J. Innovative Eng. Nat. Sci., c. 3, s. 2, ss. 191-204, 2023.
http://dx.doi.org/10.29228/JIENS.70384

Journal of Innovative Engineering and Natural Science
(Yenilikçi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Dergisi)
journal homepage: https://jiens.org

Araştırma Makalesi

Eksik tahrikli döner ters sarkaç sisteminin geribeslemeli doğrusallaştırma tabanlı kademeli kontrolü

Aykut Kocaoğlu[a,*]

[a]*Elektrik ve Enerji Bölümü, İzmir Meslek Yüksekokulu, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir, 35380, TÜRKİYE.*

MAKALE BİLGİSİ

Makale Geçmişi:
Geliş
Düzeltme
Kabul

Çevrimiçi mevcut

Anahtar Kelimeler:
Kademeli kontrol
Geribeslemeli doğrusallaştırma
Döner ters sarkaç
Eksik tahrik
Doğrusal olmayan sistem

ÖZET

Kademeli kontrol, özellikle bozanetkenlere karşı performansı iyileştirmek için tercih edilen çok döngülü bir kontrol yapısıdır. Genellikle, iç döngü kontrolü (bağımlı kontrolör) ve dış döngü kontrolünden (ana kontrolör) oluşan ve bağımlı kontrolörün ayar noktasının, bu ana kontrolör tarafından ayarlandığı bir geri beslemeli kontroldür. Bu çalışmada, üzerine etki eden yerçekimi kuvvetleri, Coriolis ve merkezcil kuvvetlerden dolayı doğrusal olmayan dinamiğe sahip döner ters sarkaç sisteminin denetlenmesinde kademeli kontrol kullanılmıştır. Burada, bağımlı kontrolcü için geribeslemeli doğrusallaştırma tabanlı oransal-türevsel *(PD)* denetleyici ve ana kontrolcü içinse doğrusal karesel düzenleyici (DKD) kullanılmıştır. İç döngüde kullanılan geri beslemeli doğrusallaştırmanın bağıl derecesi ikidir ve kararsız sıfır dinamiklere sahiptir. Bu kararsız dinamikler ana kontrolcü tasarımında ele alınmış ve kademeli kontrolün kararlı olması sağlanmıştır. Ters sarkacın doğrusal olmayan dinamik denkleminde sarkaca uygulanabilen tork bozanetken olarak formüle edilmiştir. Önerilen geribeslemeli doğrusallaştırma tabanlı kademeli denetleyici, bozan etken varlığında iki farklı denetleyici ile karşılaştırılmış ve daha iyi performans sergilediği gösterilmiştir.

2023 JIENS Tüm hakları saklıdır.

Feedback linearization-based cascade control of an underactuated rotary inverted pendulum system

ARTICLE INFO

Article history:
Received
Received in revised form
Accepted

Available online

Keywords:
Cascaded control
Feedback linearization
Rotary inverted pendulum
Underactuated
Nonlinear System

ABSTRACT

The cascaded control is a multi-loop control structure that is particularly favored to improve performance against disturbances. It is usually a feedback control consisting of an inner loop (slave controller) and an outer loop (master controller), where the set point of the slave controller is set by this master controller. In this paper, a cascaded control strategy is employed to control a rotary inverted pendulum system with nonlinear dynamics due to gravitational, Coriolis and centripetal forces acting on it. Herein, a feedback linearization-based Proportional-Derivative (PD) controller is used for the slave controller and a linear quadratic regulator is used for the master controller. The feedback linearization employed in the inner loop has a relative degree of two and has unstable zero dynamics. These unstable dynamics are addressed in the main controller design and the whole cascaded control becomes stable. In the nonlinear dynamic equation of the inverted pendulum, the torque applied to the pendulum is formulated as a disturbance factor. The proposed feedback linearization-based cascade controller is compared with two different controllers in the presence of disturbances and shown to perform better.

