}\right] + D.\frac{dP_n(x)}{dx} \tag{2.4}$$

elde edilir. (2.4) eşitliği ile bir rekürans bağıntısıdır ve $(n+1)$. dereceden polinomun , n. dereceden polinom ve onun ilk türevinin birleşimi ile elde edilebileceğini

gösterir (Hildebrant,1931 : 400).

Hermite, Legendre, Laguerre ve Jacobi polinomları ortogonal polinomların özel türleridir. α, β'nın varlığı sebebıyle ortaya çıkan k, Jacobi ve Laguerre polinomları için ortogonal polinomların gösterimi $P_n(k,x)$ ile ifade edilir. $P_n(k,x)$ ile $P_n(x)$ arasındaki fark $P_n(x)$ 'te teorik olasılık yoğunluk fonksıyonu $y=f(x)$ olarak alınır, $P_n(k,x)$ lerde ise k herhangi bir reel sayı olmak üzere $D^k y$ lerden oluşur ve bu $y=f(x)$ için Pearson diferansiyel denklemini sağlayan durumlar, $u=D^k y$ ler içinde sağlanır.

Teorem 2.2: $y, \frac{dy}{dx} = \frac{N}{D}y'$nin bir çözümü ise; $\frac{1}{y}D^{n-k}\frac{d^n}{dx^n}(D^k y)$,x en fazla n. dereceden bir polinom olmak üzere $P_n(k,x)'$in bir polinomudur.$k=n$ ise $\frac{1}{y}\frac{d^n}{dx^n}(D^n y)$, en fazla n. dereceden bir polinomdur(Hildebrant,1931:401).

İspat: $\frac{dy}{dx}$ ifadesinde $y=f(x)$ yerine $u=D^k y$ için

$$\frac{d}{dx}(D^k y) = kD^{k-1}D'y + D^k.\frac{dy}{dx}$$

ve $\frac{dy}{dx} = \frac{N}{D}y$ denklemde yerine koyulur

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(D^k y) &= D^{k-1}y(k.D' + N)\\ &= D^k.y\left(\frac{N+kD'}{D}\right)\\ \frac{du}{dx} &= \left(\frac{N+kD'}{D}\right).u\end{aligned}$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{N+kD'}{D}$$

elde edilir. Payda bulunan $N+kD'$ birinci dereceden bir polinomu ifade eder ve payda ise D ikinci dereceden bir polinomu ifade eder,dolayısı ile $\frac{1}{u}\frac{du}{dx} \equiv \frac{N}{D}$ ve Pearson diferansiyel denkleminin özelliklerini sağlar. Genel olarak n. dereceden ortogonal polinomların diğer gösterimi

$$\begin{aligned} D^n \frac{d^n y}{dx^n} &= P_n(x) y \\ P_n(x) &= \frac{1}{y} D^n \frac{d^n y}{dx^n} \end{aligned}$$

ile gösterilir. $f(x) = D^k y$

$$\begin{aligned} P_n(k,x) &= \frac{1}{D^k y} . D^n . \frac{d^n (D^k y)}{dx^n} \\ &= \frac{1}{y} . D^{n-k} . \frac{d^n (D^k y)}{dx^n} \end{aligned}$$

İle ifade edilir. (2.4) denklemi ile ifade edilen rekürans ilişkisinin $P_n(k,x)$ 'ler için gösterimi aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} P_n(k,x) &= \frac{1}{y} . D^{n-k} . \frac{d^n (D^k y)}{dx^n} \\ P_n(k+1,x) &= \frac{1}{D^{k+1} y} D^n . \frac{d^n (D^{k+1} y)}{dx^n} \\ &= \frac{1}{y} . D^{n-k-1} \frac{d^n}{dx^n} (D^{k+1} y) \\ y.P_n(k+1,x) &= D^{n-k-1} . \frac{d^n}{dx^n} (D^{k+1} y) \\ (y.P_n(k+1,x))' &= (n-k-1) . D^{n-k-2} . D' . \frac{d^n}{dx^n} D^{k+1} y + D^{n-k-1} . \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} . D^{k+1} y \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade

$$(y.P_n(k+1,x))' = P_n(k+1,x) . \frac{dy}{dx} + \frac{dP_n(k+1,x)}{dx} . y \qquad (2.5)$$

ve (2.5) denklemi denktir .(2.4) ve (2.5) eşitliklerinin sağ kısımları brbirine eşitlenerek ve her iki tarafının D ile çarpılması ile,

$$(n-k-1)\,D^{n-k-1}.D^{'}.\frac{d^n}{dx^n}(D^{k+1}y)+D^{n-k}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(D^{k+1}y) \;=\; P_n(k+1,x).\; D.\frac{N}{D}y \;+D.\; \frac{dP_n(k+1,x)}{dx}.y$$

$$(n-k-1)\,D^{'}yP_n(k+1,x)+yP_{n+1}(k+1,x) \;=\; y\begin{pmatrix} N \\ P_n(k+1,x) \\ + \\ D. \\ \frac{dP_n(k+1,x)}{dx} \end{pmatrix}$$

$$y.\Big((n-k-1)\,D^{'}P_n(k+1,x)+P_{n+1}(k+1,x)\Big) \;=\; y\begin{pmatrix} (N. \\ P_n(k+1,x) \\ +D.\frac{dP_n(k+1,x)}{dx}) \end{pmatrix}$$

$$P_{n+1}(k+1,x)=\Big[N+(k-n+1)D^{'}\Big]\,P_n(k+1,x)+D.\frac{dP_n(k+1,x)}{dx} \qquad (2.6)$$

elde edilir (Hildebrant,1931 : 401).(2.6) denklemi ile $P_{n+1}(k+1,x)$'ler için rekürans ilişkisini gösterir ve bu ilişki; $(n+1)$. dereceden polinom , n. dereceden polinom ve n. dereceden polinomun türeviyle elde edilebilir.

$k=n$ için (2.6) denklemi

$$P_{n+1}(n+1,x)=\Big[N+D^{'}\Big]\,P_n(n+1,x)+D.\frac{dP_n(n+1,x)}{dx} \qquad (2.7)$$

(2.7) ile ifade edilir(Hildebrant,1931 : 401).

Laguerre ve Jacobi polinomları ; (2.6) denklemini , (2.4) denklemi ise Hermite polinomlarını sağlar. $N=a_0+a_1x$ birinci dereceden bir polinom olması sebebiyle ve $\frac{dy}{dx}=\frac{N}{D}y\;\;P_1(x)$ i sağlar;$D^{'''}=0, N^{''}=0$ değerleri göz önünde

bulundurulması ile (2.4) rekürans bağıntısından yararlanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{N}{D} &= \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \\
P_1(x) &\equiv D\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \\
&\equiv D\frac{1}{y}\frac{N}{D}y \\
P_1(x) &\equiv N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= P_1(x)(N - D^{'}) + D.\frac{dP_1(x)}{dx} \\
&= N(N - D^{'}) + D.N^{'} \\
&= N^2 - ND^{'} + N^{'}D \\
P_3(x) &= P_2(x)(N - 2D^{'}) + D.\frac{dP_2(x)}{dx} \\
&= (N^2 - ND^{'} + N^{'}D)(N - 2D^{'}) + D.\frac{d}{dx}(N^2 - ND^{'} + N^{'}D) \\
&= N^3 - 3N^2D^{'} + 3NN^{'}D^{'} + 2N(D^{'})^2 - 2N^{'}D^{'}D - NDD^{''} \\
P_4(x) &= P_3(x)(N - 3D^{'}) + D.\frac{dP_3(x)}{dx} \\
&= \left(N^3 - 3N^2D^{'} + 3NN^{'}D^{'} + 2N(D^{'})^2 - 2N^{'}D^{'}D - NDD^{''}\right)\left(N - 3D^{'}\right) \\
&\quad +D.\frac{d}{dx}\left(N^3 - 3N^2D^{'} + 3NN^{'}D^{'} + 2N(D^{'})^2 - 2N^{'}D^{'}D - NDD^{''}\right) \\
&= \left(N^3 - 3N^2D^{'} + 3NN^{'}D^{'} + 2N(D^{'})^2 - 2N^{'}D^{'}D - NDD^{''}\right)\left(N - 3D^{'}\right) \\
&\quad +D.\begin{pmatrix} 3N^2N^{'} - 6NN^{'}D^{'} - 3N^2D^{''} + 3(N^{'})^2D \\ +3NN^{''}D + 3NN^{'}D^{'} + 2N^{'}(D^{'})^2 + 4ND^{'}D^{''} - 2N^{''}D^{'}D \\ -2N^{'}D^{''}D - 2N^{'}(D^{'})^2 - N^{'}DD^{''} - ND^{'}D^{''} - NDD^{''} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= N^4 - 6N^3D^{'} + 6N^2N^{'}D + 11N^2(D^{'})^2 \\
&\quad -14NN^{'}DD^{'} - 4N^2DD^{''} - 6N(D^{'})^3 + 6N^{'}D(D^{'})^2 \\
&\quad +6NDD^{'}D^{''} + 3(N^{'})^2D^2 - 3N^{'}D^2D^{''}
\end{aligned}$$

Pearson difreansiyel denkleminin polinomsal ilişkisini gösteren ilk 4 polinom N ve D'ye bağlı olarak ifadesi elde edilmiştir(Hildebrant,1931 : 402).

Pearson Diferansiyel denkleminin pay N ve payda D'ye bağlı genel gösterimi EK 1 de ifade edilen *Leibniz* formülü kullanılarak elde edilen rekürans ilişkisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{N}{D}y \\ D.\frac{dy}{dx} &= Ny \end{aligned}$$

Pearson diferansiyel denkleminin sol ve sağ kısmının EK 1 'de ifade edilen Leibniz formulü ile açılmış ifadesi sırasıyla

$$D.\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \binom{n}{1}D^{'}\frac{d^{n}y}{dx^{n}} + \binom{n}{2}D^{''}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

$$N\frac{d^{n}y}{dx^{n}} + \binom{n}{1}N^{'}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

dir ve bu denklemleri $D.\frac{dy}{dx} = Ny$'de yerine koyulması ile

$$\begin{aligned} (D.\frac{dy}{dx})^{(n)} &= (Ny)^{(n)} \\ D.\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + nD^{'}\frac{d^{n}y}{dx^{n}} + \frac{n(n-1)}{2!}D^{''}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} &= N.\frac{d^{n}y}{dx^{n}} + nN^{'}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \end{aligned}$$

ve bu ifadenin her iki tarafımda D^n ile çarpılıpı düzenlenmesi ile

$$D^{n+1}.\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + D^{n}(nD^{'} - N)\frac{d^{n}y}{dx^{n}} + D^{n}\left[\frac{n(n-1)}{2!}D^{''} - nN^{'}\right]\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 0$$

sonucuna ulaşılır. $P_n(x) = \frac{1}{y}D^n\frac{d^ny}{dx^n}$'den $D^n.\frac{d^ny}{dx^n} = y.P_n(x)$ olduğu görülür. Bu ifade $n = n-1$ için ifade edildiğinde ; $D^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = yP_{n-1}(x)$ ifadesinin $D^{n+1}.\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + D^{n}(nD^{'} - N)\frac{d^{n}y}{dx^{n}} + D^{n}\left[\frac{n(n-1)}{2!}D^{''} - nN^{'}\right]\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 0$ ifadesinde

gösterilmesi

$$y\left[P_{n+1}(x)+(nD^{'}-N)P_n(x)+nD\left[\frac{(n-1)}{2!}D^{''}-N^{'}\right]P_{n-1}(x)\right]=0$$

ve.ifadenin y ile bölünmesi ile $(n+1)$. dereceden polinomun n ve $(n-1)$. dereceden rekürans ilişkisi (2.8) denklemi ile ifade edilir.

$$\left[P_{n+1}(x)+(nD^{'}-N)P_n(x)+nD\left[\frac{(n-1)}{2!}D^{''}-N^{'}\right]P_{n-1}(x)\right]=0 \qquad (2.8)$$

elde edilir(Hildebrant,1931 : 403). (2.4) ve (2.8) denklemi birbirlerine eşit denklemlerdir ve dolayısı ile $n\left[N^{'}-\frac{(n-1)}{2}D^{''}\right]DP_{n-1}(x)=D.\frac{dP_n(x)}{dx}$‘ dir ve böylece

$$\frac{dP_n(x)}{dx}=(n).\left[N^{'}-\frac{(n-1)}{2}D^{''}\right]P_{n-1}(x) \qquad (2.9)$$

eşitliği ile yeni bir n ve $(n-1)$. ‘den polinomlara bağlı rekürans ilişkisi elde edilmiş olur veya (2.9) rekürans ilişkisi $(n+1)$. dereceden polinomun türevi baz alınarak yeniden

$$\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}=(n+1)\left[N^{'}-\frac{(n)}{2}D^{''}\right]P_n(x)$$

elde edilir(Hildebrant, 1931 : 404).

$D=b_0+b_1x+b_2x^2, D^{'}=b_1+2b_2x, D^{''}=2b_2, N=a_0+a_1x, N^{'}=a_1, N^{''}=0$

$$\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}=(n+1)\,(a_1-nb_2)\,P_n(x) \qquad (2.10)$$

(2.10) eşitliği ile $(n+1)$. dereceden polinomun n. dereceden polinomla olan rekürans ilişkisini gösteren denklem ifade edilmiş olur. 2.2 bölümünde ,bazı kaynaklarda Hermite Polinomlarını $\rho(x)=e^{-x^2}$ için n. dereceden

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

ile ifade edilmiştir ve incelemeler bu gösterime göre yapılmıştır.

EK 4 'de elde edilen $\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x)$ ifadesi ve $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$ rekürans ilişkisinden faydanılması ile elde edilecek eşitlik aşağıdaki gibidir.

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

$$\begin{aligned}
H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \\
H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - H_n^{'}(x) \\
-H_{n+1}(x) &= -2xH_n(x) + H_n^{'}(x) \\
\varphi^{n+1}(x) &= (-1)^{n+1}.H_{n+1}(x)e^{-x^2} \\
\varphi^{n+1}(x) &= (-1)^n \left[-2xe^{-x^2}H_n(x) + e^{-x^2}H_n^{'}(x)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$n = n - 2$ için $\varphi^{n-1}(x) = (-1)^{n-1}e^{-x^2}H_{n-1}(x)$'dir.

$$\begin{aligned}
\varphi^{n+1}(x) + 2x\varphi^n(x) + 2n\varphi^{n-1}(x) &= 0 \\
\left[(-1)^{n+1}H_{n+1}(x)e^{-x^2}\right] + 2x.(-1)^n e^{-x^2}.H_n(x) + 2n(-1)^{n-1}H_{n-1}(x) &= 0 \\
\left[H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x)\right]e^{-x^2} &= 0 \\
\left[H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x)\right] &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir(Hildebrant,1931 : 395).

$\rho(x) = e^{-x^2}$ için yukarıda $[H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x)] = 0$, $(n+1).,(n).$ *ve* $(n-1).$ dereceden rekürans formulü ile $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n^{'}(x)$ ifadeleri eşittir. $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n^{'}(x)$ ve $[H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x)] = 0$ eşitliklerinin $(n+1).$ ve $(n).$dereceden Hermite polinomlarının katsayıları eşit olması sebebiyle geriye kalan $H_n^{'}(x) = 2nH_{n-1}(x)$ olmasını gerektirir. (2.4) denkleminin diferansiyellenmesi

ile;

$$P_{n+1}^{'}(x)+(nD^{''}-N^{'})P_n(x)+(nD^{'}-N)P_n^{'}(x)-D^{'}P_n^{'}(x)-D.P_n^{''}(x)=0$$

elde edilir(Hildebrant,1931 : 404)

$$.P_{n+1}^{'}(x)+(nD^{''}-N^{'})P_n(x)+(nD^{'}-N)P_n^{'}(x)-D^{'}P_n^{'}(x)-D.P_n^{''}(x)=0$$

denkleminde; (2.9) denkleminin $n=n+1$ için ifadesi ile gösterimi olan $\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}=(n+1).\left[N^{'}-\frac{n}{2}D^{''}\right]P_n(x)$ yerinde ifade edilmesi ile ,

$$\begin{aligned}(n+1)\begin{bmatrix} N^{'} \\ -\frac{n}{2}D^{''}\end{bmatrix}P_n(x)+\begin{bmatrix} nD^{''} \\ -N^{'}\end{bmatrix}P_n(x)+P_n^{'}(x)\begin{bmatrix} nD^{'} \\ -N-D^{'}\end{bmatrix}-dP_n^{''}(x) &= 0\\ DP_n^{''}(x)+\begin{bmatrix} N \\ -(n-1)D^{'}\end{bmatrix}P_n^{'}(x)-n\begin{bmatrix} N^{'} \\ -\frac{(n-1)D^{''}}{2}\end{bmatrix}P_n(x) &= 0\end{aligned}$$

ikinci dereceden diferansiyel denklemi sağlayan ilişki elde edilir(Hildebrant:1931 : 404).

Hermite polinomları ikinci dereceden diferansiyel denklemi sağlar ve $H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+H_n^{'}(x)=0$ in diferansiyellenmesi ile $H_{n+1}^{'}(x)-2H_n(x)-2xH_n^{'}(x)+H_n^{''}(x)=0$ elde edilir ve $H_{n+1}^{'}(x)=2(n+1)H_n(x)$ eşitliğinden faydalanılması ile $H_{n+1}^{'}(x)-2xH_n(x)-2xH_n^{'}(x)+H_n^{''}(x)=0$ denkleminde yerine koyulması ile

$$\begin{aligned}H_{n+1}^{'}(x)-2H_n(x)-2xH_n^{'}(x)+H_n^{''}(x) &= 0\\ H_n^{''}(x)-2xH_n^{'}(x)+(2n)H_n(x) &= 0\end{aligned}$$

elde edilir(Hildebrant, 1931 : 395). Elde edilen denklemi;

$$DP_n^{''}(x)+\left[N-(n-1)D^{'}\right]P_n^{'}(x)-n\left[N^{'}-\frac{(n-1)D^{''}}{2}\right]P_n(x)=0$$

ikinci dereceden diferansiyel denklemi $P_n(x)$' ler için ifade edilir, $P_n(k,x)$'ler için ikinci dereceden diferansiyel denklemi sağlayan denklemin elde edilmesinde ilk önce $P_n(x)$'ler için bulunan 2.4 denklemini ve $P_n(k,x)$'ler için sağlanan (2.6) denkleminden faydalanılması ile ;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}D^k y &= \frac{N}{D}D^k y \\ D\frac{d}{dx}D^k y &= ND^k y \end{aligned}$$

eşitliğinin EK 1'de Leibniz formülünün kullanılması ile sırasıyla

$$D.\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}D^k y + \binom{n}{1}D'\frac{d^n}{dx^n}D^k y + \binom{n}{2}D''\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}D^k y$$

ve

$$N.\frac{d^n}{dx^n}D^k y + \binom{n}{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}D^k y$$

elde edilir. $N.\frac{d^n}{dx^n}D^k y + \binom{n}{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}D^k y$ denkleminin D^n ile çarpılması ile bu ifadeler $D\frac{d}{dx}D^k y = ND^k y$ eşitliğinde yerine yazılması ile $ND^n\frac{d^n D^k y}{dx^n} + nD^n N'\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}D^k$

$$D^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}D^k y + nD^n D'\frac{d^n}{dx^n}D^k y + \frac{n.(n-1)}{2}D^n D''\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}D^k y = ND^n\frac{d^n D^k y}{dx^n} + nD^n N'\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}D^k$$

elde edilir ve bu eşitlik

$$\begin{aligned} P_n(k,x) &= \frac{1}{D^k y}D^n\frac{d^n}{dx^n}D^k y \\ P_{n-1}(k,x) &= \frac{1}{D^k y}D^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}D^k y \\ P_{n+1}(k,x) &= \frac{1}{D^k y}D^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}D^k y \end{aligned}$$

bilgileri gözününde tutulması ile

$$\begin{aligned} D^k y P_{n+1}(k,x) + nD^{'} D^k y P_n(k,x) + \frac{n(n-1)}{2}.D.D^{''} P_{n-1}(k,x).D^k y &= ND^k y \\ & P_n(k,x) \\ & +nD \\ & N^{'} D^k y \\ & P_{n-1}(k,x) \end{aligned}$$

$D^k y$ parantezine alınarak gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra

$$P_{n+1}(k,x) + (nD^{'} - N)P_n(k,x) + n\left[\frac{(n-1)}{2}D^{''} - N^{'}\right] DP_{n-1}(k,x) = 0 \quad (2.11)$$

(2.11) elde edilir.(2.6) denkleminden

$$P_{n+1}(k,x) = \left[N + (k-n)D^{'}\right] P_n(k,x) + D.\frac{dP_n(k,x)}{dx}$$

bu ifade $k = k+1$ için ifade edildiğinde

$$P_{n+1}(k+1,x) = \left[N + (k+1-n)D^{'}\right] P_n(k+1,x) + D.\frac{dP_n(k+1,x)}{dx}$$

elde edilir(Hildebrant,1931 : 401).

(2.11) ve $P_{n+1}(k,x) = \left[N + (k-n)D^{'}\right] P_n(k,x) + D.\frac{dP_n(k,x)}{dx}$ eşitliğinde $P_{n+1}(k,x)$ için denklemlerin eşitlenmesi ile

$$D.\frac{dP_n(k,x)}{dx} = -kD^{'} P_n(k,x) + n.\left[N^{'} - \frac{(n-1)}{2}D^{''}\right].DP_{n-1}(k,x)$$

elde edilir ve elde edilen bu eşitliğin her iki tarafını D parantezine alınarak sadeleştirilmesi ile

$$\frac{dP_n(k,x)}{dx} = -kD^{'}\frac{1}{D}P_n(k,x) + n\left[N^{'} - \frac{(n-1)}{2}D^{''}\right]P_{n-1}(k,x) \qquad (2.12)$$

elde edilir.(2.6) denkleminin diferansiyelenmesi ile

$$\begin{aligned} P^{'}_{n+1}(k,x) &= \left(N^{'} + kD^{''} - nD^{''}\right)P_n(k,x) + (N + kD^{'} - nD^{'} + D^{'})P^{'}_n(k,x) \\ &\quad + P^{''}_n(k,x)D \end{aligned} \qquad (2.13)$$

elde edilir. (2.9)$\frac{dP_n(k,x)}{dx} = n\left[N^{'} - \frac{(n-1)}{2}D^{''}\right]P_{n-1}(x)$ denkleminin bilgisi altında $P_n(k,x)$'ler için eşitlik şöyledir:

$N+kD^{'} \equiv N, N^{'}+kD^{''} \equiv N^{'}$, $\frac{dP_n(k,x)}{dx} = n\left[\left(N^{'} + kD^{''}\right) - \frac{(n-1)}{2}D^{''}\right]P_{n-1}(k,x)$ eşitliğini $n+1$ için yazılırsa;

$$\frac{dP_{n+1}(k,x)}{dx} = (n+1)\left[\left(N^{'} + kD^{''}\right) - \frac{nD^{''}}{2}\right]P_n(k,x) \qquad (2.14)$$

elde edilir.

(2.13) ve (2.14) denklemlerinde $P^{'}_{n+1}(k,x)$ ifadesi çekilerek eşitlenmesi ile

$$\begin{aligned} (n+1)\left[\left(N^{'} + kD^{''}\right) - \frac{nD^{''}}{2}\right]P_n(k,x) &= \left(N^{'} + kD^{''} - nD^{''}\right)P_n(k,x) \\ &\quad + (N + kD^{'} - nD^{'} + D^{'})P^{'}_n(k,x) \\ &\quad + P^{''}_n(k,x)D \end{aligned}$$

$$D.P^{''}_n(k,x) + \begin{bmatrix} N \\ -(n-k-1)D^{'} \end{bmatrix}P^{'}_n(k,x) - n\begin{bmatrix} N^{'} \\ -\frac{(n-2k-1)}{2}D^{''} \end{bmatrix}P_n(k,x) = 0 \qquad (2.15)$$

elde edilir(Hildebrant, 1931 : 404). $P_n(k,x)$'ler için ikinci dereceden diferansiyel denklem elde edilir. (2.15) denklemi $k = n$ için ifade edilmesi ile

$$D.P_n^{''}(n,x) + \left(N + D^{'}\right) P_n^{'}(n,x) - n\left(N^{'} + \frac{(n+1)}{2}D^{''}\right) P_n(n,x) = 0 \quad (2.16)$$

ikinci dereceden diferansiyel denklemi elde edilir(Hildebrant, 1931 : 405). (2.16) Legendre polinomları için de kullanılır.

$P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \frac{dy}{dx} = \frac{0.y}{(x^2-1)}, N = 0, N^{'} = 0, D = (x^2-1), D^{'} = 2x, D^{''} = 2, D^{'''} = 0$

$$(x^2-1)P_n^{''}(n,x) + 2xP_n^{'}(n,x) - n(n+1)P_n(n,x) = 0 \quad (2.17)$$

elde edilir(Hildebrant, 1931 : 406).