2023 JIENS All rights reserved.

* Sorumlu yazar. Tel.: +90-232-301-2641; e-mail: aykut.kocaoglu@deu.edu.tr

I. GİRİŞ

Her biri kendine özgü özelliklere ve uygulamalara sahip çeşitli ters sarkaç sistemleri vardır. Araba üzerindeki ters sarkaç çeşidinde sistem, arabaya bağlı serbest bir direk ile bir ray üzerinde bir arabadan oluşur [1, 2]. Amaç, direği dikey konumda dengede tutmak için arabanın hareketini kontrol etmektir. Çift ters sarkaç [3, 4] ise uç uca eklenmiş iki sarkaçtan oluşur ve amaç sistemi dikey konumda dengede tutmak için her iki sarkacın hareketini kontrol etmektir. Bir diğer ters sarkaç çeşidi ise, dikey eksende yer çekimine karşı koymaya çalışan iki bağlantılı bir sistemdir [3, 5]. Sadece, ikinci bağlantı noktasında aktüatör bulunmaktadır. Bu çalışmada kullandığımız döner ters sarkaç (Furuta sarkacı olarak da bilinir) ise en yaygın olan ters sarkaç çeşitleri arasında yer almaktadır ve dikey eksen etrafında her iki yönde de dönebilen motorlu bir pivota bağlı olan ve yatay bir eksen etrafında dönebilen bir sarkaçtan oluşur [6-8]. Amaç, sarkacı dikey konumda dengede tutmak için motor tahriki ile pivotu kontrol etmektir. Sarkaç tipik olarak döner kola uygulanan bir tork aracılığıyla dolaylı olarak kontrol edilir, bu da onu eksik tahrikli bir sistem yapar. Sistemin dinamikleri oldukça karmaşıktır ve çoklu denge noktasının varlığı ve salınımlar gibi birçok doğrusal olmayan davranış sergiler. Döner ters sarkacının kontrolü, doğrusal olmayan doğası ve sistemin eksik tahrikle çalıştırılması nedeniyle zorlu bir problemdir, bu da sistemi stabilize etmek ve istenen yörüngeleri elde etmek için gelişmiş kontrol stratejileri gerektirir. Bu zorluklara rağmen, döner ters sarkaç, yeni kontrol algoritmaları ve tekniklerinin geliştirilmesi için yararlı bir test ortamı sağladığından, kontrol teorisi ve robotikte kapsamlı bir şekilde incelenmiştir.

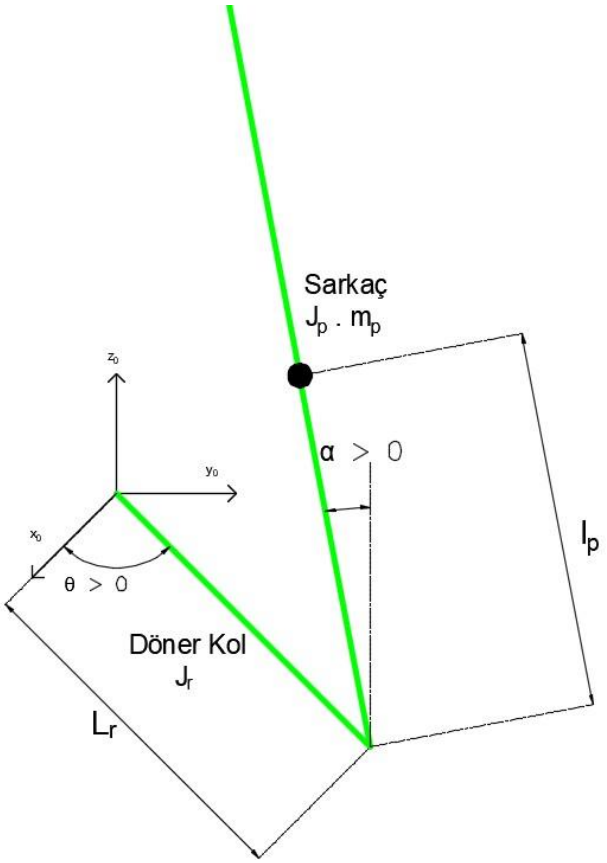
Klasik Kontrol Yaklaşımı olan PID kontrolü, basitliği ve etkinliği nedeniyle döner ters sarkacı stabilize etmek için yaygın olarak uygulanmıştır. [9-11] gibi çalışmalar farklı yaklaşımlarla PID kontrolörlerini uygulamış ve tatmin edici performans elde etmişlerdir. Kutup yerleştirme ve DKD gibi durum geri beslemeli kontrol teknikleri de döner ters sarkacı kontrol etmek için kullanılmıştır [12-14]. Yapılan çalışmalar, DKD tabanlı durum geri beslemeli kontrolün başarılı bir şekilde uygulandığını, gelişmiş stabilizasyon ve kontrol performansı elde edildiğini göstermektedir [13, 14]. Bulanık mantık kontrolü [15-16], döner ters sarkaç da dahil olmak üzere doğrusal olmayan ve karmaşık sistemlerin kontrolünde popülerlik kazanmıştır. Oh ve ark. [15] tarafından yapılan çalışmada kontrolör parametreleri hiyerarşik adil rekabet tabanlı genetik algoritma ile belirlenmiştir. Nguyen ve ark. [16] tarafından ise kayan kipli kontrol esnasında oluşan çatırdama etkisini azaltabilen ve kontrol performansını artırabilen bulanık tabanlı bir üstün burulma stabilizasyon algoritması önerilmiştir. Döner ters sarkacın kontrolü için sinir ağlarının kullanımı umut verici sonuçlar göstermiştir. Soydemir ve ark. [7] ve Bulucu ve ark. [8] tarafından yapılan çalışmalarda, sistem dinamikleri içerisinde doğrusal olmayan kısımları öğrenmek ve uygun kontrol girişini elde etmek için sinir ağı kontrolörleri kullanılmıştır. Kayan kipli kontrol, bozanetken ve belirsizliklere karşı sağlamlığı ile bilinir. Birçok çalışmada, döner ters sarkacı stabilize etmek için kayan kipli kontrolünü başarıyla kullanılmış ve bozanetken reddi gösterilmiştir [16, 17]. Kademeli kontrol, iç içe geçmiş bir yapıda iki veya daha fazla kontrolörün kullanılmasını içerir; burada dış döngü kontrolörünün çıkışı, iç döngü kontrolörü için ayar noktası haline gelir. Akhtaruzzaman ve Shafie [9] tarafından yapılan çalışmada iki PID kontrolörü ile kademeli kontrol yapılmıştır. Güneş ve ark. [6] tarafından ise geribeslemeli doğrusallaştırmayla beraber iki PID kontrolör kademeli olarak uygulanmıştır.

Bu çalışmada döner ters sarkaç sisteminin stabilizasyonu için geribeslemeli doğrusallaştırma tabanlı kademeli kontrolü önerilmiştir. Önerilen bu yöntemde, iç döngü kontrolörü olarak geribeslemeli doğrusallaştırma ve PD kontrolör kullanılırken, dış döngü kontrolörü olarak da DKD kullanılmıştır. İç döngü kontrolörü döner kolu kontrol

etmekten sorumluyken, dış döngü kontrolörü sarkacı stabilize etmeye odaklanmaktadır. Güneş ve ark. [6] tarafından bağımlı kontrol için sarkaç açısı geri beslenmiştir. Fakat kademeli kontrol tasarımında iç döngü dış döngüden daha hızlı çalışmalı ve ana kontrolörün belirlediği ayar değerine hızlı tepki vererek sistemi kontrol etmelidir. Bu sebeple, önerilen yöntemde Güneş ve ark. [6] tarafından yapılan çalışmadan farklı olarak kademeli kontrolör tasarlama gereksinimlerini karşılayacak şekilde bağımlı kontrol için döner kol açısı geri beslenmiştir. Ayrıca, önerilen yöntemde, kontrol parametrelerini belirlemek için genetik algoritma gibi yüksek işlem yükü gerektiren bir yöntem [6] yerine, kontrol parametrelerinin doğrudan hesaplanabildiği işlem yükü daha az yöntemler kullanılmıştır. Önerilen yöntem, standart DKD ve Güneş ve ark. [6] yaptığı çalışmadaki kademeli kontrolör ile karşılaştırılmış ve daha iyi performans sergilediği gösterilmiştir. Ek olarak, önerilen geri besleme tabanlı kademeli kontrol yaklaşımı bozanetken varlığında da daha iyi performans göstermektedir.

II. DÖNER TERS SARKAÇ SİSTEMİ VE MATEMATİKSEL MODELİ

Ters sarkaç sistemleri üzerine etki eden kuvvetler hesaba katıldığında doğrusal olmayan sistemlerdir. Her ters sarkaç sistemi kontrol etmek istenildiğinde farklı zorluklara sahiptir ve sistemi dengede tutmak için farklı kontrol stratejileri gerekmektedir. Döner ters sarkaç, serbestlik derecesinden daha az kontrol girdisine sahip bir dinamik sistem olduğu için eksik tahrikli bir sistemdir. Şekil 1'de döner sarkaç sisteminin temsili bir görseli verilmiştir. Burada, döner kol bir motora bağlı iken sarkaç serbesttir ve hareketi dolaylı olarak döner kol üzerinden sağlanmaktadır.



Şekil 1. Döner ters sarkacın basitleştirilmiş çizimi

2.1 Döner Ters Sarkaç Sistemine ait Hareket Denklemleri

Döner ters sarkaç sisteminde hareket denklemleri, detaylarına Balula [18] tarafından yapılan çalışmadan ulaşılabileceği şekilde Lagrange mekaniği kullanarak aşağıdaki gibi türetilebilir.

$$\begin{aligned}&\ddot{\theta}\left(J_0 + J_2\sin^2(\alpha)\right) + \dot{\alpha}\dot{\theta}J_2\sin(2\alpha) + \dot{\alpha}^2 m_p l_p L_r \sin(\alpha) - \ddot{\alpha} m_p l_p L_r \cos(\alpha) = \tau_1 - B_1\dot{\theta}\\ &-\ddot{\theta} m_p l_p L_r \cos(\alpha) - \dot{\theta}^2 \frac{1}{2} J_2 \sin(2\alpha) + \ddot{\alpha} J_2 - m_p l_p g \sin(\alpha) = \tau_2 - B_2\dot{\alpha}\end{aligned} \tag{1}$$