(2.8) denklemi ile ifade edilen rekürans ilişkisi $P_n(k,x)$'ler için ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\frac{dD^k y}{dx} &= kD^{k-1}D^{'}y + D^k y^{'} \\ &= k.D^{k-1}.D^{'}y + D^k\frac{N}{D}y \\ &= D^{k-1}y\left[kD^{'} + N\right]\end{aligned}$$

ifadesine dönüşür. İkinci dereceden türevi ve daha yüksek türevleri,

$$\frac{d^2D^k y}{dx^2} = \frac{d}{dx}D^{k-1}y\left[kD^{'} + N\right] + \left[kD^{''} + N^{'}\right]D^{k-1}y$$

$N = a_0 + a_1x, N^{'} = a_1, N^{''} = 0$

$$\begin{aligned}\frac{d^3D^k y}{dx^3} &= \frac{d^2}{dx^2}D^{k-1}y\left[kD^{'} + N\right] + \frac{d}{dx}D^{k-1}y\left[kD^{''} + N^{'}\right] \\ &\quad + \left[kD^{'''} + N^{'''}\right]D^{k-1}y + \left[kD^{''} + N^{'}\right]\frac{d}{dx}D^{k-1}y\end{aligned}$$

$D = b_0 + b_1x + b_2x^2, D^{'} = b_1 + 2b_2x, D^{''} = 2b_2, D^{'''} = 0$

$$\frac{d^3D^ky}{dx^3} = \frac{d^2}{dx^2}D^{k-1}y\left[kD^{'} + N\right] + 2\left[kD^{''} + N^{'}\right]\frac{d}{dx}D^{k-1}y + 0$$

$$\frac{d^4D^ky}{dx^4} = \frac{d^3}{dx^3}D^{k-1}y\left[kD^{'} + N\right] + 3\left[kD^{''} + N^{'}\right]\frac{d^2}{dx^2}D^{k-1}y$$

Bu türevlerden yola çıkılarak ifadenin $n+1$ kez türevlenmiş durumu,

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(D^ky) = \left[N + kD^{'}\right]\frac{d^n}{dx^n}D^{k-1}y + n\left[kD^{''} + N^{'}\right]\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}D^{k-1}y$$

$k = k+1$ için

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(D^{k+1}y) = \left[N + (k+1)D^{'}\right]\frac{d^n}{dx^n}D^ky + n\left[(k+1)\,D^{''} + N^{'}\right]\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}D^ky \tag{2.18}$$

(2.18) denkleminin her iki tarafı denkleminin her iki tarafını D^{n-k} ile çarpılması ile;

$$\begin{aligned} D^{n-k}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(D^{k+1}y) &= \left[N + (k+1)D^{'}\right]D^{n-k}\frac{d^n}{dx^n}D^ky \\ &\quad + n\left[(k+1)\,D^{''} + N^{'}\right]D^{n-k}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}D^ky \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} P_n(k,x) &= \frac{1}{D^ky}D^n\frac{d^n}{dx^n}D^ky \\ P_{n+1}(k+1,x) &= \frac{1}{D^{k+1}y}D^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}D^{k+1}y \\ P_{n-1}(k,x) &= \frac{1}{D^ky}D^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}D^ky \end{aligned}$$

Bilgileri kullanılması ile (2.18) eşitliğinden

$$P_{n+1}(k+1,x) = \left[N + (k+1)D^{'}\right] P_n(k,x) + n\left[N^{'} + (k+1)D^{''}\right] D.P_{n-1}(k,x) \tag{2.19}$$

$(n+1)$. Dereceden polinomun $n.$ ve $(n-1).$ Dereceden polinomlara bağlı rekürans bağıntısı elde edilir. (2.19) rekürans ilişkisi $k = n$ için

$$P_{n+1}(n+1,x) = \left[N + (n+1)D^{'}\right] P_n(n,x) + n\left[N^{'} + (n+1)D^{''}\right] D.P_{n-1}(n,x) \tag{2.20}$$

$P_{n+1}(n+1,x),\ P_n(n,x),\ P_{n-1}(n,x)$ polinomlarını içeren rekürans ilişkisi elde edilir(Hildebrant, 1931 : 407). (2.4) eşitliğini $P_n(k,x)$ 'ler için gösterimi şu şekildedir, (2.9) denkleminde $N + kD^{'} \equiv N, N^{'} + kD^{''} \equiv N^{'}$

$$\frac{dP_n(k,x)}{dx} = n\left[\left(N^{'} + kD^{''}\right) - \frac{(n-1)}{2}D^{''}\right] P_{n-1}(k,x)$$

$n = k$ için,

$$\frac{dP_n(n,x)}{dx} = n\left[N^{'} + D^{''}.\left(\frac{1+n}{2}\right)\right] P_{n-1}(n,x)$$

$$P_{n-1}(n,x) = \frac{1}{n\left[N^{'} + D^{''}.\left(\frac{1+n}{2}\right)\right]} \frac{dP_n(n,x)}{dx} \tag{2.21}$$

elde edilen (2.21) denklemi (2.20) denkleminde yerine ifade edilmesi ile;

$$\begin{aligned} P_{n+1}(n+1,x) &= \left[N + (n+1)D^{'}\right] P_n(n,x) + n\left[N^{'} + (n+1)D^{''}\right] DP_{n-1}(n,x) \\ &= \left[N + (n+1)D^{'}\right] P_n(n,x) + \frac{N^{'} + (n+1)D^{''}}{N^{'} + (\frac{n+1}{2})D^{''}}.D.\frac{dP_n(n,x)}{dx} \end{aligned}$$

rekürans ilişkisi elde edilir(Hildebrant, 1931 : 408).

Özet olarak bu bölümde $P_n(x)$ ve $P_n(k,x)$ polinomlarının rekürans ilişkileri incelendi. $P_n(x)$'ler için (2.4) denklemi olan $P_{n+1}(x) = P_n(x)\left[N - nD^{'}\right] + D.\frac{dP_n(n,x)}{dx}$ rekürans bağıntısı $P_n(k,x)$'ler için (2.22) denklemi olan $P_{n+1}(n+1,x) =$

$\left[N+(n+1)D^{'}\right]P_n(n,x)+\frac{N^{'}+(n+1)D^{''}}{N^{'}+(\frac{n+1}{2})D^{''}}.D.\frac{dP_n(n,x)}{dx}$;

Ardışık iki polinomun rekürans ilişkisi $P_n(x)$'ler için, (2.9) denklemi olan

$$\frac{dP_n(x)}{dx}=n\left[N^{'}-\frac{(n-1)}{2}D^{''}\right]P_{n-1}(x)$$

;$P_n(k,x)$'ler için ,

$$\frac{dP_n(k,x)}{dx}=n.\left[(N^{'}+kD^{''})-\frac{(n-1)}{2}D^{''}\right]P_{n-1}(k,x)$$

;

$(n+1).\,,n.$ ve $(n-1).$ dereceden polinomları içeren rekürans ilişkisi $P_n(x)$'ler için(2.8) denklemi olan

$$\left[P_{n+1}(x)+(nD^{'}-N)P_n(x)+nD\left[\frac{(n-1)}{2!}D^{''}-N^{'}\right]P_{n-1}(x)\right]=0$$

$P_n(k,x)$'ler için;

$P_{n+1}(k+1,x)=\left[N+(k+1)D^{'}\right]P_n(k,x)+n\left[N+(k+1)D^{'}\right]D.P_{n-1}(k,x)$

ilişkileri ifade edildi ve bu ilişkileri sağlayan ortogonal polinomlar üzerinde incelendi.

2.3.$\mathbf{P}_n(\mathbf{k},\mathbf{x})$ VE D'NİN ORTAK KÖKLERİYLE İLİŞKİLİ TEOREMLER

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \equiv \frac{N}{D}$$

Pearson Diferansiyel denkleminde E.Hildebrant ortak köklere sahip olmayan sırasıyla N ve D, x'in sırasıyla birinci ve ikinci derecelerini aşmayan Pearson diferansiyel denklem çözümleriyle ilişkili $P_n(k,x)$ genel polinom sisteminin varlığını kurdu.(Beale,1937 : 206).

Bu bölümde $P_n(k,x)$'ler için elde edilen dört ana rekürans bağıntısı ile $P_n(k,x)$ ve Pearson diferansiyel denkleminin paydasını ifade eden D'nin ortak kökleriyle olan ilişkileri teoremler altında incelenmeye çalışıldı. Öncelikle bu dört ana bağıntının ilk üç tanesinin Bölüm2.2'de elde edilen rekürans bağıntılarının yardımı ile gösterimi aşağıda ifade edilir.

Bölüm 2.2 'de elde edilen (2.6) rekürans denklemini $k+1$ yerine k için denklem yeniden ifade edildiğinde;

$$P_{n+1}(k,x) = \left[N + (k-n)D'\right] P_n(k,x) + D.P_n'(k,x) \tag{2.23}$$

ifadesi elde edilir(Beale, 1937 : 207).(2.23) bu bölümde incelenecek dört ana bağıntının ilkidir.(2.9) denklemi olan $\frac{dP_n(x)}{dx} = n\left[N' - \frac{(n-1)}{2}D''\right]P_{n-1}(x)$ ve $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{N}{D}$ eşitliği Pearson diferansiyel denklemini sağlar ve herhangi bir k reel sayısı için teorık olasılık yoğunluk fonksıyonu olan $D^k y$'de Pearson diferansiyel denklemini sağladığını önceki bölümlerde ifade edilmişti. Dolayısı ile;

$$\frac{d(D^k y)}{dx} = k.D^{k-1}.D'y + D^k.\frac{dy}{dx}$$

,

$$\begin{aligned} u &= D^k y, \frac{du}{dx} = \left(\frac{N + kD^{'}}{D}\right) u, \\ \frac{1}{u}\frac{du}{dx} &= \frac{N}{D} + k\frac{D^{'}}{D} \end{aligned}$$

Bu ifadede $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{N}{D}$ yerine koyulması ile $\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{N}{D} + k\frac{D^{'}}{D} \equiv \frac{N}{D}$. Bu bilgiler altında $\frac{dP_n(x)}{dx} = n\left[N^{'} - \frac{(n-1)}{2}D^{''}\right] P_{n-1}(x)$,$N + kD^{'} \equiv N, N^{'} + kD^{''} \equiv N$ elde edilir ve $(n+1)$. Dereceden polinom için denklem ifade edildiğinde

$$P^{'}_{n+1}(k,x) = (n+1).\left[N^{'} + \frac{(2k-n)}{2}D^{''}\right] P_n(k,x) \tag{2.24}$$

ikinci ana bağıntı elde edilir(Beale,1937 : 207). (2.24) denklemi ile $(n+1)$. dereceden polinomun türevi; n .dereceden polinom ile ifadesi elde edilir. (2.23) denkleminde $\frac{dP_n(k,x)}{dx} = n\left[\left(N^{'} + kD^{''}\right) - \frac{(n-1)}{2}D^{''}\right] P_{n-1}(k,x)$ bilgisi yerinde ifade edildiğinde (2.23) denklemi

$$P_{n+1}(k,x) = \left[N + (k-n)D^{'}\right] P_n(k,x) + n.D.\left[N^{'} + \frac{2k-n+1}{2}D^{''}\right] P_{n-1}(k,x) \tag{2.25}$$

dönüşür ve $(n+1)$. polinomun ; n. ve $(n-1)$. dereceden polinomlarla diğer bir ilişkisi elde edilir(Beale, 1937 : 207). Elde edilen (2.23),(2.24) ve(2.25) bağıntıları D ve $P_n(k,x)$'lerin ortak kökleriyle olan ilişkili teoremlerde kullanılacaktır.

Lemma : $P_n(x)$; n.dereceden bir polinom olmak üzere $P_n(x)$ve$P^{'}_n(x)$; $(x-\alpha)^m$'nin bir çarpanını içeriyorsa; $m < n$ ise $P_n(x)$; $(x-\alpha)^{m+1}$'in bir çarpanını içerir(Beale,1937 : 207).

$$P^{'}_{n+1}(k,x) = (n+1).\left[N^{'} + \frac{(2k-n)}{2}D^{''}\right] P_n(k,x)$$

diferansiyellenmesi ve $P^{'}_n(k,x)$'i elimine edilmesi ile

$$P_{n+1}^{''}(k,x) = (n+1).\left[N^{''}+\frac{(2k-n)}{2}D^{'''}\right]P_n(k,x) \quad (2.26)$$
$$+(n+1).\left[N^{'}+\frac{(2k-n)}{2}D^{''}\right]P_n^{'}(k,x)$$

elde edilir.

$N = a_0+a_1x, N^{'} = a_1, N^{''} = 0; D = b_0+b_1x+b_2x^2, D^{'} = b_1+2b_2x, D^{''} = 2b_2, D^{'''} = 0$ değerleri göz önünde tutulması ile (2.27) denklemi

$$P_{n+1}^{''}(k,x) = (n+1).\left[N^{'}+\frac{(2k-n)}{2}D^{''}\right]P_n^{'}(k,x) \quad (2.27)$$

elde edilir.(2.27) denkleminde $P_n^{'}(k,x)$ yerine $\frac{dP_n(k,x)}{dx} = \left[n.N^{'}+D^{''}\left(\frac{2nk-n^2+n}{2}\right)\right]P_{n-1}(k,x)$ ifadesi yerine koyulması ile

$$P_{n+1}^{''}(k,x) = (n+1).n.\left[N^{'}+\frac{(2k-n)}{2}D^{''}\right].\left[N^{''}+\frac{(2k-n+1)}{2}D^{''}\right]P_{n-1}(k,x)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{'''}(k,x) &= (n+1).n.\left[N^{'}+\frac{(2k-n)}{2}D^{''}\right].\left[N^{'}+\frac{(2k-n+1)}{2}D^{''}\right]P_{n-1}(k,x) \\ &+(n+1).n.\left[N^{'}+\frac{(2k-n)}{2}D^{''}\right]\left[N^{''}+\frac{D^{'''}(2k-n+1)}{2}\right] \\ &P_{n-1}(k,x)+n.(n+1).\left[N^{'}+\frac{(2k-n)}{2}D^{''}\right]. \\ &\left[N^{'}+\frac{(2k-n+1)}{2}D^{''}\right]P_{n-1}^{'}(k,x) \end{aligned}$$

Bu ifadede $N = a_0+a_1x,\ N^{'} = a_1,\ N^{''} = 0;\ D = b_0+b_1x+b_2x^2,$ $D^{'} = b_1+2b_2x,\ D^{''} = 2b_2,\ D^{'''} = 0$

$$P_{n+1}^{'''}(k,x) = (n+1).n.\left[N^{'}+\frac{(2k-n)}{2}D^{''}\right].\left[N^{'}+\frac{(2k-n+1)}{2}D^{''}\right]P_{n-1}^{'}(k,x)$$

elde edilmesi ile $(n+1)$. dereceden polinomun üçüncü dereceden türevini N, D ve N'nin ve D'nin türevlerine bağlı olarak elde edildi ve ifadeyi bu yukarıdaki elde edilen türevlerden genel bir ifade elde etmek istenirse $(n+1)$. dereceden polinomun q. türevi;

$$P_{n+1}^{(q)}(k,x)=\prod_{i=0}^{q-1}(n+1-i)\left(N^{'}+\frac{2k-n+i}{2}D^{''}\right)P_{n-q+1}(k,x), q=1,2,,,,,(n+1) \tag{2.28}$$

elde edilir(Beale,1937 : 207).

$q=2$ için (2.28) denklemi

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(2)}(k,x) &= \prod_{i=0}^{1}(n+1-i)\left(N^{'}+\frac{2k-n+i}{2}D^{''}\right)P_{n-2+1}(k,x) \\ &= n.(n+1).\left[N^{'}+\frac{(2k-n)}{2}D^{''}\right]\left[N^{'}+\frac{(2k-n+1)}{2}D^{''}\right]P_{n-1}(k,x) \end{aligned}$$

ile sağladığı görülür.

Teorem 2.3: D; bir tam kare ise; $D^{'}$, $n=0,1,2,\ldots..$ $P_{n+1}(k,x)$'nin bir çarpanı değildir(Beale,1937 : 207).

İspat: D bir tam kare ise; $D=(x\pm a)^2$ şeklinde yazılabilir. $D=(x\pm a)^2 \Rightarrow D^{'}=2.(x\pm a)$ 'dir. Dolayısı ile $D^{'}=2\sqrt{D}$ şeklinde ifade edilmek üzere varsayalım ki $D^{'}$, $P_{n+1}(k,x)$'in birçarpanı olsun. $D^{'}$; (2.23) denklemi olan $P_{n+1}(k,x)=\left[N+(k-n)D^{'}\right]P_n(k,x)+D.P_n^{'}(k,x)$ ve $P_{n+1}(k,x)=D^{'}.\left[b+\frac{D.P_n^{'}(k,x)}{D^{'}}\right]$ ifadesi ile incelenmesi ile ; b ifadesi $b=\frac{\left[N+(k-n)D^{'}\right]P_n(k,x)}{D}$ ile gösterilmek üzere $D.P_n^{'}(k,x)=D^{'}.t$ şeklinde yazılabilmelidir. D tam kare ise ve $D=(x\pm a)^2$ şeklinde yazılabiliyor ise ;

$$P_{n+1}(k,x)=D^{'}.\left[b+\frac{D.P_n^{'}(k,x)}{D^{'}}\right]$$

$D^{'}=2\sqrt{D}, \frac{(D^{'})^2}{4}=D,$

$$P_{n+1}(k,x) = D^{'}.\left[b+\frac{\left(D^{'}\right)^{2}}{4}\frac{P_{n}^{'}(k,x)}{D^{'}}\right]$$
$$= D^{'}.\left[b+\frac{D^{'}}{4}.P_{n}^{'}(k,x)\right]$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla incelemede $D^{'}$'nün $P_n(k,x)$'in çarpımı olup olmadığı hakkında $\frac{D^{'}}{4}$ katsayısı sebebiyle net bir şey söylenemez. Fakat $D^{'}.b=\left[N+(k-n)D^{'}\right]P_n(k,x)$'e incelenir ise ya $D^{'}$ ya $P_{n}^{'}(k,x)'in$ ya da $\left[N+(k-n)D^{'}\right]$ nün bir çarpanıdır. İlk önce $D^{'},\left[N+(k-n)D^{'}\right]$ 'nün çarpanı olup olmadığını incelenmesi ile ; eğer $D^{'}$, $\left[N+(k-n)D^{'}\right]$'nin çarpanı ise ; $\frac{\left[N+(k-n)D^{'}\right]}{D^{'}}=\frac{N}{D^{'}}+\frac{(k-n)D^{'}}{D^{'}}$ bu ifadede $\frac{N}{D^{'}}$ kısmında $D^{'}$'nün N'ninde bir çarpanı olduğuna götürür. $D^{'}=2\sqrt{D}$'ye eşittir.N'yi ,$\frac{2\sqrt{D}.a}{2\sqrt{D}}=\frac{N}{D^{'}}$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $N=2\sqrt{D}a=D^{'}.a$ olur ve bu bilgiden N 'nin D ile ortak çarpana sahip olduğunu gösterir fakat bu durum $D^{'}$,ortak çarpanına sahip olmayan D ve N hipotezi üzerindeki $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{N}{D}$ 'nin aksine N'nin bir çarpanı olduğunu ima eder. Dolayısı ile Pearson diferansıyel denklemınde N ve D ortak çarpanlara sahip olmayan hipoteze ters düşer .Böylece ;$D^{'},\left[N+(k-n)D^{'}\right]$ 'nün bir çarpanı değildir ispatın başında $D^{'}$'nün ya $\left[N+(k-n)D^{'}\right]$ ya da $P_n(k,x)$'in bir çarpanı olacağını inceleme altında idi, $D^{'}$'yü $P_n(k,x)$'in bir çarpanı olarak yazılıp yazılamayacağını incelenmesi şu şekildedir;

$P_n(k,x)$'te $n=1$için, $P_1(k,x)=N+kD^{'}$ 'dür. $P_1(k,x)=D^{'}.a$ şeklinde yazılabilir mi bu durum $P_1(k,x)=D^{'}.\left(\frac{N}{D^{'}}+k\right);\frac{N}{D}$, ortak çarpanlara sahip olmayan N ve D hipotezine karşı çıkacağından $n=1$ için , $P_1(k,x)$, $D^{'}$ parantezine alınan $n=1,2,3...$değerleri için incelenme ;

$$
\begin{aligned}
P_{n+1}(k,x) &= \left[N+(k-n)D^{'}\right]P_n(k,x)+D.P_n^{'}(k,x)\\
P_1(k,x) &= \left[N+kD^{'}\right]P_0(k,x)+D.P_0^{'}(k,x)\\
P_0(k,x) &= \frac{1}{D^k y}.D^0.\frac{d^0D^k y}{dx^0}\\
&= 1\\
P_0^{'}(k,x) &= 0\\
P_1(k,x) &= \left[N+kD^{'}\right]\\
P_1^{'}(k,x) &= N^{'}+kD^{''}\\
P_2(k,x) &= \left[N+(k-1)D^{'}\right]\left[N+kD^{'}\right]+D.\left[N^{'}+kD^{''}\right]
\end{aligned}
$$

Bu bilgiler ışığındaki $P_2(k,x)$ için D mükemmel kare olduğu için incelemeyi $\left[N+(k-1)D^{'}\right]$ ve $\left[N+kD^{'}\right]$ için incelenir. $D^{'}$'nün çarpanı olabilmesi olayı imkansızdır.

$\frac{N}{D^{'}}$ 'ler $\frac{N+(k-1)D^{'}}{D^{'}}=\frac{N}{D^{'}}+(k-1)$ bu durum N ve D ortak çarpanlara sahip olmayan hipoteze aykırıdır; $\frac{N+kD^{'}}{D^{'}}=\frac{N}{D^{'}}+k$ dolayısıyla bu durumda N ve D ortak çarpanlara sahip olmayan hipoteze aykırı olması sebebiyle $P_3(k,x)=\left[N+(k-2)D^{'}\right]P_2(k,x)+D.P_2^{'}(k,x)\,P_3(k,x)$ içinde durumu inceleme ; $\frac{N+(k-2)D^{'}}{D^{'}}=\frac{N}{D^{'}}+(k-2)$ bu ifadeden de görülüyorki bahsedilen hipoteze ters ; dolayısıyla eğer D mükemmel kare ise $D^{'}$, genel bir ifade içinde yazılacak olur ise $n=0,1,2,\ldots..$ için $P_{n+1}(k,x)$'lerin de çarpanı olamaz(Beale,1937 : 207).

Özet olarak ; $D^{'}$, $P_{n+1}(k,x)$ bir çarpanı olduğunda $P_{n+1}(k,x)=\left[N+(k-n)D^{'}\right]P_n(k,x)+D.P_n^{'}(k,x)$ den $D^{'}$ya $P_n(k,x)$ 'in yada $\left[N+(k-n)D^{'}\right]$'nün bir çarpanıdır. Fakat $D^{'}$,ortak köklere sahip olmayan D ve N 'nin aksine $D^{'}$'nün N'nin bir çarpanı olmasını ima etmesi sebebiyle $D^{'}$, $\left[N+(k-n)D^{'}\right]$'nün bir çarpanı olamaz. Bu yüzden ; $D^{'}$,P_n 'in bir çarpanıdır ve nihayetinde P_1'in bir çarpanı olması muhakemesinin tekrarı ile bu durumun olmayacağı aşikardır(Beale,1937 : 207).

Teorem 2.4 : $D=(\alpha_1 x+\beta_1)(\alpha_2 x+\beta_2)$, D tam kare bir ifade olmamak üzere .Eğer $\alpha_i x+\beta_i$, $i=1$ veya 2, P_n'in bir çarpanı ise $(\alpha_i x+\beta_i)^q$; P_{n+q-1}'inde bir

çarpanıdır(Beale,1937 : 207).

İspat:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(k,x) &= \left[N+(k-n)D'\right]P_n(k,x)+D.P_n'(k,x) \\ &\qquad\qquad \downarrow \quad \downarrow \\ &= \qquad (\alpha_i x+\beta_i)\quad (\alpha_i x+\beta_i) \\ &= b.(\alpha_i x+\beta_i) \end{aligned}$$

şeklinde $(\alpha_i x+\beta_i)$ parantezine alınması ile

$$P_{n+1}'(k,x)=(n+1).\left[N'+\frac{(2k-n)}{2}D''\right]P_n(k,x)$$

.

D, $P_n(k,x)$'in bir çarpanı olduğundan (2.24) ifadesinden D'nin $P_{n+1}'(k,x)$ 'in bir çarpanı olduğu görülür. Lemma bilgisi altında $P_{n+1}(k,x)$ ve $P_{n+1}'(k,x)$; $(\alpha_i x+\beta_i)$'yi içerirse $P_{n+1}(k,x)$ 'de $(\alpha_i x+\beta_i)^2$'yi içerir. Sonuç olarak; hem $(\alpha_1 x+\beta_1)$ hem de $(\alpha_2 x+\beta_2)$; P_n'in çarpanları ise ,D^q 'da P_{n+q-1}'in bir çarpanıdır(Beale, 1937 : 207).

Teorem 2.5: D , tam kare olmamak üzere, $(\alpha_i x+\beta_i)$;$i=1$ veya 2, $(\alpha_i x+\beta_i)$' den daha yüksek dereceli olmayan ve $P_{n+1}(k,x)$'in bir çarpanı ise ; $(\alpha_i x+\beta_i)$,$\left[N+(k-n)D'\right]$ 'nün bir çarpanıdır(Beale, 1937 : 207).

İspat: $D=(\alpha_1 x+\beta_1)(\alpha_2 x+\beta_2)$; $i=1$veya 2, (2.23) ilişkisi P_{n+1}ve D 'nin bir çarpanı olan $(\alpha_i x+\beta_i)$ ya $\left[N+(k-n)D'\right]$ 'nün ya da $P_n(k,x)$'in bir çarpanıdır. Teorem 2.4 bilgisi altında ,

$$\begin{aligned} P_{n+1}(k,x) &= \left[N+(k-n)D'\right]P_n(k,x)+D.P_n'(k,x) \\ \downarrow &\qquad\qquad \downarrow \quad \downarrow \\ (\alpha_i x+\beta_i) &= \qquad (\alpha_i x+\beta_i)\quad (\alpha_i x+\beta_i) \end{aligned}$$

$(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})$'nin $P_n(k,x)$ 'in bir çarpanı olması durumunda (2.24)'den görüleceği üzere $(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})$'nin $P'_{n+1}(k,x)$'nde bir çarpanı olduğu anlamına gelir. $P_{n+1}(k,x)$ ve $P'_{n+1}(k,x)$'nün çarpanları $(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})$' ise Teorem-2'ye göre $(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})^2$' de $P_{n+1}(k,x)$ 'in bir çarpanı olmasını gerektirir fakat bu durum varsayılan hipoteze göre aykırıdır. Bu yüzden $(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})$, $P_n(k,x)$'in bir çarpanı olamaz. Bu yüzden $(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})$; $\left[N+(k-n)D'\right]$ 'nün bir çarpanıdır(Beale, 1937 : 207).

Sonuç: $(\alpha_1x+\beta_1)(\alpha_2x+\beta_2)$;$(\alpha_1,\alpha_2\neq 0)$; P_{n+1}'in bir çarpanı ise ve $(\alpha_1x+\beta_1)$ ya da $(\alpha_2x+\beta_2)$'den daha yüksek dereceli olmayan bir kuvveti $P_{n+1}(x)$'te içeriliyor ise ; $\left[N+(k-n)D'\right]\equiv 0$; teorem 2.5 'ten ; $\left[N+(k-n)D'\right]$; $\left[N+(k-n)D'\right]$ 'yü ima eden çarpan olarak $(\alpha_1x+\beta_1)(\alpha_2x+\beta_2)$'yi içerir(Beale, 1937 : 208).

Teorem 2.6: $(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})^q$ ve $(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})$ 'den daha yüksek dereceli olmayan ; P_{n+q-1}'in bir çarpanı ise ; $(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})^q$ ve $(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})$ 'den daha yüksek dereceli olmayan P_n'in bir çarpanıdır($Beale, 1937 : 208$).

İspat: $P_{n+q-1}=(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})^q\vartheta_{n-1}$'in $\vartheta_{n-1}\equiv a$, $(n-1)$'e küçük yada daha küçük dereceli ve $(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})$'yi içermeyen bir polinom olsun. $P_{n+q-1}=(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})^q\vartheta_{n-1}$ 'nin $(q-1)$. türevi Leibniz Teoremi ile açılımı EK 1 ' de gösterildiği gibi

$$\begin{aligned}P^{(q-1)}_{n+q-1} &= (\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})^q\frac{d^{q-1}\phi_{n-1}}{dx^{q-1}}+\binom{q-1}{1}.q.(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})^{q-1}.\alpha_i.\frac{d^{q-2}\phi_{n-1}}{dx^{q-2}}+.\\ &\quad ...+\phi_{n-1}.\alpha_{\dot{I}}.q!\,(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})\end{aligned}$$

elde edilir. $(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})$; $P^{(q-1)}_{n+q-1}$'in bir çarpanı olduğu görülür. İfadenin genelleştirilmesi ile;

$$P^{(q-1)}_{n+q-1}=\sum_{i=0}^{q-1}\binom{q-1}{i}.\frac{d^i\,(\alpha_{\dot{I}}x+\beta_{\dot{I}})^q}{dx^i}.\frac{d^{q-1-i}\phi_{n-1}}{dx^{q-1-i}} \tag{2.29}$$

elde edilir. (2.28) denklemini $(q-1)$. türevi için ifade yazılması ile bu sonuçlar;

$$\begin{aligned} P_{n+q-1}(k,x) &= \frac{1}{D^k y} D^{n+q-1} . \frac{d^{n+q-1} D^k y}{dx^{n+q-1}} \\ \frac{dP_n(k,x)}{dx} &= n\left[\left(N^{'} + kD^{''}\right) - \frac{(n-1)D^{''}}{2}\right] P_{n-1}(k,x) \end{aligned}$$

$n+q-1 icin;$

$$\frac{dP_{n+q-1}(k,x)}{dx} = (n+q-1)\left[\left(N^{'} + kD^{''}\right) - \frac{(n+q-2)}{2} D^{''}\right] P_{n+q-2}(k,x)$$

$(n+q-1)$. dereceden polinomun ikinci dereceden türevi ise;

$$\begin{aligned} P^{''}_{n+q-1}(k,x) &= (n+q-1)\left[\left(N^{''} + kD^{'''}\right) - \frac{(n+q-2)}{2} D^{'''}\right] P_{n+q-2}(k,x) \\ &\quad +(n+q-1)\left[\left(N^{'} + kD^{''}\right) - \frac{(n+q-2)}{2} D^{''}\right] P^{'}_{n+q-2}(k,x) \end{aligned}$$

$N^{''} = 0$ ve $D^{'''} = 0$ olması sebebiyle

$$P^{''}_{n+q-1}(k,x) = (n+q-1)\left[N^{'} + \frac{(2k-n-q+2)}{2} D^{''}\right] P^{'}_{n+q-2}(k,x)$$

denkleminde $\frac{dP_n(k,x)}{dx} = n.\left[\left(N^{'} + kD^{''}\right) - \frac{(n-1)}{2} D^{''}\right] P_{n-1}(k,x)$ denkleminin bilgisi altında $n+q-2$ için

$$\frac{dP_{n+q-2}(k,x)}{dx} = (n+q-2)\left[\left(N^{'} + kD^{''}\right) - \frac{(n+q-3)}{2} D^{''}\right] P_{n+q-3}(k,x)$$

ifadesinin yerine koyulması ile

$$\begin{aligned} P^{''}_{n+q-1}(k,x) &= (n+q-1)(n+q-2)\left[N^{'} + \frac{(2k-n-q+2)}{2} D^{''}\right] \\ &\quad \left[\left(N^{'} + kD^{''}\right) + \frac{(n+q-3)}{2} D^{''}\right] P_{n+q-3}(k,x) \end{aligned}$$

elde edilir. İfadeyi genel bir şekilde yazmak istersek $(q+1)$ kez diferansiyellendiğinde ;

$$P_{n+q-1}^{(q-1)} = \prod_{i=0}^{q-2} (n+q-1-i) \left[N' + \frac{(2k-n-q+i+2)}{2} D'' \right] P_n(k,x)$$

$P_{n+q-1}^{(q-1)} = \sum_{i=0}^{q-1} \binom{q-1}{i} \frac{d^i(\alpha_i x+\beta_i)^q}{dx^i} . \frac{d^{q-1-i}\phi_{n-1}}{dx^{q-1-i}}$'den görülüyor ki $(\alpha_i x+\beta_i)$; $P_{n+q-1}^{(q-1)}$'nin bir çarpanıdır. $(\alpha_i x+\beta_i)$ 'den daha yüksek dereceli olmayan bir çarpandır. $P_{n+q-1}^{(q-1)} = \prod_{i=0}^{q-2} (n+q-1-i) \left[N' + \frac{(2k-n-q+i+2)}{2} D'' \right] P_n(k,x)$ ifadesinde görüleceği üzere $P_{n+q-1}^{(q-1)}$; $(n+q-1-i)$ ve $\left[N' + \frac{(2k-n-q+i+2)}{2} D'' \right]$ sabit olduğu için sabit bir katsayı ile n.dereceden bir polinomun çarpımına eşit olduğu görülür.

$(n+q-1-i) \left[N' + \frac{(2k-n-q+i+2)}{2} D'' \right]$'yı c gibi sabit bir katsayıya karşılık geldiği için $(\alpha_i x+\beta_i)$ ve $(\alpha_i x+\beta_i)$ 'den daha yüksek dereceli olmayan P_n'inde bir çarpanı olduğu $P_{n+q-1}^{(q-1)} = \prod_{i=0}^{q-2} (n+q-1-i) \left[N' + \frac{(2k-n-q+i+2)}{2} D'' \right] P_n(k,x)$'den görülür(Beale, 1937 : 208).

Sonuç-1: $P_{n+q-1}^{(q-1)} = \prod_{i=0}^{q-2} (n+q-1-i) \left[N' + \frac{(2k-n-q+i+2)}{2} D'' \right] P_n(k,x)$'den biliniyor ki $(\alpha_i x+\beta_i)$ ve $(\alpha_i x+\beta_i)$'den daha yüksek dereceli olmayan P_n'in çarpanıdır. (2.23) denkleminin bilgisi altında bu ifadeden

$$P_n(k,x) = \left[N + (k-n+1) D' \right] P_{n-1}(k,x) + D.P'_{n-1}(k,x)$$

'tir.

$$P_{n+q-1}^{(q-1)} = \prod_{i=0}^{q-2} (n+q-1-i) \left[N' + \frac{(2k-n-q+i+2)}{2} D'' \right] P_n(k,x)$$'

den $(\alpha_i x+\beta_i)$ ve $(\alpha_i x+\beta_i)$ 'den daha yüksek dereceli olmayan $(\alpha_i x+\beta_i)$; $P_n(k,x)$ 'in bir çarpanı ise teorem 2.5 ışığı altında $(\alpha_i x+\beta_i)$; $\left[N + (k-n+1) D' \right]$;'nün bir çarpanıdır(Beale, 1937 : 208).

Sonuç-2: $D^q = (\alpha_1 x+\beta_1)^q . (\alpha_2 x+\beta_2)^q , \ (\alpha_1, \alpha_2 \neq 0)$; $(\alpha_1 x+\beta_1)$ veya $(\alpha_2 x+\beta_2)$ 'den daha yüksek dereceli olmayan P_{n+q-1} 'in bir çarpanı ise ; $P_{n+q-1}^{(q-1)}; = a.P_n(k,x)$ idi.

$P_n(k,x) = \left[N + (k-n+1)D'\right] P_{n-1}(k,x) + D.P_{n-1}(k,x)'$tir.$P_n(k,x)$;$(\alpha_i x + \beta_i)$ 'den daha yüksek dereceli olmayan $(\alpha_i x + \beta_i)$ 'ler çarpanı ise; $(\alpha_1 x + \beta_1).(\alpha_2 x + \beta_2); (\alpha_1, \alpha_2 \neq 0); P_{n+1}$ 'in bir çarpanı ve $(\alpha_1 x + \beta_1)$ ya da $(\alpha_2 x + \beta_2)$ 'den daha yüksek dereceli olmayan bir kuvveti $P_{n+1}(x)$'te içeriliyor ise ; $\left[N + (k-n)D'\right] \equiv 0$; teorem 2.5 'ten $\left[N + (k-n)D'\right]$; $\left[N + (k-n)D'\right]$'yü ima eden çarpan olarak $(\alpha_1 x + \beta_1).(\alpha_2 x + \beta_2)$'yi içerir bilgisi altında ve ; $N + (k-n+1)D' \equiv 0$ ve $N + (k-n+1)D'; (\alpha_1 x + \beta_1).(\alpha_2 x + \beta_2)$'yi çarpan olarak içerir$(Beale, 1937 : 208)$.

Lemma-2: D, mükemmel kare değil. $(\alpha_i x + \beta_i)$'yi çarpan olarak içeren $N + sD'$'yi sağlayan tek bir 's' değeri vardır(Beale, 1937 : 208)..

Teorem 2.7: D, mükemmel kare değil . $D = (\alpha_1 x + \beta_1).(\alpha_2 x + \beta_2)$ olacak şekilde ifade edilebilsin. $\left[N + (k-n)D'\right]$,çarpan olarak $(\alpha_i x + \beta_i)$ $i = 1, 2$ içerirse ; P_{n+1}, $(\alpha_i x + \beta_i)$ ve $(\alpha_i x + \beta_i)$'den daha yüksek dereceli olmayan $(\alpha_i x + \beta_i)$'yi içerir(Beale, 1937:208).

İspat: $D = (\alpha_1 x + \beta_1).(\alpha_2 x + \beta_2)$ olmak üzere;

$P_{n+1}(k,x) = \left[N + (k-n)D'\right] P_n(k,x) + DP_n'(k,x)$; P_n ve D; $\alpha_i x + \beta_i'$yi içerdiğinden ; P_{n+1} 'inde bir çarpanıdır. Böylece; P_{n+1} çarpan olarak en az birinci dereceden bir $\alpha_i x + \beta_i$ 'yi içerir. Eğer P_{n+1} çarpan olarak $\alpha_i x + \beta_i$ 'den daha yüksek bir çarpanı içerirse ; Lemma-1 ışığı altında, P_n; n. dereceden bir polinom P_n ve P_n' ,$m < n$ için $(x-\alpha)^m$ çarpanını içerirse; P_n, $(x-\alpha)^{m+1}$ çarpanını içerir, bu lemma altında P_n ve P_n' , en az birinci dereceden $\alpha_i x + \beta_i$'yi içerirse; P_n 'de en az ikinci dereceden $(\alpha_i x + \beta_i)^2$'ni içerir.Teorem 2.6' da $(\alpha_i x + \beta_i)^q$ ve $\alpha_i x + \beta_i$'den daha yüksek dereceli olmayan P_{n+q-1}'in bir çarpanı ise $(\alpha_i x + \beta_i)$ ve $(\alpha_i x + \beta_i)$'den daha yüksek dereceli olmayan P_n'in bir çarpanıdır bilgisinden faydanılarak bu ifadenin Sonuç-1 $P_n(k,x) = \left[N + (k-n+1)D'\right] P_{n-1}(k,x) + D.P_{n-1}'(k,x)$; $(\alpha_i x + \beta_i)$ ve $(\alpha_i x + \beta_i)$'den daha yüksek dereceli olmayan P_n'in bir çarpanı ise Teorem 2.5 bilgisi altında $(\alpha_i x + \beta_i)$'de $\left[N + (k-n+1)D'\right]$'nün bir çarpanıdır. $(n-1) < n$ olduğu için $n_1 < n$ için,$(\alpha_i x + \beta_i)$;$\left[N + (k-n_1)D'\right]$'nün çarpanıdır(Beale,1937 : 208) .

$$\begin{array}{rcccccc} P_{n+1}(k,x) & = & \left[N+(k-n)D^{'}\right]P_n(k,x)+ & & DP_n^{'}(k,x) & & \\ \downarrow & = & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ (\alpha_i x+\beta_i) & = & (\alpha_i x+\beta_i) & (\alpha_i x+\beta_i) & (\alpha_i x+\beta_i) & (\alpha_i x+\beta_i) & \\ (\alpha_i x+\beta_i)^2 & = & (\alpha_i x+\beta_i)(\alpha_i x+\beta_i) & & (\alpha_i x+\beta_i) & & \end{array}$$

P_n ve $P_n^{'}$; en az birinci dereceden bulunuyorsa ; $(\alpha_i x+\beta_i)$'yi P_n en az $(\alpha_i x+\beta_i)^2$'yi içerir.

$$\begin{array}{rcccc} P_n(k,x) & = & \left[N+(k-n+1)D^{'}\right]P_{n-1}(k,x)+ & & DP_{n-1}(k,x) \\ \downarrow & = & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (\alpha_i x+\beta_i)^2 & = & (\alpha_i x+\beta_i) & (\alpha_i x+\beta_i) & (\alpha_i x+\beta_i) \end{array}$$

$n_1<n$ için $\left[N+(k-n+1)D^{'}\right];(\alpha_i x+\beta_i)$'yide içerir. Dolayısı ile Lemma-2 'de ifade edilen tek bir s değeri olması durumuna ters düşer.

Teorem 2.8: D mükemmel kare değil, yani $P_{n+1}\equiv 0, P_n\equiv 0$ ise bu durum ya $m\leq n$ için $\left[N+(k-m)D^{'}\right]\equiv 0$ ya da m' nin iki değeri vardır öyle ki (m_1,m_2) ,$N+(k-m_1)D^{'}$, $N+(k-m_2)D^{'}, m_1,m_2\leq n$ sırasıyla $(\alpha_1 x+\beta_1)$ ve $(\alpha_2 x+\beta_2)$'yi çarpan olarak içerir(Beale,1937 : 209).

İspat:$P_{n+1}(k,x)=\left[N+(k-n)D^{'}\right]P_n(k,x)+DP_n^{'}(k,x)$; $P_{n+1}\equiv 0$ için

$$0=\left[N+(k-n)D^{'}\right]P_n(k,x)+D.P_n^{'}(k,x)$$

P_n sabit bir değer ise $P_n^{'}=0$'dır.Dolayısıyla yukarıdaki ifade;

$$\begin{array}{rcl} \left[N+(k-n)D^{'}\right]P_n(k,x)+D.0 & = & 0 \\ \left[N+(k-n)D^{'}\right]P_n(k,x) & = & 0 \end{array}$$

olmasını gerektirir. $P_n$sabit değilse ;

$$\begin{aligned}\left[N+(k-n)D^{'}\right]P_n(k,x)+D.P_n^{'}(k,x) &= 0\\ P_n^{'} &= -\frac{\left[N+(k-n)D^{'}\right]P_n(k,x)}{D}\end{aligned}$$

olmalıdır(Beale, 1937 : 209).

Teorem 2.9: $N \equiv sabit$, D lineer ise , $n = 1, 2, 3, \ldots$ için tüm $n = 1, 2, 3, ..$ P_n'ler sabitlerdir.Çünkü $N \equiv sabit, N^{'} = 0, D = b_0 + b_1 x$ ise $D^{'} = b_1$'dir, $D^{''} = 0$'dır(Beale, 1937 : 208).

$$P_{n+1}^{'}(k,x) = (n+1).\left[N^{'}+\frac{2k-n}{2}D^{''}\right]P_n(k,x)$$

$P_0(k,x) = 1$, $P_1(k,x) = N + kD^{'} \Rightarrow P_1(k,x) = N + kb_1 \Rightarrow$sabit $P_{n+1}^{'}(k,x) = 0$ 'dır. Dolayısıyla türevi sıfır ise kendisi sabit olan polinomları verir .

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
JACOBİ POLİNOMUNU SAĞLAYAN
$P_n(k,x)$ 'LERİN KÖKLERİYLE OLAN İLİŞKİSİNİN KURULMASI

3.1.$\mathbf{P_n(k,x)'}$İN KÖKLERİYLE OLAN İLİŞKİSİ

Pearson diferansiyel denklemini sağlayan $P_n(k,x)$'lerin özel türü olan Jacobi polinomlarının kökleriyle olan ilişkisi (2.23), (2.24), (2.25) rekürans bağıntıları ile incelenir,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x_2} \equiv \frac{N}{D}$$

Pearson Diferansiyel denkleminde; N, birinci dereceden bir polinom ; D, ikinci dereceden bir polinom , N ve D ortak çarpanlara sahip olmaması koşulu altında, $P_n(k,x)$'ler α, β' ya bağlı olarak ortaya çıkan k 'ların varlığı için aşağıdaki ifadeler söylenebilir;

i) n ; polinomun derecesini gösterir ve en fazla $n = 1, 2, \ldots, k{+}1$'e kadar gidebilir.

ii) k;$P_n(k,x)$ 'lerin teorik olasılık yoğunluk fonksıyonu olan $D^k y$'ler için D'nin üssünü gösterir.Polinomun kökleri , k değerine bağlıdır.

Jacobi polinomunun kökleri ile olan ilişkisi incelenirken

$$J_n(x,\alpha,\beta) = x^{1-\alpha}.(1-x)^{1-\beta}.\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha-1}.(1-x)^{n+\beta-1})\alpha,\beta \epsilon R$$

ele alındı.(Lawton, 1932 : 442) Pearson diferansiyel denkleminin sırasıyla pay ve paydası olan N ve D ;

$$P_n(k,x) = \frac{1}{D^k y}.D^n.\frac{d^n D^k y}{dx^n}$$

$k = n$ için;

$$\begin{aligned} P_n(n,x) &= \frac{1}{D^n y}.D^n.\frac{d^n D^n y}{dx^n}, \\ D^n y &= x^{n+\alpha-1}.(1-x)^{n+\beta-1}, \\ &= \left(x^n.(1-x)^n\right).x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}, \\ y &= x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}, \\ D &= x.(1-x), \\ D(0) &= D(1) = 0, D^{'} = 2x \end{aligned}$$

$D = x.(1-x)$ Jacobi polinomunun paydasıdır ve Pearson diferansiyel denklemi $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ için $b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = -1$ 'dir.. Pay N için
$P_n(k,x) = \frac{1}{D^k y}.D^n.\frac{d^n D^k y}{dx^n}$

$$\begin{aligned} P_1(1,x) &= \frac{1}{Dy}.D.\frac{dDy}{dx^n} \\ &= \frac{1}{y}.(Dy^{'} + D^{'}y) \equiv N \\ &= \frac{1}{x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}}.\frac{d}{dx}(x^{\alpha}.(1-x)^{\beta}) \end{aligned}$$

$\frac{d}{dx}(x^{\alpha}.(1-x)^{\beta})$ ifadesinin incelenmesi ve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^{\alpha}.(1-x)^{\beta}) &= \alpha.x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta} - x^{\alpha}.\beta.(1-x)^{\beta-1} \\ &= x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}\left(\alpha.(1-x) - x\beta\right) \end{aligned}$$

elde edilen $\frac{d}{dx}(x^{\alpha}.(1-x)^{\beta})$'i $P_1(1,x)$'de yerinde ifade edilmesi ile ;

$$\begin{aligned} P_1(1,x) &= \frac{1}{x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}}\frac{d}{dx}(x^{\alpha}.(1-x)^{\beta}) \\ &= \frac{1}{x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}}x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}\left[\alpha\left(1-x\right)-x\beta\right] \\ &= \alpha\left(1-x\right)-x\beta \\ &= \alpha+(-\beta-\alpha)x \end{aligned}$$

$\alpha+(-\beta-\alpha)x \equiv N$ elde edilir. $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{N}{D}$ Pearson Diferansiyel denkleminde $D \equiv x.(1-x)$; $x=0$ ve $x=1$ noktası paydayı sıfırlayan noktalar olan kritik noktalardır.Jacobi polinomunun ağırlık fonksıyonu $\rho(x) = x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}$ ve daha önceki bölümlerde açıklandığı üzere ağırlık fonksiyonu Pearson diferansiyel denklemi sağlar;

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{'}(x)}{\rho(x)} &= \frac{x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}.\left[\left(\alpha-1\right)x^{-1}-\left(\beta-1\right)\left(1-x\right)^{-1}\right]}{x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}} \\ &= \frac{\left(\alpha-1\right)}{x}-\frac{\left(\beta-1\right)}{1-x} \equiv \frac{a_0+a_1x}{b_0+b_1x+b_2x^2} \end{aligned}$$

$a_0=\left(\alpha-1\right), a_1=2-\alpha-\beta, b_0=0, b_1=1, b_2=-1;$

$$x.(1-x)J_n^{''}(x,\alpha,\beta)+\left(\alpha-\left(\alpha+\beta\right)x\right)J_n^{'}(x,\alpha,\beta)+n.\left[\begin{array}{c} n-1 \\ +\alpha+\beta \end{array}\right]J_n(x,\alpha,\beta)=0$$

ikinci dereceden diferansiyel denklem elde edilir.

$\alpha,\beta>0$ koşulu altında ikinci dereceden diferansiyel denklemi sağlar.

$$\frac{J_n^{''}(x,\alpha,\beta)}{x.(1-x)}+\frac{\left(\alpha-\left(\alpha+\beta\right)x\right)}{x.(1-x)}J_n^{'}(x,\alpha,\beta)+\frac{n.(n-1+\alpha+\beta)}{x.(1-x)}J_n(x,\alpha,\beta)=0 \tag{2.30}$$

Bütün polinom fonksiyonlar her yerde analitiktir, fakat yukarıdaki ifadeye ışıklık etmesi açısından $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlar olmak üzere $\frac{f(x)}{g(x)}$ şeklindeki bütün fonksiyonlar paydada bulunan fonksıyonun sıfır yapmayan her x değeri

için analitiktir(Aydın ve diğerleri,2005 : 189).

Jacobi Polinomunda, x eksenini bölen D'nin kökleri $x = 0$ ve $x = 1$ paydayı sıfırlayan değerler olması sebebiyle $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$ aralıkları üzerinde Jacobi Polinomunun gerçel kökleri incelenir.$P_n(k, x)$'lerdeki polinomun derecesi olan n'ler en fazla $k + 1$'e kadar gidebilir. $P_n(k, x)$ ifadesindeki $J_n(x, \alpha, \beta)$ için k değerleri $k \geq 0$ olacak şekilde tamsayılardır $P_i(k, x), i.$ dereceden polinom için:

i; polinomun derecesini $i = n$ ve i en fazla $k + 1$ ' e kadar gidebilir.

k; polinomun köklerinde incelenen duruma göre α, β değerlerini etkileyen tam sayılardır.Jacobi polinomlarının kökleri incelenirken k_1, k_2, k_3 ile çeşitlendirildi.

$P_i(k, x) = 0$ için , $i = 1, 2, \ldots.., k + 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots j = 1, 2, .., i.$ $\alpha_{i,k,j}$ polinomun köklerini ifade eder ve j; polinomun kök sırasını gösterir Örneğin $\alpha_{2,k,,j}$; ikinci dereceden polinomun kökleridir ve polinomun k değerlerine bağlı olarak incelenen aralığa göre kökler değer alır ve $j = 1, 2$ 'dir,ikinci dereceden polinomun köklerini sırasıyla $\alpha_{2,k,1}, \alpha_{2,k,2}$ ile ifade edilir.

$P_1(k, x) = N + kD^{'}$, $P_1(k, x) = 0$ için $\alpha_{1,k,1}$;

$$\begin{aligned} P_1(k, x) &= N + kD^{'} \\ &= \alpha + k - x(\alpha + \beta + 2k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$P_1(k, x)$'in kökü olan $\alpha_{1,k,1} = \frac{\alpha+k}{\alpha+\beta+2k}$ incelen aralıktaki k değerlerine göre değerler alır.

$$P_{n+1}(k, x) = \left[N + (k - n)\, D^{'}\right] P_n(k, x) + D.P_n^{'}(k, x)$$

$$P_{n+1}^{'}(k, x) = (n + 1). \left[N^{'} + \frac{(2k - n)}{2} D^{''}\right] P_n(k, x)$$

(2.23) ve (2.24) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\theta &= \left[N^{'} + \frac{(2k-n)}{2}D^{''}\right] \\ &= -\beta - \alpha - 2k + n; \\ n &= 1, 2, ., k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu &= \left[N + (k-n)D^{'}\right]_{x=0} \\ &= \alpha + k - n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu &= \left[N + (k-n)D^{'}\right]_{x=1} \\ &= -\beta - (k-n)\end{aligned}$$

elde edilir(Beale, 1937 : 210). D'yi sıfır yapan değerler $x = 0$ ve $x = 1$ için sırasıyla μ, ν değerleridir, θ, α, k polinomla ilişkili sabitlerdir. Alınan k değerlerine göre işaret değişimleri μ ve ν değerleri $P_n(k, x)$'lerin katsayıları olarak gelen sabitlerdir ve μ ve ν değerlerinin işaret durumlarından polinom ve türevinin işareti tespit edilir ve θ'da incelenen polinomun türevinin işareti hakkında bilgi verir.

Jacobı polınomunda ; α ve β 'nın olası değerleriyle ilişkili iki durum incelenir. α ve β negatif olması durumunda Jacobı polinomunun türeten fonksıyonu Beta fonksıyonu olması ve Beta fonksıyonunun pozitif tanımlı bir fonksıyon olması sebebiyle α ve β 'yı pozitif yapan k değerleri düşünülür.$P_n(k, x) \equiv J_{k+1}(x, \alpha, \beta)$; $n = 1, 2, \ldots, (k+1)$ ilişkisi dikkate alınması ile aşağıda α ve β 'nın bazı koşulları altındaki durumlar incelenir.

$\alpha < 0$, $\beta < 0$, $|\alpha| < |\beta|$ ve α, β, $\alpha + \beta$ tam sayı değil. α'yı pozitif yapan k değeri k_1 , β'yı pozitif yapan k değeri k_2, $(\alpha + \beta + 2k) < 0$ şartını sağlayan k değeri k_3 olmak üzere $0 \leq k_1 \leq k_3 \leq k_2$ şartları altında

Durum-1: $0 \leq k < k_1$ ve $\theta > 0$, $\mu < 0$, $\nu > 0$, $0 < \alpha_{1,k,1} < 1$ ve $P_1^{'} > 0$ ise $J_{k+1}(x, \alpha, \beta)$; $(0, 1)$ aralığı üzerinde $\frac{(1)^k+(-1)^k}{2}$ tane köke sahiptir ve bu kökler gerçel köklerdir(Beale, 1937 : 211).

İspat: $P_1(k, x)$'in tek kökü olan $\alpha_{1,k,1}, 0 < \alpha_{1,k,1} < 1$ aralığında olduğu durumda varsayılmıştır.

$$\begin{aligned} P_1(k, x) &= N + kD^{'} \\ &= -(\alpha + \beta + 2k) + \alpha + k \\ &= P_1^{'}(k, x).x + \alpha + k \end{aligned}$$

$\alpha_{1,k,1} = \frac{\alpha+k}{\alpha+\beta+2k}, x = \alpha_{1,k,1}$için

$$\begin{aligned} P_1(k, \alpha_{1,k,1}) &= P_1^{'}(k, \alpha_{1,k,1})\alpha_{1,k,1} + \alpha + k \\ &= (-(\alpha + \beta + 2k)) \cdot \left(\frac{\alpha + k}{(\alpha + \beta + 2k)} \right) + \alpha + k \\ &= 0 \end{aligned}$$

$x < \alpha_{1,k,1}$ ve $x > \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k, x)$'in durumu

$$P_1(k, x) = xP_1^{'}(k, x) + \alpha + k$$

$$P_1(k, x < \alpha_{1,k,1}) = \left(x < \frac{\alpha + k}{(\alpha + \beta + 2k)} \right) (-(\alpha + \beta + 2k)) . + \alpha + k$$

$$P_1(k, x) = xP_1^{'}(k, x) + \alpha + k$$

$P_1^{'} > 0, 0 \leq k < k_1$

1) $x < \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k, x) < 0$, bu durumun incelenmesi, $x < \alpha_{1,k,1}$ için $0 \leq k < k_1, \alpha + k < 0$;

$$\begin{aligned} P_1(k,x) &= x.P_1^{'}(k,x)+\alpha+k \\ &= x.P_1^{'}(k,x)+(<0) \end{aligned}$$

$P_1^{'}>0, 0<\alpha_{1,k,1}<1, 0\leq k\leq k_1$ aralığında $\alpha+k<0$ olması sebebiyle bu şartlara uygun olan $\alpha_{1,k,1}=0.5$ için $P_1^{'}=6>0$,$P_1(k,x)=6x-3$ gibi düşünülmesi ile $x<\alpha_{1,k,1}$ için $1/3<0.5$ için

$$\begin{aligned} 6x-3 &= 6.(1/3)-3 \\ &= -1<0 \end{aligned}$$

'dır.