Burada θ döner kol açısı, $\dot{\theta}$ bu kolun açısal hızı, $\ddot{\theta}$ döner kola ait açısal ivme, α sarkaç açısı, $\dot{\alpha}$ sarkacın açısal hızı, $\ddot{\alpha}$ sarkaca ait açısal ivme ve g yerçekiminden kaynaklanan ivmedir. m_p, l_p ve L_r'de Şekil 1'de gösterildiği gibi sırasıyla sarkacın kütlesini, sarkacın kütle merkezinin bağlantı noktasına olan uzaklığını ve döner kolun uzunluğunu temsil etmektedir. B_1 taban ve döner kol arasındaki sürtünme katsayısıdır. B_2 döner kol ve sarkaç arasındaki sürtünme katsayısıdır. Ayrıca, J_0 döner kolun ve sarkacın ana eklemdeki atalet momentini ifade etmektedir ve döner kolun kütle merkezindeki atalet momenti bileşeni J_r cinsinden $J_0 = J_r + m_p {L_r}^2$ olarak tanımlanabilir. J_2 sarkaç eklemindeki atalet momentini ifade etmektedir ve sarkacın kütle merkezindeki atalet momenti bileşeni J_p cinsinden $J_2 = J_p + m_p {l_p}^2$ olarak tanımlanabilir. τ_1, motor tarafından uygulanan torktur. τ_2 ise sarkaca uygulanan bozanetkene ait torku ifade etmektedir.

2.2 Döner Ters Sarkacının Doğrusal Olmayan Durum Uzay Gösterimi

(1)'deki denklemler döner kol ve sarkaç arasındaki sürtünmenin ihmal edildiği durumda ($B_2 = 0$) açısal ivmeler yalnız bırakılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{\alpha}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_0 + J_2\sin^2(\alpha) & -m_p l_p L_r \cos(\alpha)\\ -m_p l_p L_r \cos(\alpha) & J_2\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}\tau_1 - B_1\dot{\theta} - \dot{\alpha}\dot{\theta}J_2\sin(2\alpha) - \dot{\alpha}^2 m_p l_p L_r \sin(\alpha)\\ \tau_2 + \dot{\theta}^2 \frac{1}{2} J_2 \sin(2\alpha) + m_p l_p g \sin(\alpha)\end{bmatrix} \tag{2}$$

Burada, durum uzay değişkenleri $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = \alpha$ ve $x_4 = \dot{\alpha}$ olarak tanımlanarak ve (2)'deki denklem kullanılarak aşağıdaki durum uzay denklemi elde edilebilir.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3\\ \dot{x}_2 &= x_4\end{aligned} \tag{3}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{m_p l_p L_r \cos(x_2)\left(\frac{J_2 \sin(2x_2){x_3}^3}{2} + \tau_2 + m_p l_p g \sin(x_2)\right)}{{J_2}^2 \sin^2(x_2) + J_0 J_2 - \left(m_p l_p L_r \cos(x_2)\right)^2} - \frac{J_2\left(m_p l_p L_r \sin(x_2){x_4}^2 + J_2 x_3 x_4 \sin(2x_2) - \tau_1 + B_1 x_3\right)}{{J_2}^2 \sin^2(x_2) + J_0 J_2 - \left(m_p l_p L_r \cos(x_2)\right)^2}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{\left(J_0 + J_2 \sin^2(x_2)\right)\left(\frac{J_2 \sin(2x_2){x_3}^2}{2} + \tau_2 + m_p l_p g \sin(x_2)\right)}{{J_2}^2 \sin^2(x_2) + J_0 J_2 - \left(m_p l_p L_r \cos(x_2)\right)^2} - \frac{m_p l_p L_r \cos(x_2)\left(m_p l_p L_r \sin(x_2){x_4}^2 + J_2 x_3 x_4 \sin(2x_2) - \tau_1 + B_1 x_3\right)}{{J_2}^2 \sin^2(x_2) + J_0 J_2 - \left(m_p l_p L_r \cos(x_2)\right)^2}$$

Döner ters sarkaç sisteminde DC motor kullanılmaktadır ve motor torkunun ifadesi $\tau_1 = \eta_m \eta_g K_t K_g\left(V_m - K_g K_m x_3\right)/R_m$ (3)'deki denklemde yerine koyularak durum uzay gösterimi motor voltajı V_m'in giriş olduğu durum için aşağıdaki gibi yazılabilir. Burada η_m motorun verimliliğini, η_g dişli kutusu verimliliği, K_t motor tork sabiti, K_g motor dişli oranı, K_m motor voltaj sabiti ve R_m motorun armatür direncidir. Motora ve döner ters sarkaca ait bu değerler Tablo 1'de verilmiştir.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)V_m + d(x)\tau_2 \tag{4}$$