Bu incelemeler sonucunda

2)$x>\alpha_{1,k,1}$ için $0\leq k<k_1$ aralığında $P_1(k,x)>0$ durumu:

$0\leq k<k_1$ aralığında $P_1^{'}(k,x)>0$,$\alpha+k<0$, $P_1(k,x)=x.P_1^{'}(k,x)+\alpha+k$,$P_1(k,x)=6x-3$;$\alpha_{1,k,1}=\frac{1}{2}, 1>\frac{1}{2}$ için $P_1(k,x)>0$ şartını sağlar.Sonuç olarak ; $x<\alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x)<0$ ve $x>\alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x)>0$ 'dır. $P_{n+1}(k,x) = \left[N+(k-n)D^{'}\right]P_n(k,x)+D.P_n^{'}(k,x)$ bağıntısından $P_1(k,\alpha_{1,k,1})=0$'dır. Payda $D(x)=x.(1-x)$, $x=\alpha_{1,k,1}$ için $0<\alpha_{1,k,1}<1$ aralığında olması sebebiyle

$$\begin{aligned} D\left(\alpha_{1,k,1}\right) &= \alpha_{1,k,1}.(1-\alpha_{1,k,1}) \\ &= (>0).(>0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

$D\left(\alpha_{1,k,1}\right)>0$ elde edilir.$0\leq k\leq k_1$ aralığında $P_1^{'}>0, D\left(\alpha_{1,k,1}\right)>0$, $P_1(k,\alpha_{1,k,1})=0$ bilgilerini gözönünde bulundurulması ile ;

$$\begin{aligned} P_{n+1}(k,x) &= \left[N+(k-n)D^{'}\right]P_n(k,x)+DP_n^{'}(k,x) \\ P_2(k,x) &= \left[N+(k-1)D^{'}\right]P_1(k,x)+D.P_1^{'}(k,x) \end{aligned}$$

ve İfadenin $x=\alpha_{1,k,1}$ için yazılması ile ;

$$P_2(k,\alpha_{1,k,1})=\left[N+(k-1)D^{'}\right]P_1(k,\alpha_{1,k,1})+D.P_1^{'}(k,\alpha_{1,k,1})$$

elde edilen ifadede yukarıda bilgileri yerinde gösterilmesi ile

$$\begin{aligned} P_2(k,\alpha_{1,k,1}) &= \left[N+(k-1)D^{'}\right].0+(>0).(>0) \\ &= 0+(>0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

$P_2(k,\alpha_{1,k,1})>0$ elde edilir.

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{'}(k,x) &= (n+1).\left[N^{'}+\frac{2k-n}{2}D^{''}\right]P_n(k,x) \\ P_2^{'}(k,x) &= 2.\left[N^{'}+\frac{2k-1}{2}D^{''}\right]P_1(k,x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \left[N^{'}+\frac{2k-n}{2}D^{''}\right] \\ &= \left[N^{'}+\frac{2k-1}{2}D^{''}\right] \\ &= -(\alpha+\beta+2k)+1 \\ &= P_1^{'}(k,x)+1 \end{aligned}$$

$P_1^{'}(k,x), \theta>0,$

$$\begin{aligned} P_2^{'}(k,x) &= 2.\left[N^{'} + \frac{2k-1}{2}D^{''}\right] P_1(k,x) \\ &= 2.\theta.P_1(k,x) \end{aligned}$$

$x = \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k, \alpha_{1,k,1})$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} P_2^{'}(k,\alpha_{1,k,1}) &= 2.\theta.P_1(k,\alpha_{1,k,1}) \\ &= 2.\theta.0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$P_2^{'}(k,\alpha_{1,k,1}) = 0$ elde edilir. $x < \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x) < 0$

$$\begin{aligned} P_2^{'}(k,x) &= 2.\theta.P_1(k,x) \\ &= 2.(>0).(<0) \\ &= (<0) \end{aligned}$$

$x < \alpha_{1,k,1}$ için $P_2^{'}(k,x) < 0$ elde edilir .$x > \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x) > 0$ bilgisi ile $0 < \alpha_{1,k,1} < 1$ aralığında $\theta > 0$ olması sebebiyle

$$\begin{aligned} P_2^{'}(k,x) &= 2.\theta.P_1(k,x) \\ &= 2.(>0).(>0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıda elde edilen sonuçlar $x = \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x) = 0$ ve $x < \alpha_{1,k,1} x > \alpha_{1,k,1}$, $P_1(k,x)$'in işaretiyle ilişkili yorumlardan ve θ 'nın işaretiyle ilişkili bilgilerden elde edilir.

Böylece

$$P_2(k,x) = \left[N + (k-1)D^{'}\right] P_1(k,x) + D.P_1^{'}(k,x)$$

için

$*x = \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k, \alpha_{1,k,1}) = 0,\ D(\alpha_{1,k,1}) > 0$ idi.$P_1^{'}(k,x) > 0$ idi.

$$\begin{aligned} P_2(k, \alpha_{1,k,1}) &= \left[N + (k-1)D^{'}\right] P_1(k, \alpha_{1,k,1}) + D.P_1^{'}(k, \alpha_{1,k,1}) \\ &= 0 + (>0).(>0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

$*x < \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x) < 0$ ve $x < \alpha_{1,k,1}$ için $P_2(k,x)$'i incelenmesi ise ; $0 < \alpha_{1,k,1} <$ 1aralığını göz önünde tutulması ile $x < \alpha_{1,k,1}$ için $x = 0$ değeri için $P_2(k,x)$ 'in durumu $x < \alpha_{1,k,1}$ durumu,

$$P_2(k,x) = \left[N + (k-1)D^{'}\right] P_1(k,x) + D.P_1^{'}(k,x)$$

$$\left[N + (k-1)D^{'}\right]_{x=0} = \mu$$

$\mu < 0,\ 0 \leq k \leq k_1$ ve $x < \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x) < 0; x = 0$ için; $D(x) = x.(1-x)$, $D(0) = 0$

$$\begin{aligned} P_2(k,x) &= \left[N + (k-1)D^{'}\right] P_1(k,x) + D.P_1^{'}(k,x) \\ P_2(k,0) &= \left[N + (k-1)D^{'}\right]_{x=0} P_1(k,0) + D.P_1^{'}(k,0) \\ &= \mu.P_1(k,0) + 0 \\ &= (<0).(<0) + 0 \\ &= (>0) \end{aligned}$$

elde edilir. $x = 0$ değeri $x < \alpha_{1,k,1}$ için $P_2(k,x) > 0$ olduğunu gösterilmesi için

ele alınır. $x = 0$ değeri $\alpha_{1,k,1}$ 'den küçük alt sınırların en büyük değeri olan değer olarak ele alınarak $P_2(k,x)$'in işareti hakkında bilgi verir..

$*0 < \alpha_{1,k,1} < 1$, $x > \alpha_{1,k,1}$ için $P_2(k,x)$'in işareti hakkında bilgi edinebilmesi için üst sınırların en küçük değeri $x = 1$ değeri için inceleme şu şekildedir:

$\left[N + (k-1)D^{'}\right]_{x=1} = \nu$, $\nu > 0$, $0 \leq k \leq k_1$ ve $x > \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x) > 0$ 'dır.

$x = 1$ için $P_2(k,1)$, $D(x) = x.(1-x), D(1) = 0$ için elde edilir, bu sebeple hiçbir gerçel köke sahip değildir. $P_{n+1}^{'}(k,x) = (n+1).\left[N^{'} + \frac{(2k-n)}{2}D^{''}\right] P_n(k,x)$ ilişkisinden faydanılması ile $n = 2$ için

$$\begin{aligned} P_3^{'}(k,x) &= 3.\left[N^{'} + \frac{(2k-n)}{2}D^{''}\right] P_2(k,x) \\ &= 3.\theta.P_2(k,x) \end{aligned}$$

$P_2(k,x)$'in tüm x'ler için $P_2(k,x) > 0$ bilgisi altında;

$$\begin{aligned} P_3^{'}(k,x) &= 3.\theta.P_2(k,x) \\ &= 3.(>0).(>0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

Dolayısıyla $P_3^{'}(k,x) > 0$'dır. $P_3(k,x)$,polinomunun $(0,1)$ aralığı içinde bir kökünün olup olmadığı hakkında incelemeyi uç değerler olan 0 ve 1 değerlerinde işaret durumlarını incelenmesi aşağıda ifade edilmiştir.

$x = 0$ için $P_3(k,0) < 0$; $x = 1$ için $\left[N + (k-2)D^{'}\right]_{x=1} = \nu$ ve $D(x) = x.(1-x)$ olmak üzere $D(1) = 0$

$$\begin{aligned} P_{n+1}(k,x) &= \left[N + (k-n)D^{'}\right] P_n(k,x) + D.P_n^{'}(k,x) \\ P_3(k,1) &= \left[N + (k-n)D^{'}\right]_{x=1} P_2(k,1) + D.P_2^{'}(k,1) \end{aligned}$$

$\left[N + (k-2)D^{'}\right]_{x=1} = \nu$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} P_3(k,1) &= \left[N + (k-n)D^{'}\right]_{x=1} P_2(k,1) + D.P_2^{'}(k,1) \\ &= \nu.P_2(k,1) + 0.P_2^{'}(k,1) \\ &= (>0).(>0) + 0 \\ &= (>0) \end{aligned}$$

Aralığın uç değerlerindeki $x = 0$ ve $x = 1$ değerleri için $P_3(k,0) < 0$ ve $P_3(k,1) > 0$ olması sebebiyle $0 < \alpha_{3,k,1} < 1$ aralığında tek bir gerçel kök olan $\alpha_{3,k,1}$'i gösterir. P_3 'ten P_4'e geçişteki muhakemeler , P_1 'den P_2'ye geçişteki durumla aynıdır. Bu yöntemin devam ettirilmesi ile ;

$$P_4(k,x) = \left[N + (k-3)D^{'}\right]_{x=0}.P_3(k,x) + D.P_3^{'}(k,x)$$

$P_3^{'}(k,x) > 0$ elde edilen bilgileri ışığında $x = \alpha_{3,k,1}$ için $D(x) = x.(1-x)$, $0 < \alpha_{3,k,1} < 1$ için $D > 0$,

$$\begin{aligned} P_4(k,x) &= \left[N + (k-3)D^{'}\right]_{x=0}.P_3(k,x) + D.P_3^{'}(k,x) \\ P_4(k,\alpha_{3,k,1}) &= \left[N + (k-3)D^{'}\right]_{x=0}.P_3(k,\alpha_{3,k,1}) + D.P_3^{'}(k,\alpha_{3,k,1}) \\ &= \mu.0 + (>0).(>0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

$0 < \alpha_{3,k,1} < 1$ için

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{'}(k,x) &= (n+1).\left[N^{'} + \frac{2k-n}{2}D^{''}\right].P_n(k,x) \\ P_4^{'}(k,x) &= 4.\theta.P_3(k,x) \end{aligned}$$

$0 \leq k \leq k_1$ için her zaman $\theta > 0$;

1)Alınan k'lar $0 \leq k \leq k_1$ aralığında $x < \alpha_{3,k,1}$ için $P_3(k,x) < 0$;

$$\begin{aligned} P_4^{'}(k,x) &= 4.\theta.P_3(k,x) \\ &= 4.(>0).(<0) \\ &= (<0) \end{aligned}$$

2)Alınan k 'lar $0 \leq k \leq k_1$ aralığında $x > \alpha_{3,k,1}$ için $P_3(k,x) < 0$;

$$\begin{aligned} P_4^{'}(k,x) &= 4.\theta.P_3(k,x) \\ &= 4.(>0).(>0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

3)Alınan k'lar $0 \leq k \leq k_1$ aralığında $x = \alpha_{3,k,1}$ için $P_3(k,x) = 0$,

$$\begin{aligned} P_4^{'}(k,x) &= 4.\theta.P_3(k,x) \\ &= 4.(>0).0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$x = \alpha_{3,k,1}$ için $P_3(k,x)$'in işaretiyle ilişkili yorumlardan $P_2(k,x)$ için izlenilen yönteme göre, $0 < \alpha_{3,k,1} < 1$, $x < \alpha_{3,k,1}$ için $x = 0$ olmak üzere $\left[N + (k-3)D^{'}\right]_{x=0} . = \mu$, $\mu < 0, 0 \leq k \leq k_1$ ve $x < \alpha_{3,k,1}$ için $P_3(k,x) < 0$ için, $D = x.(1-x)$, $D(0) = 0$;

$$\begin{aligned} P_4(k,0) &= \left[N + (k-3)D^{'}\right]_{x=0} P_3(k,0) + D.P_3^{'}(k,0) \\ &= (<0).(<0) + 0.(>0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

$P_4(k,0)$, $0 < \alpha_{3,k,1} < 1$'ler göz önünde bulundurulması ile $x < \alpha_{3,k,1}$ 'ler için $P_4(k,0) > 0$ 'dır.

$0 < \alpha_{3,k,1} < 1$, $x > \alpha_{3,k,1}$ için $x = 1$ olsun. $\left[N + (k-3)D^{'}\right]_{x=1} = \nu$, $\nu > 0$, $0 \leq k \leq k_1$ ve $x > \alpha_{3,k,1}$ için $P_3(k,x) > 0$,$D(1) = 0$,

$$\begin{aligned} P_4(k,1) &= \left[N + (k-3)D^{'}\right]_{x=1} P_3(k,1) + D.P_3^{'}(k,1) \\ &= (>0).(>0) + 0.P_3^{'}(k,1) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

$$P_4(k,\alpha_{3,k,1}) = \left[N + (k-3)D^{'}\right]_{x=0,1} P_3(k,\alpha_{3,k,1}) + D.P_3^{'}(k,\alpha_{3,k,1})$$

$P_3^{'}(k,\alpha_{3,k,1}) > 0, D(\alpha_{3,k,1}) > 0$

$$\begin{aligned} P_4(k,\alpha_{3,k,1}) &= \left[N + (k-3)D^{'}\right]_{x=0,1} .0 + (>0).(>0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

Bu yüzden $0 < \alpha_{3,k,1} < 1$ aralığındaki köklerin bulunduğu aralıkların iki uç noktası olan $x = 1$ ve $x = 0$'da $P_4(k,x) > 0$ olduğu diğer bir ifadeyle işaret değiştirmediği görülür, tüm gerçel x'ler için $P_4(k,x) > 0$'dır ve hiçbir gerçel köke sahip değildir.

$P_n(k,x) \equiv J_{k+1}(x,\alpha,\beta), n = 1,2,.....,k+1$'ler için k çift ise yani Jacobı polınomonun tek dereceli polinom olma durumunda $(0,1)$ aralığı üzerinde tek gerçel kök vardır, k tek ise yani Jacobi polinomu derecesi çift sayı olanlar ifade edilen aralıkta hiçbir gerçel köke sahip değildir(Beale, 1937 : 211).

Elde edilen polinomların işaret bilgileriyle k lar $0 \leq k \leq k_1$ aralığında olmak üzere özet yorum aşağıdaki gibidir;

1) $P_1(k,x) = 0$ için $\alpha_{1,k,1} = \frac{\alpha+k}{\alpha+\beta+2k}$ ve kökler $0 < \alpha_{1,k,1} < 1$ aralığındadır k'nın $0 \leq k \leq k_1$ değerleri ile bulunmaktadır, $P_1^{'} > 0$ 'dır.

2) $0 < \alpha_{1,k,1} < 1$ ve $x = \alpha_{1,k,1}$, $x < \alpha_{1,k,1}$,$x > \alpha_{1,k,1}$ için $P_2(k,x) > 0$ olduğu ve bu bilgiler ve ikinci dereceden elde edilen polinomun türevinin işaretiyle ilişkili bilgiler:

$*$ $0 < \alpha_{1,k,1} < 1$ aralığındaki $\alpha_{1,k,1}$'lerden küçük olan x'ler diğer bir ifadeyle $(-\infty, 0]$ aralığına dahil olan $x < \alpha_{1,k,1}$ için $P_2^{'} < 0$;

$*$ $0 < \alpha_{1,k,1} < 1$ aralığındaki $\alpha_{1,k,1}$'lerden büyük olan x'ler diğer bir ifadeyle $[1, \infty)$ aralığına dahil olan $x > \alpha_{1,k,1}$ için $P_2^{'} > 0$;

$*$ $0 < \alpha_{1,k,1} < 1$ aralığındaki $x = \alpha_{1,k,1}$ için diğer bir ifadeyle$0 < x < 1$ için $P_2^{'}(\alpha_{1,k,1}) = 0$ 'dır.

İkinci dereceden Jacobi polinomu $P_1(k,x)$'in kökü olan $\alpha_{1,k,1}$ kökü baz alınarak $0 < \alpha_{1,k,1} < 1$ ve k'lar $0 \leq k \leq k_1$ olmak üzere incelenen şartlar altında ikinci dereceden Jacobi polinomunu x eksenını kesmez ve bu aralıkta hiçbir gerçel kökü yoktur.

3)$P_3^{'}(k,x) > 0$, aralığın uç değerlerindeki $x = 0$ ve $x = 1$ değerleri için $P_3(k,0) < 0$ ve $P_3(k,1) > 0$ olması sebebiyle $0 < \alpha_{3,k,1} < 1$ aralığında tek bir gerçel kök olan $\alpha_{3,k,1}$ vardır. $P_1(k,x)$'teki şartlar aynen sağlanmaktadır.

4)$\alpha_{3,k,1}$ kökü baz alınarak $P_4^{'}(k,x)$ için

$*$ $x < \alpha_{3,k,1}$ için alınan x'ler $(-\infty, 0]$ ve $0 < \alpha_{3,k,1} < 1$ için $P_4^{'}(k,x) < 0$,

$*x > \alpha_{3,k,1}$ için alınan x'ler $[1, \infty)$ ve $0 < \alpha_{3,k,1} < 1$ için $P_4^{'}(k,x) > 0$;

$*x = \alpha_{3,k,1}$ için $0 < \alpha_{3,k,1} < 1$ olmak üzere $P_4^{'}(k,x) = 0$

$P_4(k,x) > 0$ olduğu görüldü.Bu bilgilere dayanarak, x eksenını kesen bir kökün varlığından söz edilemez(Beale, 1937 : 211).

Durum-2:İncelenen k' lar, $k_1 < k \leq k_3$, $k = k_1 + q$, $q = 1, 2, ..., k_3 - k_1$; $n = 1, 2, ..., q-1$ için $\theta > 0, \mu > 0, n = q, q+1, ..., q+k_1$ için $\mu < 0, \nu > 0, \alpha_{1,k,1} < 0, P_1^{'}(k,x) > 0$'dır. $J_{k_1+q+1}(x, \alpha, \beta)$, $(-\infty, 0)$ içinde q farklı köke sahiptir ve $(0,1)$ aralığı içinde ise $\frac{(1)^k+(-1)^k}{2}$ tane köke sahiptir ve bunlar gerçel köklerdir(Beale, 1937 : 211).

İspat: $n = 1, 2, ..., q$ dizisi için θ, μ, ν üzerindeki şartlar $\theta > 0, \mu > 0, \nu > 0$ durum-2 'de verilmiştir. $P_1(k,x) = 0$ için elde edilen $\alpha_{1,k,1}$'ler $\alpha_{1,k,1} < 0$, $(-\infty, 0)$ aralığına düşen kökler üzerinde inceleme yapılır. $P_1^{'}(k,x) > 0$ koşulu altında $*x > \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x) > 0$, $x < \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x) < 0$'dır şöyle ki; $P_1^{'}(k,x) > 0$ ve $k_1 < k \leq k_3$ aralığında $\alpha + k > 0$ olması sebebiyle

$$\begin{aligned} P_1(k,x) &= N + kD^{'} \\ &= (-\beta - \alpha)x + \alpha + k.(1 - 2x) \\ &= (-\beta - \alpha - 2k)x + \alpha + k \\ &= x.P_1^{'}(k,x) + \alpha + k \\ &= (> 0).x + (> 0) \end{aligned}$$

$x < \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x) < 0$,$x > \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x) > 0$ 'dır. Örneğin $P_1(k,x) = 3x + 3$ olmak üzere $P_1^{'}(k,x) > 0$ ve $\alpha + k > 0.3x + 3 = 0, \alpha_{1,k,1} = -1, -2 < -1, x = -2$ için $3x + 3 = -3 < 0, 0 > -1$ için $3x + 3 = 3 > 0.x < \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x) < 0, x > \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x) > 0$ olduğu görülür.$P_2(k,x)$ için , $\alpha_{1,k,1} < 0$ olması sebebiyle

$$\begin{aligned} D(\alpha_{1,k,1}) &= \alpha_{1,k,1} \,.\, (1 - \alpha_{1,k,1}) \\ &= (< 0).(> 0) \\ &= (< 0) \end{aligned}$$

$D(\alpha_{1,k,1}) < 0$ ve $P_1^{'}(k,x) > 0$ bilgisi ile

$$\begin{aligned} P_{n+1}(k,x) &= \left[N + (k-n)D^{'}\right] P_n(k,x) + D.P_n^{'}(k,x) \\ P_2(k,x) &= \left[N + (k-1)D^{'}\right] P_1(k,x) + D.P_1^{'}(k,x) \end{aligned}$$

$x = \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k, \alpha_{1,k,1}) = 0$,$D(\alpha_{1,k,1}) < 0$ ve $P_1^{'}(k,x) > 0$

$$\begin{aligned} P_2(k,\alpha_{1,k,1}) &= \left[N+(k-1)D^{'}\right]P_1(k,\alpha_{1,k,1})+D.P_1^{'}(k,\alpha_{1,k,1}) \\ &= \left[N+(k-1)D^{'}\right].0+(<0).(>0) \\ &= (<0) \end{aligned}$$

$P_2(k,\alpha_{1,k,1}) < 0$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{'}(k,x) &= (n+1).\left[N^{'}+\frac{(2k-n)}{2}D^{''}\right]P_n(k,x) \\ P_2^{'}(k,\alpha_{1,k,1}) &= 2.\theta.P_1(k,\alpha_{1,k,1}) \\ &= 2.\theta.0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

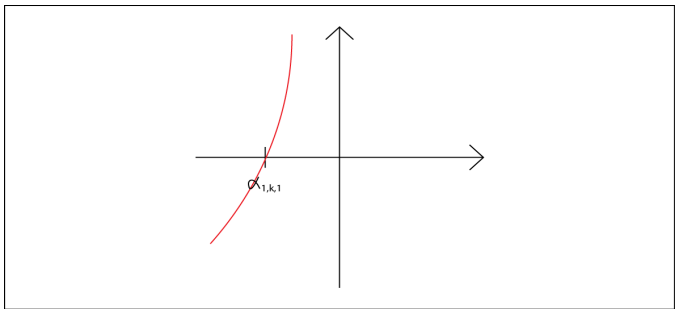
$x < \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x) < 0, \theta > 0$ bilgileri altında;

$$\begin{aligned} P_2^{'}(k,x) &= 2.\theta.P_1(k,x) \\ &= 2.(>0).(<0) \\ &= (<0) \end{aligned}$$

$x > \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x) > 0, \theta > 0,$

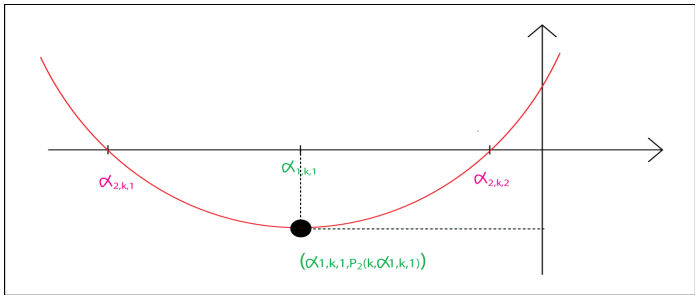
$$\begin{aligned} P_2^{'}(k,x) &= 2.\theta.P_1(k,x) \\ &= 2.(>0).(>0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

Şekil 1: $\alpha_{1,k,1}$ in konumu



: *Kaynak* : Çalışma yazar tarafından oluşturulmuştur.

Şekil 2: $\alpha_{1,k,1}$' e göre $\alpha_{2,k,i}$ 'lerin konumu; $i = 1, 2$



: *Kaynak* : Çalışma yazar tarafından oluşturulmuştur.

$*P_2(k, \alpha_{1,k,1})$

$*P_2'(k, \alpha_{1,k,1}) = 0$

$*x < \alpha_{1,k,1} \Rightarrow P_2'(k, x) < 0$

$*x > \alpha_{1,k,1} \Rightarrow P_2'(k, x) > 0$

$|P_2(k, \pm\infty)| = \infty$ olması sebebiyle en solda bulunan iki gerçel köke sahiptir ve $\alpha_{2,k,1}$, $(-\infty, 0)$ aralığı içindedir (Beale, 1937 : 211).

Şekildende görüleceği üzere $\alpha_{2,k,2}$,$(\alpha_{1,k,1}$, $0)$ içinde olduğu görülür . Şekilde $P_2(k, 0) > 0$' dır, çünkü $P_2(k, x)$ için $k_1 < k \leq k_3$ aralığında $n = 1, 2, ., q - 1$

için $\mu > 0$, $x = 0$ değerinde $0 > \alpha_{1,k,1}$ yani $x > \alpha_{1,k,1}$ için $P_1(k,x) > 0$ idi ve $x = 0$ için $D(x) = x.(1-x)$,$D(0) = 0$

$$\begin{aligned} P_{n+1}(k,x) &= \left[N + (k-n)D^{'}\right] P_n(k,x) + D.P_n^{'}(k,x) \\ P_2(k,0) &= \left[N + (k-n)D^{'}\right]_{x=0} P_1(k,0) + D.P_1^{'}(k,x) \\ &= \mu.P_1(k,0) + 0.P_1^{'}(k,x) \\ &= (>0).(>0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu yöntemin devamı ile $n+1 = 1, 2, ., q$'ya kadar $P_q(k,x); (-\infty, 0)$ içinde q köke sahiptir ve $P_q^{'}(k, \alpha_{q,k,1}) < 0$'dır ve şekildende görüleceği üzere $x = \alpha_{2,k,1} < \alpha_{1,k,1}$'dir ve $x < \alpha_{1,k,1}$'ler için $P_2^{'}(k,x) < 0$ elde edilmiş bilgisi ışığında $x = \alpha_{2,k,1} < \alpha_{1,k,1}$ için $P_2^{'}(k, \alpha_{2,k,1}) < 0$'dir.