Burada, $x = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T$, $f(.): R^4 \to R^4$, $g(.): R^4 \to R^4$, $d(.): R^4 \to R^4$ olarak tanımlanan fonksiyonlardır ve aşağıda açık halleri verilmiştir:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{-J_2\left(J_2 x_3 x_4 \sin(2x_2) + \frac{K_m K_t n_g n_m {K_g}^2 x_3}{R_m} - m_p l_p L_r \sin(x_2)\cos^2(x_2){x_3}^2 + B_1 x_3 + m_p l_p L_r \sin(x_2){x_4}^2 - \frac{{m_p}^2 {l_p}^2 L_r g \sin(2x_2)}{2}\right)}{{J_2}^2 \sin^2(x_2) + J_0 J_2 - \left(m_p l_p L_r \cos(x_2)\right)^2} \\ \frac{{J_2}^2 x_3 x_4 \sin(2x_2) + \frac{K_m K_t n_g n_m J_2 {K_g}^2 x_3}{R_m} - m_p l_p L_r\left(\sin(x_2)\cos^2(x_2)\right) J_2 {x_3}^2 + B_1 J_2 x_3 + m_p l_p L_r \sin(x_2) J_2 {x_4}^2 - \frac{{m_p}^2 {l_p}^2 L_r g \sin(2x_2)}{2}}{-R_m\left({J_2}^2 \sin^2(x_2) + J_0 J_2 - \left(m_p l_p L_r \cos(x_2)\right)^2\right)} \end{bmatrix},$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{J_2 K_g K_t n_g n_m}{R_m\left({J_2}^2 \sin^2(x_2) + J_0 J_2 - \left(m_p l_p L_r \cos(x_2)\right)^2\right)} \\ \frac{K_g K_t n_g n_m m_p l_p L_r \cos(x_2)}{R_m\left({J_2}^2 \sin^2(x_2) + J_0 J_2 - \left(m_p l_p L_r \cos(x_2)\right)^2\right)} \end{bmatrix}, \quad d(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_p l_p L_r \cos(x_2)}{\left({J_2}^2 \sin^2(x_2) + J_0 J_2 - \left(m_p l_p L_r \cos(x_2)\right)^2\right)} \\ \frac{J_0 + J_2 \sin^2(x_2)}{\left({J_2}^2 \sin^2(x_2) + J_0 J_2 - \left(m_p l_p L_r \cos(x_2)\right)^2\right)} \end{bmatrix}.$$

Ayrıca, motor voltajı V_m kontrol girişini ve sarkaca uygulanan tork τ_2 bozanetkeni temsil etmektedir.

III. KONTROLÖR TASARIMI

(4)'deki denklemde ters sarkaca ait doğrusal olmayan dinamik denklem verilmiştir. Bu bölümde, bozanetken ihmal edilerek elde edilen (5)'te tanımlanan sistemin matematiksel modeli kullanılarak geribeslemeli doğrusallaştırma tabanlı kademeli kontrolü tasarlanmıştır.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)V_m$$
$$y = h(x) = x_1 \tag{5}$$

Bu kademeli kontrolde iç döngü kontrolü (bağımlı kontrolör) olarak döner kol açısının çıkış olarak alındığı giriş-çıkış geribeslemeli doğrusallaştırma ile birlikte PD kontrolör uygulanmıştır. İç döngüde kullanılan geri beslemeli doğrusallaştırmanın bağıl derecesi ikidir ve uygulanan PD kontrolör ile döner kol açısı ve hızının kontrolü amaçlanmıştır. Fakat, geribeslemeli doğrusallaştırma tabanlı bu iç döngü kontrol sistemi kararsız sıfır dinamiklere sahiptir. Bu sebeple ana kontrolcü olarak kullanılan doğrusal karesel düzenleyici ile iç döngüde bulunan kontrol sisteminin referans denge noktası civarında kararlı olması sağlanacak şekilde tasarlanmış ve bu sayede kararsız dinamikler ele alınarak kademeli kontrolün kararlı olması sağlanmıştır. Bu kontrolörlerin detayları aşağıdaki alt bölümlerde açıklanmıştır.

3.1 İç Döngü (Bağımlı) Kontrolör Tasarımı

Geribeslemeli doğrusallaştırma, doğrusal olmayan bir dinamik sistemi geri besleme kullanarak eşdeğer bir doğrusal sisteme dönüştüren bir kontrol sistemi tasarım tekniğidir. Bu çalışmada tek girişli tek çıkışlı ters sarkaç sisteminin (5)'deki doğrusal olmayan durum uzay gösterimi kullanılarak giriş-çıkış geribeslemeli doğrusallaştırma yapılmıştır. Bu sayede elde edilen doğrusal sisteme iyi tanımlı doğrusal kontrol yöntemleri uygulanabilmektedir.

Herhangi bir $\boldsymbol{x} \in D_0$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa (5) doğrusal olmayan sisteminin $D_0 \subset D$ bölgesinde r bağıl derecesine sahip olduğu söylenir [19]:

$$L_g L_f^i h(x) = 0, \qquad i \in \{0,1,\cdots,r-2\}$$
$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \tag{6}$$

Burada, $L_f h(x)$ Lie türevi olarak adlandırılır ve $L_f^k h(x) = L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(L_f^{k-1} h(x)\right) f(x)$ ve $L_g L_f^k h(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(L_f^k h(x)\right) g(x)$ olarak tanımlıdır. Eğer bir sistem r bağıl derecesine sahipse, çıkışın r'inci türevi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u \tag{7}$$

Dolayısıyla, (7) aşağıdaki kontrol girişi ile giriş-çıkış doğrusallaştırılabilir

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \left(-L_f^r h(x) + v\right) \tag{8}$$

ve (8)'deki kontrol girişinin (7)'ye uygulanmasıyla aşağıdaki doğrusallaştırılmış sistem elde edilir.