$n = q+1, q+2, ..., q+k_1$ dereceli polinomlar için durum -2 'de $\theta > 0, \mu < 0, \nu > 0$ koşulları altında q. dereceden polinomun q kökü vardır ve $i = 1, 2, ..., q$ ve bu kökler negatiftir diğer bir ifadeyle $-\infty < \alpha_{q,k,i} < 0$'dadır ve bu köklerin türevleri olan $P_q^{'}(k, \alpha_{q,k,1}) < 0, i = 1, 2, \ldots, q$ için sırasıyla negatif ve pozitif olduğudur.q'nun çift yada tek olma varsayımı ile q'nun tek ve polinomun tek indisli köklerinin türevleri negatif, çift indisli köklerinin türevleri pozitif ise ;

$P_q^{'}(k, \alpha_{q,k,1}) < 0, ...P_q^{'}(k, \alpha_{q,k,q}) < 0$ ve $x < \alpha_{q,k,1}$ için $P_q(k,x) > 0$ ve $x > \alpha_{q,k,q}$ için $P_q(k,x) < 0$ varsayımı altında;

$$\begin{aligned} P_{n+1}(k,x) &= \left[N + (k-n)D^{'}\right] P_n(k,x) + D.P_n^{'}(k,x) \\ P_{q+1}(k,x) &= \left[N + (k-n)D^{'}\right]_{x=0} P_q(k,x) + D.P_q^{'}(k,x) \\ P_{q+1}(k,x) &= \left[N + (k-n)D^{'}\right]_{x=1} P_q(k,x) + D.P_q^{'}(k,x) \end{aligned}$$

$(q+1)$. dereceden polinomun $P_q(k,x)$'in kökleri olan $i = 1, 2, \ldots, q$ için q tane

kök olan $\alpha_{q,k,i}$'lere göre;

$$P_{q+1}(k,\alpha_{q,k,i}) = \left[N+(k-n)D^{'}\right]_{x=1} P_q(k,\alpha_{q,k,i}) + D.P_q^{'}(k,\alpha_{q,k,i})$$

$i = 1,2.,q, i = 1$ ve $-\infty < \alpha_{q,k,i} < 0$ için $D(\alpha_{q,k,i}) = (\alpha_{q,k,i}).(1-\alpha_{q,k,i})$, $D(\alpha_{q,k,i}) < 0$ ve tek dereceli köklerde $P_q^{'}(k,\alpha_{q,k,1}) < 0$ varsayımı altında hareket edilmesi ile bu bilgiler altında

$$\begin{aligned} P_{q+1}(k,\alpha_{q,k,1}) &= \left[N+(k-q)D^{'}\right] P_q(k,\alpha_{q,k,1}) + D(\alpha_{q,k,1}).P_q^{'}(k,\alpha_{q,k,1}) \\ &= \left[N+(k-q)D^{'}\right].0 + (<0).(<0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

çift indisli köklerde$P_q^{'}(k,\alpha_{q,k,2})$ kabülü altında;

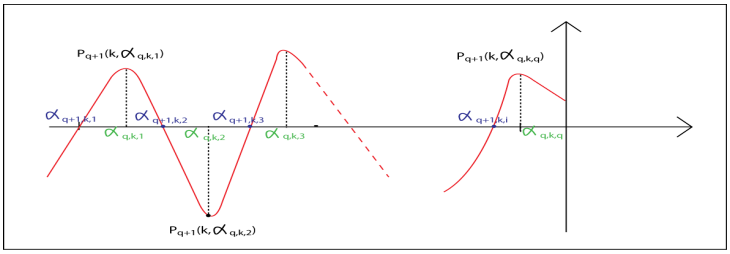
$$\begin{aligned} P_{q+1}(k,\alpha_{q,k,2}) &= \left[N+(k-q)D^{'}\right] P_q(k,\alpha_{q,k,2}) + D(\alpha_{q,k,2}).P_q^{'}(k,\alpha_{q,k,2}) \\ &= \left[N+(k-q)D^{'}\right].0 + (<0).(>0) \\ &= (<0) \end{aligned}$$

Bu şekilde işleme devam edilmesi ile;

$$\begin{aligned} P_{q+1}(k,\alpha_{q,k,1}) &> 0 \\ P_{q+1}(k,\alpha_{q,k,2}) &< 0 \\ P_{q+1}(k,\alpha_{q,k,3}) &> 0 \\ &. \\ &. \\ &. \\ P_{q+1}(k,\alpha_{q,k,q}) &> 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $P_{q+1}(k,\alpha_{q,k,i})$'ler sırasıyla $i=1,2\ldots,q$ için yukarıda ifade edildiği gibi q'nun tek olduğu varsayımı altında ele alınır. Görüldüğü üzere $P_q(k,x)$'lerin kökleri olan $\alpha_{q,k,i}$'lere göre $(q+1)$. Dereceden polinom olan $P_{q+1}(k,x)$'lerin $\alpha_{q,k,i}$'lere göre işaretleri, konumları hakkında bilgi verir. Şekildende görüleceği üzere $\alpha_{q,k,i}$'ler $P_{q+1}(k,x)$'in $q-1$ tane kökü ile ayrılır.

Şekil 3**:** $\alpha_{q+1,k,i}$ lerin $\alpha_{q,k,i}$ lere göre konumları



: *Kaynak* : Çalışma yazar tarafından oluşturulmuştur.

$P_{q+1}(k,\alpha_{q,k,1})>0$ ve

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(k,x) &= (n+1).\left[N'+\frac{(2k-n)}{2}D''\right]P_{n(k,x)} \\ P'_{q+1}(k,x) &= (q+1).\theta.P_q(k,x) \end{aligned}$$

$\theta>0$ ve $x<\alpha_{q,k,1}$ için $P_q(k,x)>0$ ve $x<\alpha_{q,k,1}$ için;

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(k,x) &= (n+1).\left[N'+\frac{(2k-n)}{2}D''\right]P_n(k,x) \\ P'_{q+1}(k,x) &= (q+1).\theta.P_q(k,x) \\ &= (>0).(>0).(>0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

$x=\alpha_{q,k,1}$ için $P'_{q+1}(k,\alpha_{q,k,1})=0$'dır.

Özet olarak ; $x < \alpha_{q,k,1}$ için $P'_{q+1}(k,x) = (> 0)$; $x < \alpha_{q,k,1}$,için $P_q(k,x) > 0$, $x < \alpha_{q,k,1}$ için $P'_{q+1}(k,x) > 0, x = \alpha_{q,k,1}$ için $P'_{q+1}(k,\alpha_{q,k,1}) = 0$'dır.Bu bilgiler altında;

Şekil 4: $\alpha_{q+1,k,1}$ in $\alpha_{q,k,1}$ e göre konumu



: *Kaynak* : Çalışma yazar tarafından oluşturulmuştur.

$P_{q+1}(k,x)$'in ilk kökü olan $\alpha_{q+1,k,1}$ şekildende görüleceği üzere $(-\infty, \alpha_{q,k,1})$ içine düşen aralığın içinde yer alır.Şu ana kadar yapılan varsayımlar q'nun tek sayı olması durumunda incelendi .

$$\begin{aligned} P_{n+1}(k,x) &= \left[N + (k-n)D'\right] P_n(k,x) + D.P'_n(k,x) \\ P_{q+1}(k,\alpha_{q,k,q}) &= \left[N + (k-q)D'\right] P_q(k,\alpha_{q,k,q}) + D.P'_q(k,\alpha_{q,k,q}) \end{aligned}$$

$\alpha_{q,k,q} < 0$ olması sebebiyle $D(\alpha_{q,k,q}) = \alpha_{q,k,q}.(1 - \alpha_{q,k,q}) \Rightarrow D < 0$ ve $P'_q(k,\alpha_{q,k,q}) < 0$. Dolayısıyla;

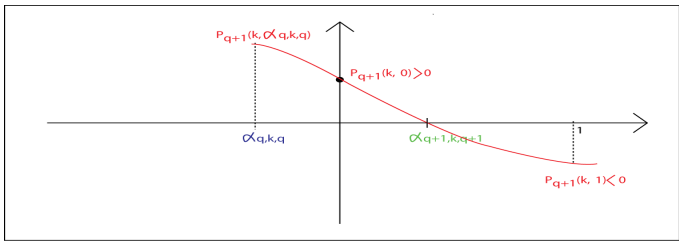
$$\begin{aligned} P_{q+1}(k,\alpha_{q,k,q}) &= \left[N + (k-q)D'\right] P_q(k,\alpha_{q,k,q}) + D.P'_q(k,\alpha_{q,k,q}) \\ &= \left[N + (k-q)D'\right].0 + (> 0).(< 0) \\ &= (> 0) \end{aligned}$$

bilgisi ile

$$
\begin{aligned}
P'_{n+1}(k,x) &= (n+1).\left[N' + \frac{(2k-n)}{2}D''\right] P_n(k,x) \\
P'_{q+1}(k,\alpha_{q,k,q}) &= (q+1).\theta.P_q(k,\alpha_{q,k,q}) \\
&= (>0).(>0).0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$x > \alpha_{q,k,q}$ için $P'_{q+1}(k,x) < 0$'dır. Bu biligiler altında

Şekil 5: $P_{q+1}(k,0)$ ın ve $\alpha_{q+1,k,q+1}$ in konumu



: *Kaynak* : Çalışma yazar tarafından oluşturulmuştur.

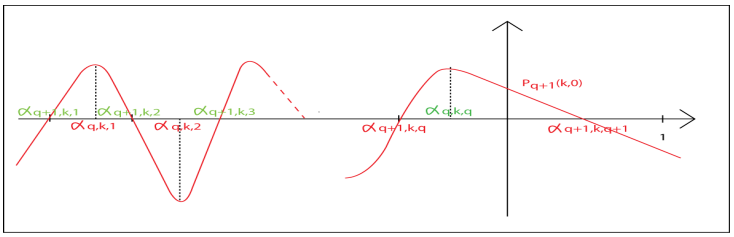
$(-\infty, 0)$ içindeki $P_{q+1}(k,x)$'in q tane kökünün yerleri hakkında bilgi elde edilir. $x > \alpha_{q,k,q}$'lar için $P_{q+1}(k,x)$'in durumu için $x = 0$,$x > \alpha_{q,k,q}$ için diğer bir ifadeyle $x = 0 > \alpha_{q,k,q}$

$$
\begin{aligned}
P_{q+1}(k,x) &= \left[N + (k-n)D'\right]_{x=0} P_q(k,x) + D.P'_q(k,x) \\
P_{q+1}(k,0) &= \mu.P_q(k,0) + 0.P'_q(k,0) \\
&= (<0).P_q(k,0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{q+1}(k,x) &= \left[N + (k-n)D'\right]_{x=1} P_q(k,x) + D.P'_q(k,x) \\
P_{q+1}(k,1) &= \nu.P_q(k,1) + 0.P'_q(k,1) \\
&= (>0).P_q(k,1)
\end{aligned}
$$

Şekilden de görüleceği üzere $(-\infty, 0)$ içinde $P_{q+1}(k,x)$'in q tane köke sahiptir, $(q+1)$. kök $(0,1)$aralığındadır ve bu aralıkta bir kök varlığından bahsedilebilmesi için $P_{q+1}(k,0) > 0$ ve $P_{q+1}(k,1) < 0$ olmalıdır.

Şekil 6: $\alpha_{q+1,k,i}$ 'lerin konumu



: *Kaynak* : Çalışma yazar tarafından oluşturulmuştur.

Şekildende görüldüğü üzere $P_{q+1}(k,x)$'in $(-\infty, 0)$ üzerinde q kökü vardır, $(0,1)$ aralığı üzerinde bir tane kökü vardır.$P_{q+1}(k,x)$'ten $P_{q+2}(k,x)$'e geçerken benzer şekilde ;

$$\begin{aligned} P_{q+2}(k,x) &= \left[N + (k-q-1)D'\right]_{x=0} P_{q+1}(k,x) + D.P'_{q+1}(k,x) \\ P_{q+2}(k,x) &= \left[N + (k-q-1)D'\right]_{x=1} P_{q+1}(k,x) + D.P'_{q+1}(k,x) \end{aligned}$$

$x = \alpha_{q+1,k,1}$ için $\alpha_{q+1,k,1} < 0$ ve $D\left(\alpha_{q+1,k,1}\right) < 0$ Şekil 11'den görüleceği üzere $P'_{q+1}(k, \alpha_{q+1,k,1}) > 0$

$$\begin{aligned} P_{q+2}(k, \alpha_{q+1,k,1}) &= \left[N + (k-q-1)D'\right]_{x=0} P_{q+1}(k, \alpha_{q+1,k,1}) \\ &\quad + D.P'_{q+1}(k, \alpha_{q+1,k,1}) \\ &= \left[N + (k-q-1)D'\right]_{x=0} .0 + (<0).(>0) \\ &= (<0) \end{aligned}$$

$\theta > 0, x < \alpha_{q+1,k,1}$ için $P_{q+1}(k,x) < 0'dır.$

$$\begin{aligned} P^{'}_{q+2}(k,x) &= (q+2)\theta P_{q+1}(k,x) \\ &= (>0).(>0).(<0) \\ &= (<0) \end{aligned}$$

$x < \alpha_{q+1,k,1}$ için $P^{'}_{q+2}(k,x) < 0$'dır.

Şekil 7: $\alpha_{q+2,k,i}$ lerin $\alpha_{q+1,k,i}$ lere göre konumu

: *Kaynak* : Çalışma yazar tarafından oluşturulmuştur.

$x < \alpha_{q+1,k,1}$ için $P_{q+1}(k,x) < 0$; $x < \alpha_{q+1,k,1}$ için $P^{'}_{q+2}(k,x) < 0, x = \alpha_{q+1,k,1}$ için $\alpha_{q+1,k,1} < 0 \Rightarrow D < 0$

$$\begin{aligned} P^{'}_{q+2}(k,\alpha_{q+1,k,1}) &= (q+2)\theta P_{q+1}(k,\alpha_{q+1,k,1}) \\ &= (q+2).\theta.0 \\ &= (0) \end{aligned}$$

Bu bilgiler altında şekil 7 'den de görüleceği üzere $\alpha_{q+2,k,1}, (-\infty, \alpha_{q+1,k,1})$ içine düşen aralıkta yer alır. $x = \alpha_{q+1,k,2}$ için ,$\alpha_{q+1,k,2} < 0$,$D\left(\alpha_{q+1,k,2}\right) < 0$;

$$\begin{aligned} P_{q+2}(k,\alpha_{q+1,k,2}) &= \left[N + (k-q-1)D^{'}\right] P_{q+1}(k,\alpha_{q+1,k,2}) + D.P^{'}_{q+1}(k,\alpha_{q+1,k,2}) \\ &= \left[N + (k-q-1)D^{'}\right].0 + D.P^{'}_{q+1}(k,\alpha_{q+1,k,2}) \end{aligned}$$

Şekilden de görüleceği üzere $P^{'}_{q+1}(k,\alpha_{q+1,k,2}) < 0$

$$\begin{aligned} P_{q+2}(k, \alpha_{q+1,k,2}) &= 0 + (<0)(<0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

$x = \alpha_{q+1,k,2}$ için $\theta > 0$;

$$\begin{aligned} P'_{q+2}(k, \alpha_{q+1,k,2}) &= (q+2)\theta P_{q+1}(k, \alpha_{q+1,k,2}) \\ &= (q+2)(>0).0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$x < \alpha_{q+1,k,2}$ için

$$P'_{q+2}(k, x) = (q+2)\theta P_{q+1}(k, x)$$

Şekilden de görüleceği üzere (1) nolu kısım $x < \alpha_{q+1,k,2}$ için $P_{q+1}(k, x) > 0$'dır ve $\theta > 0$;

$$\begin{aligned} P'_{q+2}(k, x) &= (q+2)\theta P_{q+1}(k, x) \\ &= (>0).(>0).(>0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

Bu bilgiler altında $\alpha_{q+2,k,2}$'nin varlığından söz edili**r.** Şekil 7 'de açıkça görülmektedir.

$x = \alpha_{q+1,k,3}$ için $\alpha_{q+1,k,3} < 0, D(\alpha_{q+1,k,3}) < 0$

$$\begin{aligned} P_{q+2}(k, \alpha_{q+1,k,3}) &= 0 + D.P'_{q+1}(k, \alpha_{q+1,k,3}) \\ &= D.P'_{q+1}(k, \alpha_{q+1,k,3}) \end{aligned}$$

Şekil 7'den görüleceği üzere $P_{q+1}^{'}(k, \alpha_{q+1,k,3}) > 0$

$$\begin{aligned} P_{q+2}(k, \alpha_{q+1,k,3}) &= (<0).(>0) \\ &= (<0) \end{aligned}$$

Bu şekilde işlem devam ettirilmesi ile; $P_{q+2}(k, \alpha_{q+1,k,q-1}) = 0 + D.P_{q+1}^{'}(k, \alpha_{q+1,k,q-1})$ şekil 7'den görüleceği üzere ; $P_{q+1}^{'}(k, \alpha_{q+1,k,q-1})$ ve bu bilgi altında

$$\begin{aligned} P_{q+2}(k, \alpha_{q+1,k,q-1}) &= 0 + D.P_{q+1}^{'}(k, \alpha_{q+1,k,q-1}) \\ &= (<0).(<0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

önem teşkil eden nokta $x = \alpha_{q+1,k,q}$'dir. $x = \alpha_{q+1,k,q}$ için incelemeler şu şekildedir; $\alpha_{q+1,k,q} < 0, D < 0$

$$\begin{aligned} P_{q+2}(k, \alpha_{q+1,k,q}) &= \left[N + (k-q-1)D^{'}\right] P_{q+1}(k, \alpha_{q+1,k,q}) \\ &\quad + D.P_{q+1}^{'}(k, \alpha_{q+1,k,q}) \\ &= \left[N + (k-q-1)D^{'}\right].0 + (<0).P_{q+1}^{'}(k, \alpha_{q+1,k,q}) \end{aligned}$$

Şekil 7 'den görüleceği üzere $P_{q+1}^{'}(k, \alpha_{q+1,k,q}) > 0$'dır ve

$$\begin{aligned} P_{q+2}(k, \alpha_{q+1,k,q}) &= (<0).(>0) \\ &= (<0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{q+2}^{'}(k,\alpha_{q+1,k,q}) &= (q+2)\theta P_{q+1}(k,\alpha_{q+1,k,q}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$x = \alpha_{q+1,k,q+1}$ için $\alpha_{q+1,k,q+1} \subset (0,1)$, $\alpha_{q+1,k,q+1} > 0$ olması sebebiyle $D\left(\alpha_{q+1,k,q+1}\right) > 0$ 'dır ve $x > \alpha_{q,k,q}$ için $P_{q+1}^{'}(k,x) < 0$ bilgisi altında $x = \alpha_{q+1,k,q+1}$ için $\alpha_{q+1,k,q+1} > \alpha_{q,k,q}$; $P_{q+1}^{'}(k,\alpha_{q+1,k,q+1}) < 0'$dır ve

$$\begin{aligned} P_{q+2}(k,\alpha_{q+1,k,q+1}) &= \left[N + (k-q-1)D^{'}\right] P_{q+1}(k,\alpha_{q+1,k,q+1}) \\ &\quad + D.P_{q+1}^{'}(k,\alpha_{q+1,k,q+1}) \\ &= \left[N + (k-q-1)D^{'}\right].0 + (>0).(<0) \\ &= (<0) \end{aligned}$$

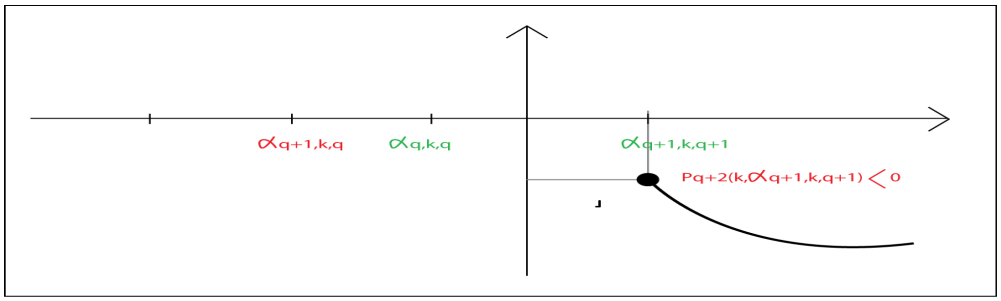
elde ediilir.

$x > \alpha_{q+1,k,q+1}$ için $P_{q+2}^{'}(k,x)$ şu şekilde elde edilir. $\theta > 0$, $x > \alpha_{q+1,k,q+1}$

$$\begin{aligned} P_{q+2}^{'}(k,x) &= (q+2)\theta P_{q+1}(k,x) \\ &= (>0).(>0).(<0) \\ &= (<0) \end{aligned}$$

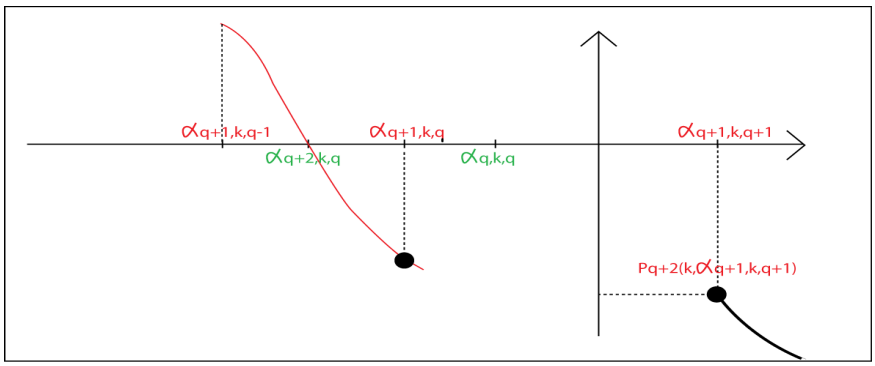
$x > \alpha_{q+1,k,q+1}$ için $P_{q+2}^{'}(k,x) < 0$ 'dır.

Şekil 8 : $P_{q+2,k,q+1}$'nin $\alpha_{q+1,k,q+1}$deki konumu



: *Kaynak* : Çalışma yazar tarafından oluşturulmuştur.

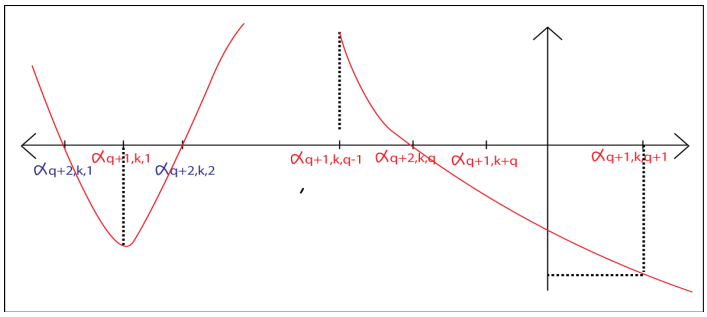
Şekil-9 : $\alpha_{q+2,k,q}$ nun konumu



: *Kaynak* : Çalışma yazar tarafından oluşturulmuştur.

$P_{q+2}(k, \alpha_{q+1,k,q-1}) > 0$ ve $P_{q+2}(k, \alpha_{q+1,k,q}) < 0$ olması burada $\alpha_{q+2,k,i}$'nin bir kökünün varlığını ortaya koyar. Dolayısı ile $\alpha_{q+2,k,i}$ kökleri $\alpha_{q+1,k,q}$ ile $\alpha_{q+1,k,1}$ arasında $q-1$ köke sahiptir ve $(-\infty, \alpha_{q+1,k,1})$ içinde $\alpha_{q+2,k,1}$'i bulundurmak üzere $P_{q+2}(k, x)$ toplam q köke sahiptir. Bu metod devam edildiğinde k_1 çift ise $(0, 1)$ aralığında bir kök ve $(-\infty, 0)$ içinde q farklı köke sahip olacaktır. $P_{q+k_1+1} \equiv J_{k_1+q+1}$ .Bir başka ifadeyle kök sayısı polinomun derecesine bağlı değil, k_1 'e bağlı olan $k_1$çift ise $q+1$,tek ise q köke sahiptir(Beale, 1937:212)..

Şekil-10 : $\alpha_{q+2,k,i}$ lerin $\alpha_{q+1,k,i}$lere göre konumu



: *Kaynak* : Çalışma yazar tarafından oluşturulmuştur.

3.2.PEARSON DİFERANSİYEL DENKLEMİ SAĞLAYAN $\mathbf{P}_n(\mathbf{k},\mathbf{x})'$LERİN BÜKÜM NOKTALARININ SAYISI VE POLİNOMUN DERECESİYLE OLAN İLİŞKİSİNİN KURULMASI

Teorem 3.1: $y = f(x)$, $der(G(x)) \geq 1$ olmak üzere; $\frac{df(X)}{dX} = \frac{f(X).X}{G(X)}$; $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksıyonunun büküm noktalarının sayısı $G(X)$'in derecesini geçemez (Dündar, 2012 : 23).

İspat:

$$\begin{aligned}
\frac{df(X)}{dX} &= \frac{f(X).X}{G(X)} \\
\frac{d^2f(X)}{dX^2} &= \frac{\left[f(X) + X.\frac{df(X)}{dX}\right]G(X) - G'(X).f(X).X}{[G(X)]^2} \\
\frac{d^2f(X)}{dX^2} &= \frac{\left[f(X) + X.\frac{f(X)X}{G(X)}\right]G(X) - G'(X).f(X).X}{[G(X)]^2} \\
&= \frac{f(X)}{[G(X)]^2}.\left(X^2 - X.G'(X) + G(X)\right)
\end{aligned}$$

$\frac{d^2f(X)}{dX^2} = 0$; f(X)$\frac{}{[G(X)]^2}.\left(X^2 - X.G'(X) + G(X)\right) = 0$, $\left(X^2 - X.G'(X) + G(X)\right) = 0$, $G(X)$'in doğrusal ya da sabit olduğu durumlar hariç yukarıdaki denklemin derecesi $G(X)'$in derecesi ile aynıdır.

Pearson diferansıyel denklemini sağlayan $P_n(k,x)$ için q. türev formülü;

$$P_{n+1}^{(q)}(k,x) = \prod_{i=0}^{q-1}(n+1-i)\left(N' + \frac{2k-n+i}{2}D''\right)P_{n-q+1}(k,x) \quad q = 1,.,(n+1) \tag{2.28}$$

$q = 1$ için

$$P_{n+1}^{(1)}(k,x) = \prod_{i=0}^{0}(n+1-0)\left(N' + \frac{2k-n}{2}D''\right)P_n(k,x) \;..\; q = 1,2,,,,(n+1)$$

$k = n$ ve Jacobi polinomu $N' = (-\beta - \alpha)$ ve $D'' = -2$ için;

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{'}(n,x) &= (n+1).\left[(-\beta-\alpha)+\frac{n}{2}(-2)\right]P_n(n,x) \\ &= (n+1).\left[-\beta-\alpha-n\right]P_n(n,x) \end{aligned}$$

elde edilir ve bu ifadenin tekrar türevinin alınması ile;

$$P_{n+1}^{''}(n,x) = (n+1).\left[-\beta-\alpha-n\right].P_n^{'}(n,x)$$

$P_n^{'}(n,x)$ için ifadeyi (2.28) Denkleminde n yerine $n-1$ ve $k=n$ için $q=1$ ve $i=0$ için

$$\begin{aligned} P_n^{'}(n,x) &= \prod_{i=0}^{1-1}(n-1+1-0).\left[N^{'}+\frac{2n-(n-1)}{2}D^{''}\right]P_{n-1-1+1}(n,x) \\ &= n.\left[N^{'}+\frac{n+1}{2}D^{''}\right]P_{n-1}(n,x) \\ &= n.\left[(-\beta-\alpha)+\frac{n+1}{2}(-2)\right]P_{n-1}(n,x) \\ &= n.\left[-\beta-\alpha-n-1\right]P_{n-1}(n,x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade $P_{n+1}^{''}(n,x) = (n+1).\left[-\beta-\alpha-n\right]P_n^{'}(n,x)$'de ifade edilmesi ile;

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{''}(n,x) &= (n+1).\left[-\beta-\alpha-n\right]P_n^{'}(n,x) \\ &= (n+1)\left[\beta+\alpha+n\right].n.\left[\beta+\alpha+n+1\right].P_{n-1}(n,x) \end{aligned}$$

elde edilir. $(n+1)$.dereceden polinomun büküm noktaları $(n-1)$. Dereceden polinomun kökleriyle ilişkilidir. $P_n(n\pm q,x) \equiv J_n(x,\alpha\pm q+1,\beta\pm q+1)$ (Beale,1937 : 220).

$$
\begin{aligned}
P_n(k,x) &\equiv J_n(x,\alpha,\beta) \\
P_n(n\pm q,x) &\equiv J_n(x,\alpha\pm q+1,\beta\pm q+1) \\
P_{n+1}^{''}(n,x) &= (n+1)\left[\beta+\alpha+n\right].n.\left[\beta+\alpha+n+1\right].P_{n-1}(n,x)
\end{aligned}
$$

ifadesinin Jacobi polinomu için gösterimi şu şekildedir;

$q=2$,iki kez türev alınması sebebiyle ;

$$
\begin{aligned}
P_n(n\pm q,x) &\equiv J_n(x,\alpha\pm q+1,\beta\pm q+1) \\
P_{n-1}(n\pm q,x) &\equiv J_{n-1}(x,\alpha\pm 1+1,\beta\pm 1+1) \\
P_{n+1}^{''}(n,x) &= (n+1)\left[\beta+\alpha+n\right].n.\left[\beta+\alpha+n+1\right].P_{n-1}(n,x) \\
J_{n+1}^{''}(x,\alpha,\beta) &= (n+1)\left[\beta+\alpha+n\right].n.\left[\beta+\alpha+n+1\right].J_{n-1}(x,\alpha+2,\beta+2)
\end{aligned}
$$

$J_{n+1}^{''}(x,\alpha,\beta)=0$ için $(n+1)\left[\beta+\alpha+n\right].n.\left[\beta+\alpha+n+1\right].\ J_{n-1}(x,\alpha+2,\beta+2)=0$ için $\left[\beta+\alpha+n\right]\left[\beta+\alpha+n+1\right]\neq 0$ olması şartıyla $J_{n+1}(x,\alpha,\beta)$'nın büküm noktaları , $J_{n-1}(x,\alpha,\beta)$'in tek dereceli köklerindedir, Jacobi polinomlarının reel köklerinin sayısı $n.$ dereceden bir polinomun dercesi olan n'ye eşit olmadığı yani reel olmayan köklere de sahip olduğu durumlar vardır ve bu durumlar α ve β'nın varlığından etkılenmektedir (Beale,1937 : 220).Dolayısıyla polinomun derecesini bulabilmek için (2.28) bağıntısının kullanılması ile $J_{n+1}(x,\alpha,\beta)=P_{n+1}(n,x)$ olması sebebiyle (2.28) bağıntısında $n=k$ için ve Jacobi polinomları için bulunan bu bağıntı için gerekli değerler olan $N^{'}=-\beta-\alpha, D^{''}=(-2)$ $q=1,2,,,(n+1)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
P_{n+1}^{(q)}(k,x) &= \prod_{i=0}^{q-1}(n+1-i)\left(N^{'}+\frac{2k-n+i}{2}D^{''}\right)P_{n-q+1}(k,x)\\
P_{n+1}^{(q)}(n,x) &= \prod_{i=0}^{q-1}(n+1-i)\left(N^{'}+\frac{2n-n+i}{2}D^{''}\right)P_{n-q+1}(n,x)\\
J_{n+1}^{(q)}(x,\alpha,\beta) &= \prod_{i=0}^{q-1}(n+1-i)\left(N^{'}+\frac{2n-n+i}{2}D^{''}\right)J_{n-q+1}(x,\alpha,\beta)\\
&= \prod_{i=0}^{q-1}(n+1-i)\left[-\beta-\alpha-n-i\right]J_{n-q+1}(x,\alpha,\beta)
\end{aligned}
$$

$$
J_{n-q+1}(x,\alpha,\beta)\equiv P_{n-q+1}(n,x)
$$

elde edilen $J_{n+1}^{(q)}(x,\alpha,\beta)=\prod_{i=0}^{q-1}(n+1-i)\left[-\beta-\alpha-n-i\right]J_{n-q+1}(x,\alpha,\beta)$ denkleminden α, β'nın durumuna bağlı olarak polinomun derecesiyle ilişkisinin durumu incelenmiştir:

$i)$ $\alpha+\beta$ tam sayı değil ise;

$J_{n+1}(x,\alpha,\beta)$'nın derecesi $n=0,1,2,....$ için $n+1$'dir.$q=0,1,2,.,(n+1)$, $J_{n+1}^{(q)}(x,\alpha,\beta)$'nun sıfıra eşit olması için ;

$$
\begin{aligned}
J_{n+1}^{(q)}(x,\alpha,\beta) &= \prod_{i=0}^{q-1}(n+1-i)\left[-\beta-\alpha-n-i\right]J_{n-q+1}(x,\alpha,\beta)\\
J_{n-q+1}(x,\alpha,\beta) &\equiv P_{n-q+1}(n,x)\\
J_{n+1}^{(q)}(x,\alpha,\beta) &= \prod_{i=0}^{q-1}(n+1-i)\left[-\beta-\alpha-n-i\right]P_{n-q+1}(n,x)
\end{aligned}
$$

ifadesinde ya $[-\beta-\alpha-n-i]$ ya da $P_{n-q+1}(n,x)$ sıfıra eşit olmalıdır. İlk olarak $P_{n-q+1}(n,x)$'in sıfıra eşit olup olmadığı durumunun incelenmesi aşağıdaki gibidir;

$\alpha+\beta$ tam sayı olmamak üzere;

$$
\begin{aligned}
P_1(n,x) &\equiv N+nD^{'}\\
P_1(n,x) &= (-\beta-\alpha-2n)x+\alpha+n\\
(--\beta-\alpha-2n)x+\alpha+n &\neq 0
\end{aligned}
$$

olması sebebiyle Bölüm-2 Teorem 2.8'nın bilgisi altında $P_\mu(n,x) \equiv 0, \mu > 0, \mu \leq n+1$ bu ifadede $(\mu = \nu)$'nin μ'nün bir ilk değeri vardır, bu durum için $P_\nu(n,x) = 0$ fakat $P_{\nu-1}(n,x) \neq 0$ durumunun açıklanması , Teorem 2.8'de Pearson Diferansiyel denkleminin paydası olan D tam kare değil ve $P_{n+1} = 0, P_n \neq 0$ ise bu durum ya $m \leq n$ için $\left[N + (k-m)D'\right] \equiv 0$ ya da $m(m_1,m_2)$ olacak şekilde m'nin iki değeri vardır öyle ki $\left[N + (k-m_1)D'\right] \equiv 0, \left[N + (k-m_2)D'\right] \equiv 0, \alpha_1 x + \beta_1$ ve $\alpha_2 x + \beta_2; (m_1,m_2 \leq n)$'yi çarpım olarak içerir şöyle ki; $P_{n+1} \equiv 0$ ise $m \leq n$ için

$$\begin{aligned} P_{n+1}(k,x) &= \left[N + (k-n)D'\right] P_n(k,x) + D.P_n'(k,x) \\ 0 &= \left[N + (k-n)D'\right] P_n(k,x) + D.P_n'(k,x) \end{aligned}$$

$P_n(k,x)$ sabit ise $P_n'(k,x) = 0$'dır, dolayısıyla

$$\begin{aligned} 0 &= \left[N + (k-n)D'\right] P_n(k,x) + D.P_n'(k,x) \\ 0 &= \left[N + (k-n)D'\right] P_n(k,x) + D.0 \end{aligned}$$

$$\left[N + (k-n)D'\right] P_n(k,x) = 0$$

$P_n(k,x)$ sabit değil ise

$$0 = \left[N + (k-n)D'\right] P_n(k,x) + D.P_n'(k,x)$$

$$P_n'(k,x) = \frac{\left[N + (k-n)D'\right] P_n(k,x)}{D}$$

bunun sonucu olarak teoremin uygulanması ile; $p \leq \nu$ için

$$P_{\nu+1}(n,x) = \left[N + (n-\nu)D'\right] P_\nu(n,x) + D.P_\nu'(n,x)$$

$P_{\nu+1}(n,x) = 0$,$P_\nu(n,x) \neq 0$ durumunda;$P_\nu(n,x)$ sabit olması ve $P_\nu(n,x) \neq$

sabit durumunu teorem 6 'dan hareketle incelenir.

$$P_{\nu+1}(n,x) = \left[N + (n-\nu)D^{'}\right] P_{\nu}(n,x) + D.P_{\nu}^{'}(n,x)$$

denklemini

$P_{\nu}(n,x)$ sabit olması durumunda $P_{\nu}^{'}(n,x) = 0$'dır ve

$$\begin{aligned} P_{\nu+1}(n,x) &= \left[N + (n-\nu)D^{'}\right] P_{\nu}(n,x) + D.0 \\ 0 &= \left[N + (n-\nu)D^{'}\right] P_{\nu}(n,x) \end{aligned}$$

$P_{\nu}(n,x)$; sabit $p \leq \nu$ için $\left[N + (n-p)D^{'}\right] \equiv 0$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla Jacobi Polinomunun da $N = (-\beta - \alpha)\, x + \alpha, D(x) = x.(1-x), D^{'}(x) = 1 - 2x$ değerlerini

$$\left[N + (n-p)D^{'}\right] = (-\beta - \alpha)\, x + \alpha + (n-p)(1-2x)$$

$(-\beta - \alpha - 2(n-p))\, x + \alpha + n - p = 0$ olmasını gerektirir.

$$\begin{aligned} P_{\nu+1}(n,x) &= \left[N + (n-\nu)D^{'}\right] P_{\nu}(n,x) + D.P_{\nu}^{'}(n,x) \\ 0 &= \left[N + (n-\nu)D^{'}\right] P_{\nu}(n,x) + D.P_{\nu}^{'}(n,x) \\ P_{\nu}^{'}(n,x) &= -\frac{\left[N + (n-\nu)D^{'}\right] P_{\nu}(n,x)}{D} \end{aligned}$$

$p \leq \nu$

$$P_{\nu}^{'}(n,x) = -\frac{\left[N + (n-p)D^{'}\right] P_{\nu}(n,x)}{D}$$

Jacobi polinomunda $D = x.(1-x)$ olduğuna göre $\alpha_1 x + \beta_1 = x, \alpha_2 x +$

$\beta_2 = 1 - x$ olmalıdır. $\left[N + (n-p)D'\right] = (-\beta - \alpha - 2(n-p))\, x + \alpha + n - p$ ifadesinde $\alpha + \beta$ tamsayı olmaması sebebiyle $(-\beta - \alpha - 2(n-p)) \neq 0$'dır, çünkü $x = \frac{p-n-\alpha}{(-\beta-\alpha-2(n-p))}$ dolayısı ile $N+(n-p)D' \neq 0$'dır bu yüzden öyle $p(p_1,p_2)$ olmalı ki teorem 2.8'e göre hareketle;$\left[N + (n-p_1)D'\right] = (-\beta - \alpha - 2(n-p_1))\, x + \alpha + n - p_1$; x'in bir çarpanı olabilmesi için $\alpha + n - p_1$ olmalı dolayısı ile $\alpha = p_1 - n$ olmasını gerektirir. p_1 ve n , tam sayı olduğuna göre α'nında tam sayı olmasını gerektirir,$\left[N + (n-p_2)D'\right] = (-\beta - \alpha - 2(n-p_2))\, x + \alpha + n - p_2$ için $(1-x)$'i çarpan olarak içerir ifadesini kullanabilmesi için $\alpha+n-p_2$ parantezine alınması ile; $\left[N + (n-p_2)D'\right] = \alpha + n - p_2 \left[1 - \frac{(\alpha+n-p_2)+(\beta+n-p_2)}{\alpha+n-p_2}\right]$ ifadedende görüldüğü gibi $(1-x)$'i çarpan olarak içerebilmesi için $(\beta + n - p_2) = 0$ olmalıdır, $(\beta + n - p_2) = 0$ olması ; n ve p_2 tamsayı olduğuna göre β'nında tamsayı olmasını gerektirir , α ve β hipotezinin aksine $\alpha + \beta$ tamsayıdır. Bu yüzden ;

$$\begin{aligned} J_{n+1}^{(q)}(x,\alpha,\beta) &= \prod_{i=0}^{q-1} (n+1-i)\,(-\beta-\alpha-n-i)\, P_{n-q+1}(k,x) \\ n &= 0,1,2,. \\ q &= 0,1,2,..,(n+1) \end{aligned}$$

Bu denklem içinde $P_{n-q+1}(k,x) = 0$ değildir dolayısıyla bu denklemde $n+1$ ile q yerdeğiştirilmesi ile;

$$\begin{aligned} J_{n+1}^{(n+1)}(x,\alpha,\beta) &= \prod_{i=0}^{n} (n+1-i)\,(-\beta-\alpha-n-i)\, P_0(n,x) \\ n &= 0,1,2,. \\ q &= 0,1,2,.....,(n+1) \\ J_{n+1}^{(n+1)}(x,\alpha,\beta) &\neq 0 \end{aligned}$$

ve J_{n+1}'in derecesi kesinlikle $(n+1)$'dir (Beale, 1937 : 221).

ii) $\alpha+\beta > 0$ ise $n = 0,1,2,\ldots\ldots..$ için J_{n+1}in derecesi ; $(n+1)$'dir(Beale, 1937 : 221).

$$
\begin{aligned}
J_{n+1}^{(n+1)}(x,\alpha,\beta) &= \prod_{i=0}^{n}(n+1-i)\,(-\beta-\alpha-n-i)\,P_0(n,x) \\
&= (n+1)\,n.(n-1)...(n+1-n).\,(-\beta-\alpha-n)\,(-\beta-\alpha-n-1)\,. \\
&\quad .\,(-\beta-\alpha-2n)\,P_0(n,x) \\
&= (n+1)!(-1)^{n+1}.\,(\beta+\alpha+n)\,(\beta+\alpha+n+1)\,.. \\
&\quad ..\,(\beta+\alpha+2n)\,P_0(n,x)
\end{aligned}
$$

$n \geq 0$, $\beta+\alpha > 0$ olması sebebiyle $J_{n+1}^{(n+1)}(x,\alpha,\beta) \neq 0$'dır ve J_{n+1}'de $(-\beta-\alpha-n-i)$'nin hiçbir çarpanı yok olamaz, dolayısıyla J_{n+1}'in derecesi $(n+1)$'dir.

iii) $\beta+\alpha=0$ ise $n=1,2,3$ olması sebebiyle

$$
\begin{aligned}
J_{n+1}^{(n+1)}(x,\alpha,\beta) &= (n+1)!(-1)^{n}.\,(\beta+\alpha+n)\,.....\,(\beta+\alpha+2n)\,P_0(n,x) \\
&= (n+1)!(-1)^{n}.n.(n+1)...(2n).1
\end{aligned}
$$

$J_{n+1}^{(n+1)}(x,\alpha,\beta) \neq 0$'dır ve

$$
\begin{aligned}
J_1(x,\alpha,\beta) &= x^{1-\alpha}.(1-x)^{1-\beta}.\frac{d(x^{\alpha}.(1-x)^{\beta})}{dx} \\
&= x^{1-\alpha}.(1-x)^{1-\beta}.\left(\alpha.x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta}-x^{\alpha}.\beta.(1-x)^{\beta-1}\right) \\
&= \alpha(1-x)-x\beta \\
&= \alpha-x(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

$(\alpha+\beta)=0$, $J_1(x,\alpha,\beta)=\alpha$, dolayısıyla $n=0$ için sağlamaz, $n=1,2,..$ ile başlaması ve $(\alpha+\beta)=0$ olması sebebiyle $J_1(x,\alpha,\beta)=\alpha$'dır .$n=1,2,3,...,J_1(x,\alpha,\beta)=\alpha$ sabit olması sebebiyle $n+1=2$' den başlayarak uygulanır ve $(\alpha+\beta)=0$ için $n=1,2,....$olmak üzere $J_{n+1}^{(n+1)}(x,\alpha,\beta)$; $(n+1)$. derecedendir(Beale, 1937 : 221).

$P_n(k,x)$'ler için büküm noktalarının sayısını ve derecelerinin nasıl elde

edildiği konusunda genel bilgi verildi ve Jacobi polinomları için ayrıntılı bir şekilde incelendi, Jacobi polinomu α ve β parametreleri sahip olması sebebiyle bu polinom üzerinde incelenmeye çalışıldı tek parametreye sahip olan $P_n(k,x)$'lere örnek olan Laguerre polinomları için ve $k=0$ için genel olarak Pearson diferansiyel denklemini sağlayan $P_n(0,x) \equiv P_n(x)$'leri sağlayan polinomlar olan Hermitte polinomları için büküm noktaları ve dereceleriyle ilgili incelemeler aşağıdaki gibidir.

Laguerre polinomu ; $L_n(x,\alpha,\beta) = x^{1-\alpha}.e^x.\frac{d^n\left[e^{-x}.x^{n+\alpha-1}\right]}{dx^n}$, $n=0,1,2,.....$, α, gerçel bir sayıdır(Beale,1937 : 221).Ağırlık fonksiyonu Laguerre polinomunun bu gösterimi için $\rho(x) = e^{-x}.x^{\alpha-1}$'dir ve $n.$ dereceden ağırlık fonksıyonu ise $\phi^{(n)}(x) = e^{-x}.x^{\alpha+n-1}$ 'dir. Laguerre polinomunun ağırlık fonksiyonu olan teorik olasılık yoğunluk fonksiyonun türeteni EK 3'de bahsedilmiş olan gama fonksiyonudur. Laguerre Polinomu ;

$$\begin{aligned} P_n(k,x) &= \frac{1}{D^k y}.D^n.\frac{d^n D^k y}{dx^n} \\ P_n(n,x) &= \frac{1}{D^n y}.D^n.\frac{d^n D^n y}{dx^n} \end{aligned}$$

$D^n y = x^n.x^{\alpha-1}.e^{-x}, D = x, D' = 1; P_1(k,x) = N + kD', N + kD' \equiv N, k = 1,$

$$\begin{aligned} P_1(1,x) &= x^{1-\alpha}.e^x.\frac{d(e^{-x}.x^\alpha)}{dx} \\ &= x^{1-\alpha}.e^x.(\alpha.x^{\alpha-1}.e^{-x} - e^{-x}.x^\alpha) \\ &= \alpha - x \end{aligned}$$

$N = (-x+\alpha), D = x, n = k+1'$dir(Beale,1937 : 221)

Laguerre polinomlarının gerçel köklerinin yeri bu bilgiler altında önceden bahsedilen θ ve paya bağlı olarak Laguerre polinomunda payda $D(x) = x$ olması sebebiyle paydanın kritik noktası $x = 0$ değeridir bu sebeple köklerin konumunu $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralığında incelenir ve ardışık dereceli polinomların kökleriyle hakkında bilgi için önceden bahsedilen (2.23) ve (2.24) ile ifade edilmiş rekürans;

ilişkilerinden faydanılarak gerçel köklerin yeri hakkında bilgi edinilir(Beals,1937 : 221).

Laguerre polinomunda tek kritik nokta $x = 0$ noktası olduğu için buna bağlı olarak sadece $\mu = N + (k-n)D'$ ve $\theta = N' + \frac{(2k-n)}{2}D''$ elde edilen ve $N = (-x + \alpha)$ ve $D = x$,$N' = -1, D' = 1, D'' = 0$ olduğu için

$$\begin{aligned}
\mu &= \left[N + (k-n)D'\right]_{x=0} \\
&= \alpha + k - n \\
\theta &= N' + \frac{(2k-n)}{2}D'' \\
&= -1 \\
P_1(k,x) &= N + kD' \\
&= -x + \alpha + k \\
P_1'(k,x) &= -1
\end{aligned}$$

Laguerre polinomunda $\mu = 1, 2, ..., (n+1)$ için $P_\mu(n,x) \neq 0$ olmak üzere;

$$P_{n+1}'(k,x) = (n+1).\left[N' + \frac{(2k-n)}{2}D''\right]P_n(k,x)$$

$N' = -1, D' = 1, D'' = 0, n+1 = \mu, k = n$ için ;

$$\begin{aligned}
P_\mu'(n,x) &= \mu.\left[-1 + \frac{2n-(\mu-1)}{2}.0\right]P_{\mu-1}(n,x) \\
&= -\mu.P_{\mu-1}(n,x)
\end{aligned}$$

elde edilir.Eğer $P_\mu(n,x) = 0$ ise $P_\mu'(n,x)$'den diğer bir ifadeyle $P_{\mu-1}(n,x)$'te $P_{\mu-1}(n,x) \equiv P_\mu'(n,x) \equiv 0$'dır. Bu sonuçların devam ettirilmesi ile ; $P_1(n,x) \equiv 0$ elde edilir.

$P_{n+1}^{(q)}(k,x) = \prod_{i=0}^{q-1}(n+1-i).\left[N' + \frac{2k-n+i}{2}D''\right]P_{n-q+1}(k,x)$ ifadesinde $q = n+1$ ve Laguerre polinomu için $N' = -1$,$D' = 1, D'' = 0, D = x$ değerlerini yerinde ifade edildiğinde ;

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(n+1)}(k,x) &= \prod_{i=0}^{n}(n+1-i)\left[(-1)+\frac{2k-n+i}{2}.0\right]P_{n-n-1+1}(k,x) \\ &= \prod_{i=0}^{n}-(n+1-i).P_0(k,x) \end{aligned}$$

elde edilir.$k = n, P_0(n,x) = 1$ olması sebebiyle $L_{n+1}^{(n+1)}(x,\alpha) = (-1)^{n+1}.(n+1)!$'dir ve $(n+1)$. dereceden bir polinomun $(n+1)$. türevi sıfırıncı dereceden bir polinom yani bir sabit verdiği görülmesi sebebiyle L_{n+1},$(n+1)$. dereceden bir polinomdur(Beale,1937 : 222).

Laguerre polinomlarının büküm noktalarının sayısı ; (2.28) denklemi ile $q = 2$ için

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(2)}(k,x) &= \prod_{i=0}^{1}(n+1-i).\left[N^{'}+\frac{2n-n+i}{2}D^{''}\right]P_{n-q+1}(k,x) \\ P_{n+1}^{(2)}(n,x) &= (n+1).n.(-1).P_{n-1}(n,x) \\ P_n(n\pm q,x) &= L_n(x,\alpha\pm q+1) \\ P_n(n\pm q,x) &= L_n(x,\alpha\pm 2) \end{aligned}$$

$L_{n+1}^{''}(x,\alpha) = (n+1).n.(-1)L_{n-1}(x,\alpha+2)$ elde edilmesi ile bu bilgiden anlaşılacağı üzere $(n+1)$. dereceden Laguerre polinomunun gerçel köklerin sayısı $(n-1)$. Dereceden polinom olan Laguerre polinomunun gerçel köklerinin sayısına bağlıdır(Beale,1937 : 222).

$P_n(k,x)$ ile Pearson diferansıyel denklemini sağlayan özel polinomların genel ifadesi gösterildi.

$k = 0$ için ; $P_n(0,x) \equiv P_n(x)$

$$\begin{aligned} P_{n+1}(k,x) &= \left[N+(k-n)\,D^{'}\right]P_n(k,x)+D.P_n^{'}(k,x) \\ &= \left[N-nD^{'}\right]P_n(k,x)+D.P_n^{'}(x) \end{aligned}$$

$$P'_{n+1}(k,x) = (n+1).\left[N' + \frac{(2k-n)}{2}D''\right]P_n(k,x)$$
$$P'_{n+1}(0,x) = (n+1).\left[N' - \frac{n}{2}D''\right]P_n(0,x)$$

$$P_{n+1}(k,x) = \left[N + (k-n)D'\right]P_n(k,x) + n.D.\left[N' + \frac{2k-n+1}{2}D''\right]P_{n-1}(k,x)$$
$$P_{n+1}(0,x) = \left[N - nD'\right]P_n(0,x) + n.D.\left[N' - \frac{n-1}{2}D''\right]P_{n-1}(0,x)$$

rekürans bağıntılarının tümü $P_n(x)$'ler içinde sağlanır(Beale, 1937 : 222). $P_n(x)$ in köklerine ilişkin bilgileri veren bazı teoremler aşağıda incelenmeye çalışılmıştır.

Teorem 3.2:Tüm $x$ler için N lineer ve $D(x) > 0$ olsun ve $N' - \frac{m}{2}D'' < 0$, $m = 1, 2, 3, ...$olduğunu varsayalım.P_n ; P_{n+1}'in köklerinden ayıran n farklı gerçel köke sahiptir(Beale ,1937 : 222).

İspat:$i = 1, 2, \ldots, n$ için P_n'in kökleri $\alpha_{n,i}$ ile gösterilmek üzere ; $\alpha_{n,i} < \alpha_{n,i+1}$ ($\alpha_{2,1} < \alpha_{2,2}$) gibi. Farzedelim ki $N' > 0$ olsun bu ifade eder ki x'in katsayısı pozitiftir. Lineer olan N, $\alpha_{1,1}$ tek köküne sahiptir.

$P_1 \equiv N_1$ olması sebebiyle yani lineer olan N'yi ;$ax + b$ gibi düşünülmesi ile ve $N' > 0$ olmasıdır ; $N'_1 \equiv a > 0$;$P_1 \equiv N_1 \equiv ax + b$ dolayısıyla $P_1(x) = 0$ için $\alpha_{1,1} = -\frac{b}{a}$ olmak üzere $a > 0, N'_1 = a > 0$ ifadesi $x < \alpha_{1,1}$'ler için $P_1 < 0$'dır .$N'_1 = a$,olmak üzere , $x > \alpha_{1,1}$'ler için $P_1 < 0$yapar.

$P_1(\alpha_{11}) = 0$'dır. P_2 için; P_2 'nin köklerinin yerini $\alpha_{1,1}$ köküne göre konumunu veren işaret tespiti aşagıdaki gibi takip eder:

$$P_{n+1}(0,x) = \left[N - nD'\right]P_n(x) + D.P'_n(x)$$

ve teoremde $D > 0$ varsayımı altında ve $P'_1 = N' > 0$ hareketle $n = 1$ ve $x = \alpha_{1,1}$ için $P_{n+1}(0,x) = \left[N - nD'\right]P_n(x) + D.P'_n(x)$ ifadesinin yazılması ile;
$P_2(\alpha_{1,1}) = \left[N - D'\right]P_1(\alpha_{1,1}) + D.P'_1(\alpha_{1,1})$
$P_1(\alpha_{1,1}) = 0$ olması sebebiyle

$$\begin{aligned} P_2(\alpha_{1,1}) &= \left[N - D^{'}\right] P_1(\alpha_{1,1}) + D.P_1^{'}(\alpha_{1,1}) \\ &= D.P_1^{'}(\alpha_{1,1}) \\ &= (>0).(>0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

$P_2(\alpha_{1,1}) > 0$ ve

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{'}(0,x) &= (n+1).\left[N^{'} - \frac{n}{2}D^{''}\right] P_n(0,x) \\ P_2^{'}(x) &= 2.\left[N^{'} - \frac{D^{''}}{2}\right] P_1(x) \end{aligned}$$

elde edilir ve teorem de $N^{'} - \frac{m}{2}D^{''} = \theta, m = 1,2,3,...$ ve $\theta < 0$ değeridir ve $\theta < 0$ olduğu toremde verilmiştir.