$$y^{(r)} = v \tag{9}$$

İç döngü kontrolcü tasarımında (5)'de gösterildiği gibi çıkış döner kol açısı olarak alınmış ve (6) kullanılarak bağıl derece 2 olarak hesaplanmıştır. Bu durumda bağımlı kontrol için geribeslemeli doğrusallaştırma girişi aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{L_g L_f^1 h(x)} \left(-L_f^2 h(x) + v\right) = \\ &= \frac{1}{g_3(x)} \left(-f_3(x) + v\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Burada, v doğrusallaştırılmış sisteme ait yeni kontrol girişi, $f_3(x)$ (5)'deki $f(x)$ vektörel fonksiyonunun 3. elemanı ve $g_3(x)$ ise (5)'deki $g(x)$ vektörel fonksiyonunun 3. elemanıdır. (10)'daki kontrol girişi ile doğrusallaştırılan sisteminin kontrolü için Şekil 1'de gösterildiği gibi PD kontrolü seçilmiş ve yeni giriş:

$$\begin{aligned} v &= K_{\boldsymbol{p}}(r - \theta) + K_d\left(r - \dot{\theta}\right) \\ &= K_{\boldsymbol{p}}(r - x_1) + K_d(\dot{r} - x_3) \end{aligned} \tag{11}$$

olmuştur.

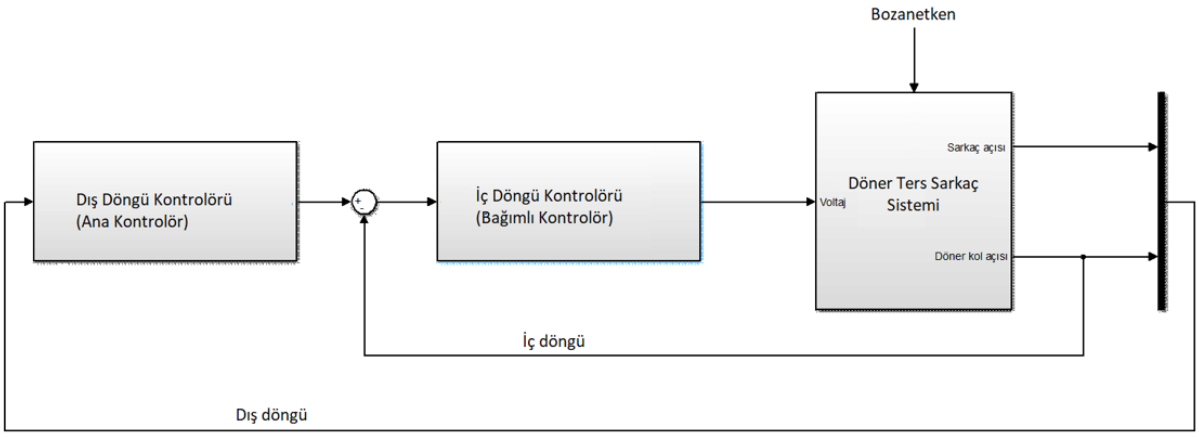
3.2 Dış Döngü (Ana) Kontrolör Tasarımı

Bağımlı kontrolörde uygulanan geribeslemeli doğrusallaştırma tabanlı kontrolün referans girişi Şekil 2'de gösterildiği gibi ana kontrolör tarafından belirlenmektedir ve ana kontrolör olarak doğrusal karesel düzenleyici kullanılmıştır. Sürekli zamanlı sistemler için DKD, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu}$ kısıtı altında $J(\boldsymbol{u}) = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{u}) dt$ ikinci dereceden bir maliyet fonksiyonunu en aza indirerek dinamik bir sistemi

kontrol etmek için $u = -\boldsymbol{Kx}$ durum geribesleme kontrolündeki kazanç değerinin ($\boldsymbol{K}$) belirlenmesini sağlar [20]. DKD'nin uygulanabilmesi için (5)'teki sisteme bağımlı kontrolör tarafından uygulanan (10) ve (11)'deki kontrol girişleri ile elde edilen iç döngü kontrol sistemi, $[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad r \quad \dot{r}] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ denge noktası civarında aşağıda ifadesi verildiği üzere doğrusallaştırılmıştır:

$$\dot{x} = Ax + bv. \tag{12}$$

Burada $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K_{\boldsymbol{p}} & 0 & -K_d & 0 \\ \frac{-K_{\boldsymbol{p}} m_p l_p L_r}{J_2} & \frac{m_p l_p g}{J_2} & \frac{-K_d m_p l_p L_r}{J_2} & 0 \end{bmatrix}$ ve $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{\boldsymbol{p}} \\ \frac{K_{\boldsymbol{p}} m_p l_p L_r}{J_2} \end{bmatrix}$'dir. Şekil 1'de DKD'nin ana kontrolör olarak uygulanması gösterilmiştir. Bu ana kontrol, iç döngü kontrol sisteminin dinamiklerini baz alarak tasarlandığı için bağımlı kontrolörde uygulanan geribeslemeli doğrusallaştırma tabanlı kontrol sonucu oluşan kararsız dinamiklerin toplam kademeli kontrolde kararlı olması sağlanmıştır.



Şekil 2. Döner ters sarkaç sistemi için önerilen kademeli kontrolün blok diyagramı

IV. BENZETİM SONUÇLARI

Döner ters sarkacın kontrolü için şematik olarak Şekil 3'te önerilen geribesleme tabanlı kademeli kontrol yöntemi iki kontrol yöntemi ile karşılaştırılmıştır. Bunlardan biri Şekil 4'te gösterildiği gibi Güneş ve ark. [6] yaptığı çalışmadan alınan kademeli kontrol yöntemidir. Diğeri ise Şekil 5'teki standart kontrol yöntemi olan DKD'dir. Tablo 1'de döner ters sarkaç sistemine ait parametrelerin açıklamaları ve benzetimde kullanılan değerleri verilmiştir.

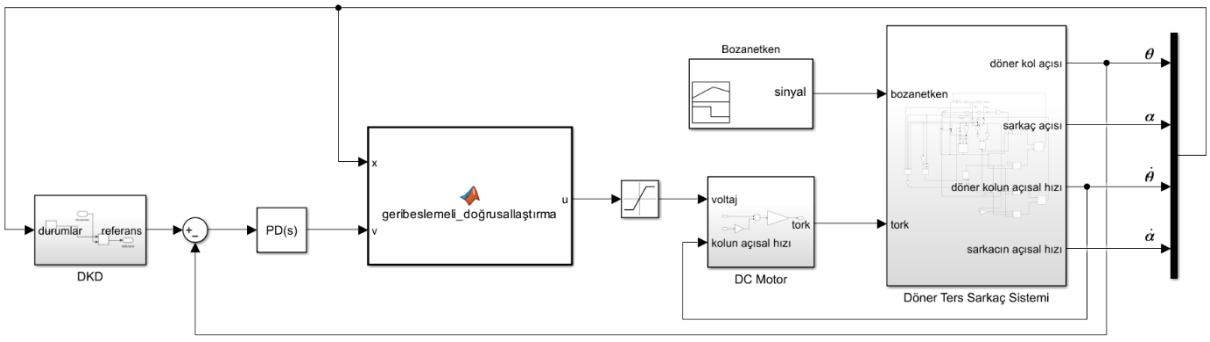
Tablo 1. Döner ters sarkaç sistemine ait parametrelerin açıklamaları ve benzetimde kullanılan değerler.

Sembol	Açıklama	Değerler
m_p	Sarkacın kütlesi	0.125 *kg*
l_p	Sarkacın kütle merkezinin bağlantı noktasına olan uzaklığı	0.1675 *m*
L_r	Döner kolun uzunluğunu	0.215 *m*
J_0	Döner kolun ve sarkacın ana eklemdeki atalet momenti	0.0091 $kg.m^2$
J_2	Sarkaç eklemindeki atalet momenti	0.0047 $kg.m^2$
g	Yer çekimi ivmesi	9.81 m/s^2
B_1	Taban ve döner kol arasındaki sürtünme katsayısı	0.0077 *N.m.s/rad*
η_m	Motor verimliliği	0.69
η_g	Dişli kutusu verimliliği	0.9
K_t	Motor tork sabiti	0.0077 *N.m/A*
K_g	Motor dişli oranı	70
K_m	Motor voltaj sabiti	0.0077 *V/(rad/s)*
R_m	Motor armatür direnci	2.6 Ω

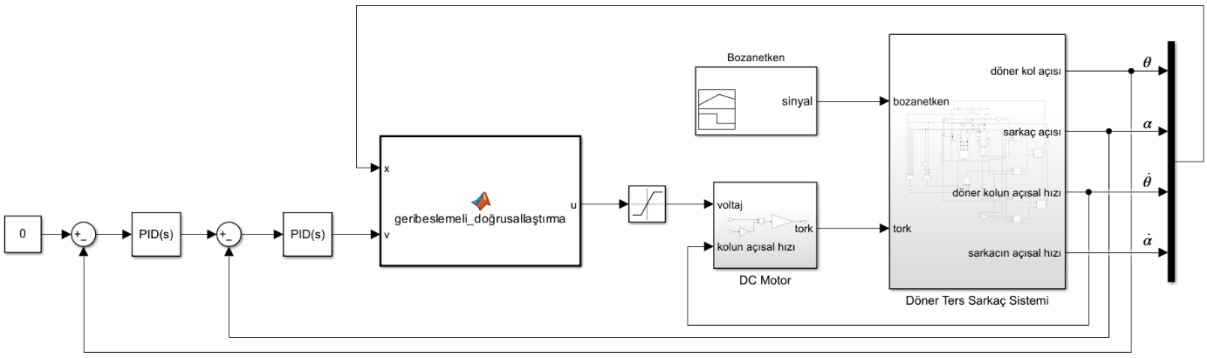
Bu parametreler Güneş ve ark. [6] tarafından elde edilen sonuçla karşılaştırabilmek için bahsedilen bu çalışmadan alınmıştır. Benzetimler MATLAB R2022b ile Simulink kullanılarak yapılmıştır. Döner ters sarkaç sisteminin motor voltaj değerleri -12 V ve +12 V ile sınırlandırılmıştır. Bu yöntemler içerisinde bulunan DKD'nin tasarımında kullanılan **Q** ve **R** değerleri sırasıyla

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$ ve 1 olarak seçilmiştir.