$x < \alpha_{1,1}$'ler için ; $P_1 < 0; x > \alpha_{1,1}$'ler için $P_1 > 0$ ve $N^{'} - \frac{nD^{''}}{2} < 0$ olması sebebiyle;

$$P_2^{'}(x) = 2.\theta.P_1(x)$$

$x < \alpha_{1,1}$ için ;

$$\begin{aligned} P_2^{'}(x) &= 2.\theta.P_1(x) \\ &= 2.(<0).(<0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

$P_2^{'}(x) > 0, x > \alpha_{1,1}$ için $P_1 > 0$;

$$\begin{aligned} P_2^{'}(x) &= 2.\theta.P_1(x) \\ &= 2.(<0).(>0) \\ &= (<0) \end{aligned}$$

$P_2^{'}(x) < 0, x = \alpha_{1,1}$için ;

$$\begin{aligned} P_2^{'}(\alpha_{1,1}) &= 2.\theta.P_1(\alpha_{1,1}) \\ &= 2.(<0).0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$P_2^{'}(\alpha_{1,1}) = 0$ elde edilir.Bu yüzden $(-\infty, \alpha_{11})$ içinde P_2'nin bir kökü vardır (α_{11}, ∞) içinde de bir kökü vardır ve teorem $n = 1$ için sağladığı görülür. P_1 'in kökü ile P_2'nin kökleri ayrıldı. Varsayalım ki $n = h$ için doğru olsun.$P_h^{'}(\alpha_{h,i})$ sırasıyla pozitif ve negatif olmak üzere ;

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{'}(x) &= n.(N^{'} - \frac{n}{2}D^{''})P_n(x) \\ &= (>0).(<0).P_n(x) \\ &= (<0).P_n(x) \\ P_{h+1}(x) &= \left[N - hD^{'}\right] P_h(x) + D.P_h^{'}(x) \end{aligned}$$

$D(x) > 0$ ve $x = \alpha_{h,i}$ için$i = 1, 2, \ldots., h$ sırasıyla pozitif negatif ise ;

$$P_{h+1}(\alpha_{h,i}) = \left[N - hD^{'}\right] P_h(\alpha_{h,i}) + D.P_h^{'}(\alpha_{h,i})$$

$i = 1$

$$\begin{aligned} P_{h+1}(\alpha_{h,1}) &= \left[N - hD^{'}\right] P_h(\alpha_{h,1}) + D.P_h^{'}(\alpha_{h,1}) \\ &= \left[N - hD^{'}\right].0 + (>0).P_h^{'}(\alpha_{h,1}) \\ &= (>0).(>0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

$$P_{h+1}^{'}(x) = (h+1).(N^{'} - \frac{h}{2}D^{''}).P_h(x)$$

$x = \alpha_{h,1}$

$$\begin{aligned} P_{h+1}^{'}(\alpha_{h,1}) &= (>0).(<0).P_h(\alpha_{h,1}) \\ &= (>0).(<0).0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$P_{h+1}^{'}(\alpha_{h,1}) > 0$ varsayımı ile başlanan $P_h^{'}(\alpha_{h,1})$; $x < \alpha_{h,1}$ için $P_h < 0$'dır. Bu gerçek $P_{h+1}^{'}(x) = (h+1).(N^{'} - \frac{h}{2}D^{''}).P_h(x)$ ile birleştirildiğinde $x < \alpha_{h,1}$ için ise $P_h < 0$ ise;

$$\begin{aligned} P_{h+1}^{'}(x) &= (h+1).(N^{'} - \frac{h}{2}D^{''}).P_h(x) \\ &= (>0).(<0).(<0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

pozitif olan $P_{h+1}^{'}(\alpha_{h,1})$, $(-\infty, \alpha_{h,1})$içinde P_{h+1}'in bir tek kökü vardır. Benzer şekilde P_{h+1}'in kökleri $(\alpha_{h,h}, \infty)$ içinde kurulur. $P_h^{'}(\alpha_{h,2}) < 0$ olsun,$x > \alpha_{h,2}$ için $P_h > 0$ 'dır.

$$\begin{aligned} P_{h+1}^{'}(x) &= (h+1).(N^{'} - \frac{h}{2}D^{''}).P_h(x) \\ &= (>0).(<0).(>0) \\ &= (>0) \end{aligned}$$

Çünkü $P_{h+1}^{'}(x) = (h+1).(N^{'} - \frac{h}{2}D^{''}).P_h(x)$'den P_{h+1}'in en uç noktası $i = 1, 2, \ldots, h$ $\alpha_{h,i}$'dedir. P_{h+1} in sadece uç noktaları ; $i = 1, 2, \ldots\ldots, h$ 'dedir. $P_h^{'}(\alpha_{h,1}) > 0$ olması sebebiyle $x < \alpha_{h,1}$ için $P_{h+1}^{'}(x) > 0$ olduğunu gösterir. Pozitif olan $P_{h+1}(\alpha_{h,1}), (-\infty, \alpha_{h,1})$ içindeki P_{h+1}'in kökü olduğunu takip eder. Benzer sonuçlarla, $(\alpha_{h,h}, \infty)$içinde P_{h+1}'in bir kökünün varlığı kurulur. Teorem $N^{'} > 0$ için kurulur.

Teorem 3.3: Tüm x'ler için $D(x) > 0$, $D^{''} < 0$, $N^{'} - \frac{m}{2}D^{''} < 0$, $N \neq 0$, $N^{'} = 0$ ise ,P_n, P_{n-1} 'in kökleriyle ayrılmış olan $(n-1)$ gerçel farklı köke sahiptir(Beale,1937 : 223).

İspat: $P_1 \equiv N$ birinci dereceden polinomu sabit ise $P_1^{'} = 0$'dır.Sabit olan sayı c ile ifade edilir ise;

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \left[N - nD^{'}\right] P_n(x) + D.P_n^{'}(x) \\ P_2(x) &= \left[N - nD^{'}\right].c + D.0 \\ &= \left[N - nD^{'}\right].c \end{aligned}$$

$D^{''} < 0$ olması sebebıyle payda ikinci derecen olduğu açıktır dolayısıyla $D^{'}$ birinci dereceden bir polinoma karşılık gelmesi sebebiyle $P_2(x) = \left[N - nD^{'}\right].c$ lineerdir.$P_n(x)$'lerin büküm noktaları ise;

$$P_{n+1}^{''} = (n+1).\left[N^{'} - \frac{n}{2}D^{''}\right]\left[N^{'} - \frac{(n-1)}{2}D^{''}\right]P_{n-1}$$

$(n+1)$.dereceden bir polinomun büküm noktaları , $(n-1)$. Dereceden polinomun köklerindedir(Beale,1937 : 223).

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
PEARSON TİP I EĞRİSİ VE JACOBİ POLİNOMU ÜZERİNE BİR UYGULAMA

4.1.UYGULAMANIN TANITILMASI

Pearson $TipI$ dağılımını $y = y_0(1+\frac{x}{a})^{va}.(1-\frac{x}{b})^{vb}, (-\infty < k < 0)$, $f(x) = y$ eğrisi ile ifade etmiştir. Pearson diferansiyel denklemi y_0 sabit olmak üzere $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{vyx(a+b)}{(a+x).(x-b)}y$ ile ifade edilir. $TipI$ dağılımı Jacobi Polinomlarının kullanımını gerektirir ve Jacobi Polinomları ile $TipI$ dağılımı arasındaki ilişki aşağıdaki gibi incelenmiştir. Pearson $TipI$ dağılışı ters işaretli iki kök değerine sahip bir dağılıştır. r_1, r_2 ;$TipI$ dağılışının kökleri göstermek üzere ;bu uyugulamada $r_2 < 0 < r_1$ için Jacobi Polinomlarının Bölüm-3 Durum-1 ile ifade edilen şartlar altında $TipI$ dağılışı B/J biçimli dağılış incelemesi yapılmıştır.$TipI$ dağılışının genel çözümü ;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} &= -\frac{(x+a)}{b_0+b_1x+b_2x^2} \\
&= -\frac{1}{b_2}\left[\frac{A_1}{(x-r_1)}+\frac{A_2}{(x+r_2)}\right] \\
A_1(x+r_2)+A_2(x-r_1) &= x+a \\
x &= r_1 \Rightarrow A_1 = \frac{r_1+a}{r_1+r_2} \\
x &= r_2 \Rightarrow A_2 = \frac{r_2-a}{r_1+r_2} \\
r_2 &< 0 < r_1 \\
\ln f(x) &= -\frac{A_1}{b_2}\ln|x-r_1| - \frac{A_2}{b_2}\ln|x+r_2| + \ln K \\
f(x) &= k.(r_1-x)^{m_1}.(x+r_2)^{m_2} \\
m_1 &= -\frac{A_1}{b_2}, m_2 = -\frac{A_2}{b_2}
\end{aligned}$$

K,normalizasyon sabiti olmak üzere , $0 < w < 1$ olup,

$$\begin{aligned} w &= \frac{r_1 - x}{r_1 + r_2}, \\ r_1 - x &= w.(r_1 + r_2) \\ dx &= -(r_1 + r_2)dw \\ 1 - w &= \frac{r_1 + x}{r_1 + r_2} \end{aligned}$$

dönüşümleri ile $f(x) = 1$ olmalıdır

.Pearson $TipI$ dağılışı bu dönüşüm ile I Tip Beta dağılışı ile gösterimi

$$K.(r_1 + r_2)^{m_1+m_2+1} \int_0^1 w^{m_1}.(1 - w)^{m_2} dw = 1$$

'dir(Şehirlioğlu ve Dündar, 2014 : 70).

Bu integralden anlaşılacağı üzere aralık $(-r_2, r_1)$'den $(0, 1)$ aralığında bir integrale dönüşmüştür ve $m_1 = -\frac{A_1}{b_2}$, $m_2 = -\frac{A_2}{b_2}$ olan bir beta fonksiyonuna karşılık gelir.Pearson Tip I dağılımını ifade etmiştir.Pearson $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = v$ varsayımı altında Jacobi polinomları ile $TipI$ dağılımı arasındaki ilişkiyi $Bölüm2.1.$ 'de ifade edilen fonksiyonun serisel açılım üzerinden kurmuştur.$TipI$dağılışının olasılık.yoğunluk.fonksiyonu Jacobi polinomunun ağırlık fonksiyonudur. Ağırlık yoğunluk fonksiyonunun $z = \frac{a+x}{a+b}$ dönüşümü ile $(-a, b)$ den $(0, 1)$ aralığına dönüşümü yapılarak

$$\begin{aligned} y &= A_0 u_0 \\ \int y\phi_0 dx &= A_0 \int u_0 \phi_0 dx \\ \int y dx &= A_0 \int u_0 dx \\ \int u_0 dx &= \int_{-a}^{b} \rho(x)dx = \int_{-a}^{b} (a + x)^{\alpha} (b - x)^{\beta} dx \\ &= (a + b)^{\alpha+\beta+1} \int_0^1 z^{\alpha}(1 - z)^{\beta} dz \end{aligned}$$

beta fonksiyonuna dönüşür.

Bu ifadeden görüleceği üzere Jacobi polinomlarının Beta fonksiyonu ile ilişkilendirilmiş yeni ağırlık fonksiyonu $x^p.(1-x)^q$şeklinde bir ağırlık fonksiyonu ile incelenmesi durumunu Franks Beale

$$J_n(x,\alpha,\beta) = x^{1-\alpha}.(1-x)^{1-\beta}.\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\alpha-1}.(1-x)^{n+\beta-1}\right]; \alpha,\beta \epsilon R$$

olacak şekilde genel ifadesi ile inceleme altına almıştır.$TipI$ dağılışında m_1, m_2 değerleri ile Jacobi Polinomunun teorik olasılık yoğunluk fonksiyonu olan ağırlık fonksiyonunun α ve β parametreleri ile eşleştirilerek Tip I eğrisi ve Jacobi polinomu ilişkilendirilmiş ve eğrinin büküm noktaları ağırlık fonksiyonu üzerinden bulunmuştur.

Jacobi Polinomunun ağırlık fonksiyonu dönüştürülmüş hali $x^\alpha.(1-x)^\beta$ şeklindedir.Bu teorik olasılık yoğunluk fonksiyonunun büküm noktaları;

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f(x)}{dx^2} &= 0 \\
\frac{d^2(x^\alpha.(1-x)^\beta)}{dx^2} &= 0 \\
(\alpha.(\alpha-1)+2\alpha\beta+\beta^2-\beta)x^2+(-2\alpha^2+2\alpha-2\alpha\beta)x+\alpha.(\alpha-1) &= 0
\end{aligned}$$

$(\alpha.(\alpha-1)+2\alpha\beta+\beta^2-\beta)=a, (-2\alpha^2+2\alpha-2\alpha\beta)=b, \alpha.(\alpha-1)=c$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
x_1 &= 0,17 \\
x_2 &= -0.01
\end{aligned}$$

köklerindedir.Görüleceği üzere

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{x-\frac{\alpha}{\beta+\alpha}}{\frac{1}{-\beta-\alpha}.(x.(1-x))}f(x)$$

paydadaki polinom $x.(1-x)$ ile teorik olasılık yoğunluk fonksıyonu $x^\alpha.(1-x)^\beta$

ilişkili olduğu görülmektedir.Farklı işaretli reel köklere sahip olacak şekilde $TipI$ eğrisinin parametreleri Craig kartından seçilerek Jacobi polinomunun $(0, 1)$ aralığına düşen bir kökün var olduğu ve eğrinin büküm noktalarının polinomun ağırlık fonksiyonu üzerinden elde edilmesi üzerine bir uygulama yapılmıştır.

4.2 UYGULAMA

Jacobi Polinomları Bölüm 3.1 'de bulunmuş olan $N \equiv (-\beta-\alpha)x+\alpha, D \equiv x.(1-x)$ durum-I koşulu altında Pearson Diferansiyel Denkleminin çözümünü $TipI$ 'in genel çözümünde bulunan m_1, m_2 ve Jacobi Polinomlarının aşağıda ifade edilen Pearson Diferansiyel Denklemini sağladığı gerçeği altında Jacobi polinomunun genel bir çözümü elde edilerek m_1, m_2 değerleri Bölüm 3.1'de bahsedilen Durum-1 şartları altında $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $|\alpha| < |\beta|$, $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ tam sayı olmamak şartıyla α'yı pozitif yapan k değeri k_1, β' yı pozitif yapan k değeri k_2; $(\alpha+\beta+2k) < 0$ şartını sağlayan k değeri k_3 şartları altında ilişkilendirilmeye çalışıldı.

Jacobi Polinomlarının momentler metodu ile genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} &= \frac{x+a}{b_1x+b_2x^2} \\ (b_1x+b_2x^2).\frac{df(x)}{dx} &= (x+a).f(x) \end{aligned}$$

Eşitliğin her iki tarafı x^n ile çarpılarak

$$(b_1x^{n+1}+b_2x^{n+2}).\frac{df(x)}{dx} = (x^{n+1}+a.x^n).f(x)$$

$$\begin{aligned} u &= b_1x^{n+1}+b_2x^{n+2} \\ du &= (b_1(n+1)\,x^n + b_2(n+2)x^{n+1})dx \\ v &= f(x) \\ \int dv &= \int df(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int (b_1 x^{n+1} + b_2 x^{n+2}) df(x) &= \int (x^{n+1} + a.x^n) \\
&\quad .f(x)dx \\
(b_1 x^{n+1} + b_2 x^{n+2})_0^1 - \int (b_1(n+1)\, x^n + b_2(n+2)x^{n+1}) f(x)dx &= \int (x^{n+1} + a.x^n). \\
&\quad f(x)dx \\
0 - b_1(n+1)\mu_n^{'} - b_2(n+2)\mu_{n+1}^{'} &= \mu_{n+1}^{'} + a\mu_n^{'}
\end{aligned}$$

$$-b_1(n+1)\mu_n^{'} - b_2(n+2)\mu_{n+1}^{'} = \mu_{n+1}^{'} + a\mu_n^{'}$$

$n = 0, 1, 2$ için sırasıyla ,

$$\begin{aligned}
-b_1\mu_0^{'} - 2b_2\mu_1^{'} &= \mu_1^{'} + a\mu_0^{'} \\
-2b_1\mu_1^{'} - 3b_2\mu_2^{'} &= \mu_2^{'} + a\mu_1^{'} \\
-3b_1\mu_2^{'} - 4b_2\mu_3^{'} &= \mu_3^{'} + a\mu_2^{'}
\end{aligned}$$

elde edilir, ifade düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
b_1\mu_0^{'} + 2b_2\mu_1^{'} + a\mu_0^{'} &= -\mu_1^{'} \\
2b_1\mu_1^{'} + 3b_2\mu_2^{'} + a\mu_1^{'} &= -\mu_2^{'} \\
3b_1\mu_2^{'} + 4b_2\mu_3^{'} + a\mu_2^{'} &= -\mu_3^{'}
\end{aligned}$$

elde edilir ve a, b_1, b_2 denklem sisteminden

$$
\begin{aligned}
A &= (2.((\mu_1^{'})^2.\mu_2^{'} + 2.\mu_3^{'}.\mu_1^{'} - 3.\left(\mu_2^{'}\right)^2)) \\
a &= \frac{(-4.\mu_3^{'}.(\mu_1^{'})^2 + 3.\mu_1^{'}.\left(\mu_2^{'}\right)^2 + \mu_3^{'}.\mu_2^{'})}{(2.((\mu_1^{'})^2.\mu_2^{'} + 2.\mu_3^{'}.\mu_1^{'} - 3.\left(\mu_2^{'}\right)^2))} \\
b_1 &= -\frac{\mu_1^{'}.\left(\mu_2^{'}\right)^2 + \mu_3^{'}.\mu_2^{'} - 2\left(\mu_2^{'}\right)^2\mu_3^{'}}{A} \\
b_2 &= -\frac{(\mu_1^{'})^2.\mu_2^{'} + \mu_3^{'}.\mu_1^{'} - 2\left(\mu_2^{'}\right)^2}{A}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\frac{df(x)}{dx} = \frac{x - \frac{\alpha}{\beta+\alpha}}{\frac{1}{-\beta-\alpha}.(x.(1-x))} f(x)
$$

$$
\begin{aligned}
n &= 0 \text{ için} \\
-b_1\mu_0^{'} - 2b_2\mu_1^{'} &= \mu_1^{'} + a\mu_0^{'} \\
-\mu_0^{'} + 2\mu_1^{'} &= (-\beta-\alpha)\mu_1^{'} + \alpha.\mu_0^{'} \\
(2+\alpha+\beta)\mu_1^{'} &= 1+\alpha \\
\mu_1^{'} &= \frac{1+\alpha}{(2+\alpha+\beta)} \\
\mu_1^{'} &= \frac{1,76}{11,32} \\
\mu_1^{'} &= 0,15
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n &= 1 \text{ için} \\
-2\mu_1^{'} + 3.\mu_2^{'} &= (-\alpha-\beta)\,\mu_2^{'} + \alpha.\mu_1^{'} \\
(3+\alpha+\beta).\mu_2^{'} &= (\alpha+2)\,.\mu_1^{'} \\
\mu_2^{'} &= \frac{(\alpha+2)}{(3+\alpha+\beta)}.\mu_1^{'} \\
\mu_2^{'} &= 0,035
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n &= 2 \text{ için} \\
-3b_1\mu_2^{'} - 4b_2\mu_3^{'} &= \mu_3^{'} + a\mu_2^{'} \\
\frac{3}{\beta+\alpha}.0,033 - \frac{1}{\beta+\alpha}\mu_3^{'} &= \mu_3^{'} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.0,033 \\
\frac{3}{\beta+\alpha}.0,033 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.0,033 &= \mu_3^{'}.(\frac{1+\beta+\alpha}{\beta+\alpha}) \\
\frac{0,099+0,033.\alpha}{(1+\beta+\alpha)} &= \mu_3^{'} \\
\mu_3^{'} &= 0,009
\end{aligned}
$$

elde edilerek moment değerleri bulunur. Jacobi Polinomunun Pearson diferansiyel denkleminin genel çözümü;

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &\equiv \frac{N}{D} \\
\frac{df(x)}{dx} &= \frac{(-\beta-\alpha)x+\alpha}{x.(1-x)}.f(x) \\
\frac{d\ln f(x)}{dx} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} \\
A &= \alpha \\
B &= -\beta \\
\frac{d\ln f(x)}{dx} &= \frac{\alpha}{x} + \frac{-\beta}{1-x} \\
\ln f(x) &= \alpha.\ln|x| + (-\beta).\ln|1-x| + \ln K \\
f(x) &= K.x^{\alpha}.(1-x)^{\beta}
\end{aligned}
$$

Jacobi Polinomunun Pearson Diferansiyel denkleminde elde edilen çözümü ;

$$f(x) = x^{\alpha}.(1-x)^{-\beta}.K$$

$$
\begin{aligned}
A &= (2.((\mu_1^{'})^2.\mu_2^{'} + 2.\mu_3^{'}.\mu_1^{'} - 3.\left(\mu_2^{'}\right)^2)) = 0.001 \\
a &= \frac{(-4.\mu_3^{'}.(\mu_1^{'})^2 + 3.\mu_1^{'}.\left(\mu_2^{'}\right)^2 + \mu_3^{'}.\mu_2^{'})}{(2.((\mu_1^{'})^2.\mu_2^{'} + 2.\mu_3^{'}.\mu_1^{'} - 3.\left(\mu_2^{'}\right)^2))} = -0.04 \\
b_1 &= -\frac{\mu_1^{'}.\left(\mu_2^{'}\right)^2 + \mu_3^{'}.\mu_2^{'} - 2\mu_1^{'}\mu_3^{'}}{A} = -0.05 \\
b_2 &= -\frac{(\mu_1^{'})^2.\mu_2^{'} + \mu_3^{'}.\mu_1^{'} - 2\left(\mu_2^{'}\right)^2}{A} = 0.05
\end{aligned}
$$

$r_1 = 0$, $r_2 = 1$ elde edilir.

$TipI$ dağılışında $I.Tip\ Beta$ fonksiyonu ile $m_{1,}$ m_2 değereri eşleştirildiğinde $m_1 = \alpha$, $m_2 = \beta$'ya karşılık gelir. $TipI$ dağılışı için Craig Kartından faydalınarak $\delta = -0,15$, $\gamma_1 = -1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 3,97, r_1 = 1.5$,$r_2 = -8.1, m_1 = 0.76, m_2 = 8.56$ değerleri koşulları altında bulunarak ;Jacobi Polinomu $m_{1,}m_2$ ile eşleştirildi.$TipI$ dağılışında $m_1 = 0.76, m_2 = 8.56$ değeridir.Jacobi Polinomunda $|\alpha| < |\beta|, \alpha, \beta, \alpha + \beta$ tamsayı olmamak şartı ile;α'yı mükemmel tamsayı yapan $k_{1,}\beta'$yı mükemmel tamsayı yapan $k_2, \alpha + \beta + 2k > 0$ yapan mükemmel tamsayı değeri k_3 ve $0 \leq k_1 \leq k_3 \leq k_2$ şartları altında ,bu şartları sağlayan ve kullanılan k değerlerim $0 \leq k \leq k_1$ aralığına düşmeli ve bu aralıkta Jacobi Polinomunun bir k değerine bağlı olan bir kökü $\alpha_{1,k,1}$ varlığından söz edilmeli ve $\alpha_{1,k,1} = \frac{\alpha+k}{\alpha+\beta+2k}, 0 < \alpha_{1,k,1} < 1$ aralığında olacak şekilde sağlayan k'lar α, β parametrelerinden yola çıkılarak elde edilmelidir.

Craig Kartından elde edilen $m_1 = 0,76, m_2 = 8,56$ Jacobi Polinomunun $m_1 = \alpha, m_2 = \beta$ değerine karşılık gelir.$\alpha_{1,k,1}$'in $0 < \alpha_{1,k,1} < 1$ aralığına düşebilmesi için $\alpha + k_1 < 0, \alpha + \beta + 2k_3 < 0$ ve $|\alpha + k_1| < |\alpha + \beta + 2k_3|$ olmalıdır ki $\alpha_{1,k,1}$; $k_2 \leq k_3 \leq k_1 \leq 0$ şartını sağlayacak şekilde $k_1 \leq k \leq 0$ aralığına düşen k'lar bulunmalı ve bu k'lar $\alpha_{1,k,1}$ leri $0 < \alpha_{1,k,1} < 1'$lere düşürmelidir.

$$\alpha_{1,k,1} = \frac{\alpha + k}{\alpha + \beta + 2k}$$

$\alpha + k < 0$ yapan k değeri k_1, $0.76 + k_1 = k$, $k_1 = -1$ en mükemmel tam

sayı değeri için $0.76 + (-1) = -0.24$, alınan $k = -0.24$ ve $k_1 \leq k \leq 0$ için yani $-1 \leq k \leq 0$ aralığına -0.24 düşmektedir.

$\alpha+\beta+2k < 0$ yapan k değeri k_3, $9.32+2k_3 = k$; $k_3 = -5$ en mükemmel tamsayı değeri için $9.32 + 2.(-5) = -0.68$; alınan $k = -0.68$ ve $-1 \leq k \leq 0$ aralığına 0.68 bu aralığın içindedir.

$$\begin{aligned} \alpha_{1,k,1} &= \frac{\alpha + k}{\alpha + \beta + 2k} \\ &= \frac{-0.24}{-0.68} \\ &= 0.35 \end{aligned}$$

$-1 \leq k \leq 0$ aralığında alınan k'lar $\alpha_{1,k,1} = \frac{\alpha+k}{\alpha+\beta+2k}$ yukarıda verilen şartlar altında $0 \leq \alpha_{1,k,1} = 0.35 \leq 1$ aralığına düşen bir Jacobi polinomunun olduğunu gösterir.

SONUÇ

Bu çalışmada Pearson diferansiyel denkleminin ortogonal polinomlarla ilişkisi Pearson diferansiyel denkleminin pay kısmının yalnız bırakılması ile $D.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \equiv N$, diğer bir ifade ile

$P_1(x) = \frac{1}{y}.D.\frac{dy}{dx}$ ardışık türevleri alınarak $P_n(x) = \frac{1}{y}.D^n.\frac{d^n y}{dx^n}$, $k = 0$ durumunu sağlayan Hermite polinomu için ,α ve β'nın varlığı sebebiyle ortaya çıkan k herhangi bir reel sayı olmak üzere ; Laguerre ve Jacobi polinomunu sağlayan $P_n(k,x) = \frac{1}{y}.D^{n-k}.\frac{d^n D^k y}{dx^n}$ polinomsal ilişki ve bu ilişkilerden ortaya çıkan rekürans bağıntıları elde edilmiştir.Burada $P_1(x)$ ile ifade edilen durum ;

Eğer $D = x.(1-x)$, $N = (-\beta-\alpha)x+\alpha$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = -1$ koşulları altında bir Jacobi ortogonal polinomudur.

Eğer $D = x$, $N = (-x+\alpha)$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ koşulları altında Laguerre ortogonal polinomudur.

Eğer $D = \sigma^2$, $N = -x, b_0 \neq 0, b_1 = 0, b_2 = 0$ koşulları altında bir Hermite ortogonal polinomudur.

$$
\begin{aligned}
P_{n+1}(k,x) &= \left[N + (k-n)D^{'}\right] P_n(k,x) + D.P_n^{'}(k,x), \\
P_{n+1}^{'}(k,x) &= (n+1).\left[N^{'} + \frac{(2k-n)}{2}D^{''}\right] P_n(k,x), \\
P_{n+1}(k,x) &= \left[N + (k-n)D^{'}\right] P_n(k,x) + n.D.\left[N^{'} + \frac{2k-n+1}{2}D^{''}\right] P_{n-1}(k,x)
\end{aligned}
$$

rekürans bağıntılarından faydanılarak köklerin konumu ile ilişki kurulduğu görülür.

$T\dot{I}pI$ dağılışı $f(x) = K.x^{\alpha}.(1-x)^{\beta}$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında tanımlı bir Beta fonksiyonu olarak alındığında $\rho(x) = x^{\alpha}.(1-x)^{\beta}$ Jacobi polinomunun ağırlık fonksiyonu olarak çıktığı görülür. Teorik olasılık yoğunluk fonksiyonu olan $\rho(x) = x^{\alpha}.(1-x)^{\beta}$ ikinci türevinin sıfıra eşitlenmesi ile elde edilen kökler büküm noktalarıdır.

Pearson diferansiyel denkleminin paydasındaki polinom ikinci dereceden bir polinomdur.Dolayısı ile büküm noktalarının sayısı ikiyi aşamaz.Bununla birlikte

eldeki veri setinin histogramı üç ve daha fazla büküm noktasına sahip görünüyorsa bu veri setine olasılık yoğunluk fonksiyonunun uyumunda Pearson dağılımları kullanılamaz Pearson yaklaşımının kullanılabilmesi için paydadaki polinomun derecesinin en az üç olacak şekilde düzenlenmesi ve çözülmesi gerekir. Bu durumda çözümden elde edilebilecek $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu hipergeometrik fonksiyonlarla özellikle Confluent ve Gauss hipergeometrik fonksiyonları ile ilişkilidir. Bu fonksiyonların ortogonal polinomlar cinsinden ifade edilebilmesi halinde üç bükümlü dağılışlar bu tezde anlatılana benzer bir şekilde elde edilebilir.Bu ileride bir çalışma konusu olarak tavsiye edilir.

.

KAYNAKÇA

Aydın, M., Kuryel,B., Gündüz , G. ve Oturanç, G. (2005). *Diferansiyel Denklemler Ve Uygulamaları*. İzmir: Barış Yayınları.

Beale, F. (1937). On the Polynomials Related to the Differential Equation. The Annals Of Mathematical Statistics. 8(4): 206-223.

Dündar, S. (2012). *Pearson Dağılış Ailesi.* İzmir: Ege Üniversitesi Basımevi.

Hildebrandt, E. (1931). Systems of Polynomials Connected with the Charlier Expansions and the Pearson Differential and Difference Equations. The Annals of Mathematical Statistics. 2(4): 379-439.

Jackson, D. (1941). Fourier Series and Orthogonal Polynomials. The Mathematical Association Of America : America.

Lawton, W. (1932). On the Zeros of Certain Polynomials Related to Jacobi and Laguerre Polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. 38(6): 442-448.

Fujiwara , M. (1925). On the Zeros of Jacobi Polynomials. Japanese Journal of

Math. 2(1) :1-2.

Romanovsky, V. (1924). Generalistaion of Some Types of the Frequency Curves of Professor Pearson . Biometrika 16(1/2) : 106 -117.

Şehirlioğlu, A., Dündar, S. (2014). *Pearson Dağılış Ailesi Genişletilmiş İkinci Baskı.* İzmir: Ege Üniversitesi Basımevi.

Karadeniz , A. (1999) . *Yüksek Matematik.* İstanbul: Çağlayan Kitabevi .

EKLER

EK 1: Bir Çarpımın n. Mertebeden Türevi İçin Leibnitz Formülü

$u = u(x)$ ve $v = v(x)$ olarak $y = u.v$ olsun. Bu ifadenin *n.* mertebeden türevi;

$y^{(n)} = (u.v)^{(n)} = u^{(n)}.v + n.u^{(n-1)}v' + \frac{n.(n-1)}{2!}u^{(n-2)}.v'' + ... + u.v^{(n)}$ ifadesine Leibnitz formülü denir (Karadeniz, 1999:78).

i) *n.* dereceden Laguerre polinomunun ağırlık fonksiyonunun Leibnitz formülünün kullanılmasıyla *n.* dereceden türevi aşağıda elde edilmiştir .

$\phi_n(x) = x^{\alpha+n}e^{-x}$ fonksiyonunda

$u = x^{\alpha+n}$

$u' = (\alpha+n)x^{\alpha+n-1}$

$u'' = (\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{\alpha+n-2}$

$u''' = (\alpha+n)(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)x^{\alpha+n-3}$

$v = e^{-x}$

$v' = -e^{-x}$

$v'' = e^{-x}$

$v''' = -e^{-x}$

.

.

$v^{n-1} = -e^{-x}$

$v^{n} = e^{-x}$

Eksili ve artılı ifadeler açılımda gelmesi sebebiyle türevin kaçıncı dereceden olduğunu gösteren n indisini bir çift sayı varsayımı ile ele alınması ile ;

$$\phi_n^{(n)}(x) = x^{\alpha+n}e^{-x} - \binom{n}{1}(\alpha+n)x^{\alpha+n-1}e^{-x} + \binom{n}{2}(\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{\alpha+n-2}e^{-x} + .$$

$$... + \binom{n}{n}(\alpha+n)(\alpha+n-1)....(\alpha+n-n)x^{\alpha+n-n}e^{-x}$$

$$\phi_n^{(n)}(x) = x^{\alpha+n}e^{-x} - \binom{n}{1}(\alpha+n)x^{\alpha+n-1}e^{-x} + \binom{n}{2}(\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{\alpha+n-2}e^{-x} + ..$$

$$+ (\alpha+n)(\alpha+n-1)....(\alpha+n-n)x^{\alpha}e^{-x}$$

$$\phi_n^{(n)}(x) = (-1)^n x^{\alpha}e^{-x}\begin{pmatrix} x^n + \binom{n}{1}(\alpha+n)x^{n-1} + \binom{n}{2}(\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{n-2} + . \\ ... + (\alpha+n)(\alpha+n-1)...\alpha x^0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

ii) *n.* dereceden daha düşük dereceli Laguerre polinomunun ağırlık fonksiyonunun türevi Leibnitz formülü yardımı ile

$$u = x^{\alpha+n}$$
$$u' = (\alpha+n)x^{\alpha+n-1}$$
$$u'' = (\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{\alpha+n-2}$$
$$u''' = (\alpha+n)(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)x^{\alpha+n-3}$$

ve devam eden ardışık *n-1* türev ile

$$.u^{n-1} = (\alpha+n)(\alpha+n-1).....(\alpha+n-(n-1))x^{\alpha+n-(n-1)}$$
$$u^{n-1} = (\alpha+n)(\alpha+n-1).....(\alpha+1)x^{\alpha+1}$$

ve

$$v = e^{-x}$$
$$v' = -e^{-x}$$
$$v'' = e^{-x}$$
$$v''' = -e^{-x}$$

devam eden ardışık *n-1 türev ile*

$$v^{n-3} = -e^{-x}$$
$$v^{n-2} = e^{-x}$$
$$v^{n-1} = -e^{-x}$$

$$\phi_n^{n-1}\left(x^{\alpha+n}.e^{-x}\right) = x^{\alpha+n}\left(-e^{-x}\right) + \binom{n-1}{1}(\alpha+n)x^{\alpha+n-1}e^{-x}$$
$$+\binom{n-1}{2}(\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{\alpha+n-2}\left(-e^{-x}\right)+\ldots$$
$$\ldots.-e^{-x}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots.(\alpha+1)x^{\alpha+1}$$
$$\phi_n^{n-1}\left(x^{\alpha+n}.e^{-x}\right) = x^{\alpha+1}e^{-x}\begin{pmatrix} -x^{n-1}+\binom{n-1}{1}(\alpha+n)x^{n-2}+\ldots \\ \ldots-\binom{n-1}{n-1}(\alpha+n).....(\alpha+1) \end{pmatrix}$$

elde edilir.

iii)

$$L_n(x) = (-1)^n x^{-\alpha}e^x\phi_n^n(x)$$
$$= (-1)^n x^{-\alpha}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)$$
$$= (-1)^n x^{-\alpha}e^x\phi_n^n(x)$$
$$\phi_n(x) = x^{\alpha+n}e^{-x}$$
$$u = x^{\alpha+n}$$
$$u' = (\alpha+n)x^{\alpha+n-1}$$
$$u'' = (\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{\alpha+n-2}$$
$$u''' = (\alpha+n)(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)x^{\alpha+n-3}$$

ve devam eden u fonksıyonun türevleri ve

$$v = e^{-x}$$
$$v' = -e^{-x}$$
$$v'' = e^{-x}$$

ve devam eden v fonksiyonunun türevleri

$$v^{n-1} = -e^{-x}$$

$$v^{n} = e^{-x}$$

$$\phi_n^n(x) = x^{\alpha+n}e^{-x} - \binom{n}{1}(\alpha+n)x^{\alpha+n-1}e^{-x} + \binom{n}{2}(\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{\alpha+n-2}e^{-x} + .$$

$$. \qquad ... + \binom{n}{n}e^{-x}(\alpha+n)(\alpha+n-1)...\alpha x^{\alpha}$$

$$L_n(x) = (-1)^n x^{-\alpha}e^{x}\phi_n^n(x)$$

$$= (-1)^n x^{-\alpha}e^{x}\begin{pmatrix} x^{\alpha+n}e^{-x} - \binom{n}{1}(\alpha+n)x^{\alpha+n-1}e^{-x} \\ + \binom{n}{2}(\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{\alpha+n-2}e^{-x} + . \\ ... + \binom{n}{n}e^{-x}(\alpha+n)(\alpha+n-1).....\alpha x^{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n x^{n} - (-1)^n(\alpha+n)x^{n-1} + (-1)^n\binom{n}{2}(\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{n--2} + ...$$

$$..... + (-1)^n\binom{n}{n}(\alpha+n)(\alpha+n-1)..\alpha$$

iv)

$$L_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}x^{-\alpha}e^{x}\phi_{n+1}^{n+1}(x)$$

$$\phi_{n+1}(x) = x^{\alpha+n+1}e^{-x}$$

$$u = x^{\alpha+n+1}$$

$$u^{'} = (\alpha+n+1)x^{\alpha+n}$$

$$u^{''} = (\alpha+n+1)(\alpha+n)x^{\alpha+n-1}$$

Ve

$$.v = e^{-x}$$

$$v^{'} = -e^{-x}$$

$$v^{''} = e^{-x}$$

.

.

.

$$v^{n} = e^{-x}$$

$$v^{n+1} = -e^{-x}$$

$$L_{n+1}(x) = (-1)x^{-\alpha}e^{x}\left(x^{\alpha+n+1}\left(-e^{-x}\right)+\binom{n+1}{1}(\alpha+n+1)...(\alpha+n+1-n-1)x^{\alpha} \right)$$

$$= x^{n+1} - \binom{n+1}{1}(\alpha+n+1)x^{n} + ... - (\alpha+n+1).....\alpha x^{\alpha}$$

v)

$$L_{n-1}(x) = (-1)^{n-1}x^{-\alpha}e^{x}\phi_{n-1}^{n-1}(x)$$

$$= (-1)x^{-\alpha}e^{x}\phi_{n-1}^{n-1}(x)$$

$$\phi_{n-1}(x) = x^{\alpha+n-1}.e^{-x}$$

$$\Rightarrow u = x^{\alpha+n-1}$$

$$u' = (\alpha+n-1)x^{\alpha+n-2}$$

$$u'' = (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)x^{\alpha+n-3}$$

$$\Rightarrow v = e^{-x}$$

$$v' = -e^{-x}$$

.

$$v^{n-1} = -e^{-x}$$

$$y^{(n)} = (u.v)^{(n)} = u^{(n)}.v + n.u^{(n-1)}v' + \frac{n.(n-1)}{2!}u^{(n-2)}.v'' + ... + u.v^{(n)}$$

$$= -x^{\alpha+n-1}e^{-x} + \binom{n-1}{1}(\alpha+n-1)x^{\alpha+n-2}e^{-x} + .$$

$$... + e^{-x}(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)(\alpha+n-3)....\alpha x^{\alpha}$$

$$L_{n-1}(x) = (-1)^{n-1}x^{-\alpha}e^{x}\phi_{n-1}^{n-1}(x)$$

$$= (-1)^{n-1}x^{-\alpha}e^{x}\left(\begin{array}{l} -x^{\alpha+n-1}e^{-x} + \binom{n-1}{1}(\alpha+n-1)x^{\alpha+n-2}e^{-x} + \\ .... + (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)...\alpha e^{-x}x^{\alpha} \end{array} \right)$$

$$= x^{n-1} - \binom{n-1}{1}(\alpha+n-1)x^{n-2} + ... - (\alpha+n-1)(\alpha+n-2).....\alpha$$

vi)

$$\phi_{n+1}(x) = x.x^{\alpha+n}e^{-x}$$
$$u = x$$
$$u' = 1$$
$$u'' = 0$$
.
$$u^{n+1} = 0$$
$$v = x^{\alpha+n}e^{-x}$$
$$v' = \frac{d}{dx}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)$$
$$v'' = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)$$
.
$$v^{n+1} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)$$

$$\phi_{n+1}^{n+1}(x) = x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right) + (n+1)\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right) + \binom{n+1}{2}0 + \ldots + \left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right).0.$$
$$= x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right) + (n+1)\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right) + 0 + \ldots + 0$$

vii) *n.* dereceden Jacobi polinomunun ikinci dereceden türevinin Leibniz formülü ile bulunması :

$$\frac{d^2}{dx^2}(uv) = \frac{u.d^2v}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + v\frac{d^2u}{dx^2}$$
$$u = (1-x)^{\alpha+n}$$
$$u' = -(\alpha+n)(1-x)^{\alpha+n-1}$$
$$u'' = (\alpha+n)(\alpha+n-1)(1-x)^{\alpha+n-2}$$
$$v = (1+x)^{\beta+n}$$
$$v' = (\beta+n)(1+x)^{\beta+n-1}$$
$$v'' = (\beta+n)(\beta+n-1)(1+x)^{\beta+n-2}$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(uv) = (1-x)^{\alpha+n}(\beta+n)(\beta+n-1)(1+x)^{\beta+n-2} - 2(\alpha+n)(1-x)^{\alpha+n-1}(\beta+n)(1+x)^{\beta+n-1}$$
$$+ (1+x)^{\beta+n}(\alpha+n)(\alpha+n-1)(1-x)^{\alpha+n-2}$$

viii)

$1) D.\frac{dy}{dx} =$

$D = u$

$D^{'} = u^{'}$

$D^{''} = u^{''}$

$D^{'''} = 0$

ve Pearson Diferansiyel denkleminin paydasını gösteren *D*'nin devam eden türevleri sıfırdır

$\frac{dy}{dx} = v$

$\frac{d^2y}{dx^2} = v^{'}$

$.\frac{d^3y}{dx^3} = v^{''}$

.

.

$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = v^{n-2}$

$\frac{d^{n}y}{dx^{n}} = v^{n-1}$

$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = v^{n}$

$(u,v)^{(n)} = D.\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \binom{n}{1} D^{'} \frac{d^{n}y}{dx^{n}} + \binom{n}{2} D^{''} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \binom{n}{3} 0 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + 0$

$(D,\frac{dy}{dx})^{(n)} = D.\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \binom{n}{1} D^{'} \frac{d^{n}y}{dx^{n}} + \binom{n}{2} D^{''} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$

$$\frac{dy}{dx} = v$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = v'$$

$$.\frac{d^3y}{dx^3} = v''$$

.

.

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = v^{n-2}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = v^{n-1}$$

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = v^n$$

$$(u,v)^{(n)} = D.\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \binom{n}{1}D'\frac{d^n y}{dx^n} + \binom{n}{2}D''\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \binom{n}{3}0\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + 0$$

$$(u,v)^{(n)} = D.\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \binom{n}{1}D'\frac{d^n y}{dx^n} + \binom{n}{2}D''\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

$2) Ny$

$$N = u$$

$$N' = u'$$

$$N'' = 0$$

$$N''' = 0$$

..

$$N^n = 0$$

$$y = v$$

$$\frac{dy}{dx} = v'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = v''$$

$$(u,v)^{(n)} = N.\frac{d^n y}{dx^n} + \binom{n}{1}N'\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \binom{n}{2}N''\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \binom{n}{3}N'''\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + ... + \binom{n}{n}N^n y$$

$$= N.\frac{d^n y}{dx^n} + \binom{n}{1}N'\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

ix)

$$D.\frac{d}{dx}D^k y =$$

$$D = u$$

$$D' = u'$$

$$D'' = u''$$

$$D''' = u''' = 0$$

.

$$D^n = u^n = 0$$

$$\frac{d}{dx}D^k y = v$$

$$\frac{d^2}{dx^2}D^k y = v'$$

$$\frac{d^3}{dx^3}D^k y = v''$$

$$\frac{d^4}{dx^4}D^k y = v'''$$

.

.

.

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}D^k y = v^{n-2}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}D^k y = v^{n-1}$$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}D^k y = v^n$$

$$1)(u,v)^{(n)} = D.\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}D^k y + \binom{n}{1}D'.\frac{d^n}{dx^n}D^k y + \binom{n}{2}D''\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}D^k y$$

$2) ND^k y \rightarrow$

$N = u$

$N^{'} = u^{'}$

$N^{''} = u^{''} = 0$

$N^{'''} = u^{'''} = 0$

$D^k y = v$

$\frac{d}{dx} D^k y = v^{'}$

$\frac{d^2}{dx^2} D^k y = v^{''}$

.

$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} D^k y = v^n$

$(ND^k y)^{(n)} = N \frac{d^n}{dx^n} D^k y + \binom{n}{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} D^k y$

x)

$P_{n+q-1} = (\alpha_i x + \beta_i)^q . \vartheta_{n-1}$

$(\alpha_i x + \beta_i)^q = u$

$q.(\alpha_i x + \beta_i)^{q-1} = u^{'}$

$q.(q-1).(\alpha_i x + \beta_i)^{q-2} = u^{''}$

.....

..

.

$\alpha_i . q.(q-1)..... 2.(\alpha_i x + \beta_i) = u^{q-1}$

$\phi_{n-1} = v$

$\phi_{n-1}^{'} = v^{'}$

$\phi_{n-1}^{''} = v^{''}$

.

.

$\phi_{n-1}^{q-1} = v^{q-1}$

$P_{n+q-1}^{(q-1)} = (\alpha_i x + \beta_i)^q . \frac{d^{q-1} \phi_{n-1}}{dx^{q-1}} + \binom{q-1}{1} . q.(\alpha_i x + \beta_i)^{q-1} . \alpha_i . \frac{d^{q-2} \phi_{n-1}}{dx^{q-2}} + ... + \phi_{n-1} . \alpha_i .. q! . \alpha_i x + \beta_i)$

EK 2: L'Hospital Kuralı, Laguerre Polinomu

f(x) ve *F(x)* fonksiyonlar olmak üzere

$\lim_{x\to a} f(x) = 0$

$\lim_{x\to a} F(x) = \infty$

Durumunda $x=a$ için $f(x).F(x)$ ifadesi $0.\infty$ belirsiz şeklindedir. $\lim_{x\to a}[f(x).F(x)]$ limitini hesaplamak için $f(x).F(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}} = \frac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ olduğu göz önünde tutulursa $0.\infty$ belirsizliği

$\frac{0}{0} veya \frac{\infty}{\infty}$ belirsiz şekillerinden birine düşürülmüş olur.

Daha sonra $\frac{0}{0}$ belirsiz şeklinde;

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ ifadesine L'hospital kuralı uygulanır.

$f(a) = 0$

$F(a) = 0$

$f'(a) = 0$

$F'(a) = 0$

İse aynı kural $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 'e uygulanması ile $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{F''(x)} = \frac{f''(a)}{F''(a)}$ elde edilir(Karadeniz, 1999:78)..

Laguerre polinomunun *n*.dereceden ağırlık fonksiyonun *n'*den daha küçük dereceli türevleri için $x = \infty$ durumundaki belirsizlik incelenmesi aşağıda incelenmiştir.

$x^{\alpha+n}.e^{-x} = \infty^{\alpha+n}.e^{-\infty} = \infty.0$ Bu durumda

$x^{\alpha+n}.e^{-x} = \infty^{\alpha+n}.e^{-\infty} = \infty.0$

$f(x) = e^{-x};$

$F(x) = x^{\alpha+n}$

$$f(x).F(x) = \frac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

$$= \frac{x^{\alpha+n}}{\frac{1}{e^{-x}}}$$

$$= \frac{\infty}{\frac{1}{0}}$$

$$= \frac{\infty}{\infty}$$

gelmesi sebebiyle L'Hospital uygulanır..

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{\left(x^{\alpha+n}\right)'}{\left(e^{x}\right)'} = \frac{(\alpha+n)x^{(\alpha+n)-1}}{e^{x}} = \frac{0}{0}$$

$-1 < \alpha + n, \alpha + n \neq 0$

$-2 < \alpha + n - 1$

.

.

$-k-1 < \alpha + n - k$

Dolayısı ile k L'Hopital alındığında ;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1).....(\alpha+n-k+1)x^{(\alpha+n)-k}}{e^{x}}$$

$$= \frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1).....(\alpha+n-k+1)}{e^{x}.x^{-((\alpha+n)-k)}}.$$

$(\alpha+n)(\alpha+n-1).....(\alpha+n-k+1) = sabit$

$(\alpha+n) = sabit$

$(\alpha+n-1).....(\alpha+n-k+1) = sabit$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1).....(\alpha+n-k+1)}{e^{x}.x^{-((\alpha+n)-k)}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\alpha+n)}{e^{x}}\right)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\alpha+n-1)....(\alpha+n-k+1)}{x^{-((\alpha+n)-k)}}\right)$$

$$= 0.0$$

$$= 0$$

EK 3: Gama Fonksiyonu

Gama fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}.e^{-t}.dt$$

$x > 0$ için yakınsak ise bu ifadeye Gama fonksiyonu denir (Pehlivan ve Gürdal, 2004:202).

$t = x,$

$t^{\alpha+n} = t^{x-1}$

$\alpha + n + 1 = x$

$\Gamma(\alpha + n + 1)$

EK 4: Hermite Polinomunun Rekürans Bağıntısı

i) *f(x)* aşağıdaki şu özellikleri sağlar öyle ki;

(a) *f(x)* ve *f(x)*'in türevleri *x*'in tüm gerçel değerleri için süreklidir.

(b) *f(x)* ve *f(x)*'in türevleri $x = +\infty$ ve $x = -\infty$'da yok olur.

(c)Tüm *m* ve *n* için $\lim_{x \to \pm\infty} x^m f^n(x) = 0$'dır.

(d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \neq 0$$

$$m \neq n \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) f^m(x)dx = 0$$

$$m = n \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) f^m(x)dx = 1$$

dır (Hildebrant, 1931:382). Polinom ve fonksiyonun türevlerinin kümesi biortoganldir, biortogonallik şartlarını sağlar.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) f^{m}(x)dx = P_n(x) f^{m-1}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} P_n^{'}(x) f^{(m-1)}(x)dx$$

$$P_n(x) = u$$

$$P_n^{'}(x)dx = du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) f^{m}(x)dx = P_n(x).f^{m-1}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f^{m-1}(x).P_n^{'}(x)dx$$

Bu denklemin sağ tarafındaki ilk kısım; (c) koşulu

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^m.f^{n}(x) = 0$$

sebebiyle yok olur.İkinci kısım ;

$$-\int_{-\infty}^{\infty} P_n^{'}(x) f^{(m-1)}(x)dx = 0; m \neq n$$

$$*-\int_{-\infty}^{\infty} P_n^{'}(x) f^{(m-1)}(x)dx = 1; m = n$$

Ve

$$-\int_{-\infty}^{\infty} P_{n-1}(x) f^{(m-1)}(x)dx = 0; m \neq n$$

$$**\int_{-\infty}^{\infty} P_{n-1}(x) f^{(m-1)}(x)dx = 1; m = n$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} P_n^{'}(x) f^{(m-1)}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} P_{n-1}(x) f^{(m-1)}(x)dx$$

*Ve ** eşitliklerinden $\frac{dP_n(x)}{dx} = -P_{n-1}(x)$ elde edilir.

Hermite polinomları bazı kaynaklarda

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} d^n\left(e^{-x^2}\right)/dx^n$$

$$\rho(x) = e^{-x^2}$$

şeklinde ifade edilir.

$\rho(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonudur ve

$\phi(x) = e^{-x^2}$

$\phi'(x) = -2x.e^{-x^2}$

$\phi''(x) = (-2x.e^{-x^2} + (-2x.(-2x.e^{-x^2}))$

$\phi''(x) = -2e^{-x^2} - 4x^2 e^{-x^2}$

.

$\phi^{(n)}(x) = H_n(x)(-1)^n e^{-x^2}$

$(-1)^n \frac{d^n\left(e^{-x^2}\right)}{dx^n} = H_n(x)e^{-x^2}$

$H_n(x)e^{-x^2} = (-1)^n d^n\left(e^{-x^2}\right)/dx^n$

$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = 0; m \neq n için$

$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = (-2)^n n!\sqrt{\pi}; m = n$

$-\int_{-\infty}^{\infty} H_n'(x)\varphi^{n-1}(x)dx = 0; m \neq n$

$-\int_{-\infty}^{\infty} H_n'(x)\varphi^{n-1}(x)dx = (-2)^n n!\sqrt{\pi}; m = n$

$\int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}(x)\varphi^{n-1}(x)dx = (-2)^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}$

$\frac{-1}{(-2)^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n'(x)\varphi^{n-1}(x)dx = \frac{1}{(-2)^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{n-1}(x)H_{n-1}(x)dx$

$\int_{-\infty}^{\infty} (H_n'(x).\frac{-1}{(-2)^n.n!\sqrt{\pi}})\varphi^{n-1}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{n-1}(x)(\frac{1}{(-2)^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}} H_{n-1}(x))dx$

$(H_n'(x).\frac{-1}{(-2)^n.n!\sqrt{\pi}}) = (\frac{1}{(-2)^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}} H_{n-1}(x))$

$\frac{1}{2n} H_n'(x) = H_{n-1}(x)$

$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x)$

elde edilir(Hildebrant, 1931:386).

EK 5: Beta Fonksiyonu

Jacobi polinomlarının ağırlık fonksiyonu Beta fonksiyonu ile ilişkilidir**.**

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \beta(\alpha,\beta)$$

$$\alpha,\beta > 0$$

Bu fonksiyon (0,1) aralığında incelenen birinci tip Beta fonksiyonudur. Birinci tip Beta fonksiyonundan üçüncü tip beta fonksiyonuna dönüşüm**;**

$$w = \frac{1}{s}$$

$$dw = -\left|\frac{1}{s^2}\right| ds$$

$$\int_1^\infty s^{-p-q}.(s-1)^{q-1}\,ds = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \beta(p,q)$$

$$w = \frac{s-1}{s}$$

$$dw = \frac{1}{s^2}\,ds$$

$$1 < s < \infty$$

$$\int_1^\infty s^{-p-q}.(s-1)^{p-1}\,ds = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \beta(p,q)$$

(Şehirlioğlu ve Dündar, 2014:EK 507).