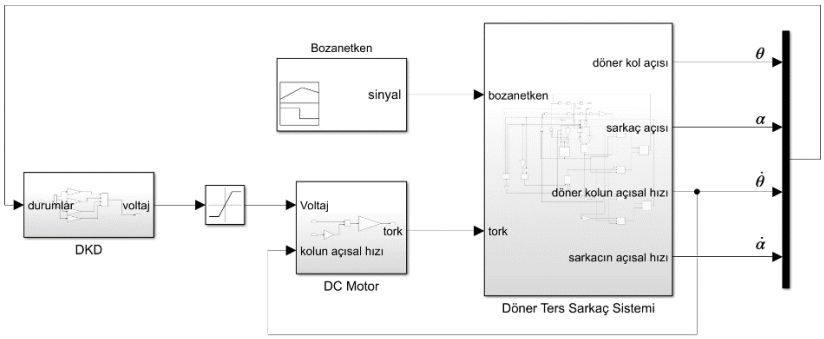
Böylece önerilen yöntem için DKD kazancı $\boldsymbol{K} = [-4.3166 \quad 87.9655 \quad -5.9349 \quad 13.6371]$ ve karşılaştırılan DKD için ise $K = [-3.1623 \quad 60.98 \quad -4.81 \quad -9.4968]$ olarak bulunmuştur. Şekil 4'teki kademeli kontrolde iç ve dış döngülerde bulunan PID kontrolör parametreleri ise Güneş ve ark. [6] yaptığı çalışmadan alınmıştır. Önerilen yöntemde, bağıl derecesi 2 olan geribeslemeli doğrusallaştırma sonucu elde edilen (9)'daki sistem için iç döngüde kullanılan PD parametreleri $K_p = 3.1623$ ve $K_d = 4.04$, DKD tabanlı optimal değerler olarak hesaplanmıştır [21,22].



Şekil 3. Döner ters sarkacın önerilen geribesleme doğrusallaştırma tabanlı kademeli kontrolü



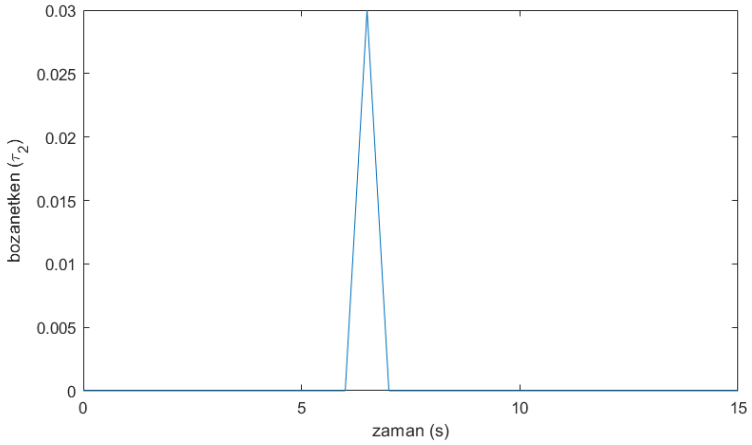
Şekil 4. Döner ters sarkacın Güneş ve ark. [6] yaptığı çalışmada tanıtılan kademeli kontrolü



Şekil 5. Döner ters sarkacın doğrusal karesel düzenleyici ile kontrolü

Kademeli kontrolörde ana kontrolörün çıkışı, bağımlı kontrolörün referansıdır ve iç döngü kontrol değişkeninin dış döngü kontrol değişkeninden daha hızlı çalışması gerekir. Bu dış döngünün, iç döngü kontrol sistemindeki bozanetkeni telafi etmek için yeterli zamana sahip olmasını sağlar. Ayrıca, bu iç döngünün kontrol değişkeni dış döngünün kontrol değişkenini etkileyebilmelidir. Şekil 4'teki kademeli kontrolde iç döngü kontrolörü ile sarkaç açısı kontrol edilmekte ve bahsedilen koşullar sağlanmamaktadır. Şekil 3'te önerilen kademeli kontrolörde ise iç döngü kontrolörü ile döner kol açısı üzerinden PD kontrolü çalışmaktadır. Döner kolun daha hızlı çalışması ve sarkaçta oluşan bozanetkene karşı bu hızlı tepki, dış döngü kontrolörü ile sarkaç açısının Tablo 2'de gösterildiği gibi $5.1636\text{x}10^{-4}$ en düşük Ortalama Karesel Hata (OKH) değeri ile daha iyi bir performansla kontrol edilmesini sağlamaktadır. Şekil 6'daki bozanetken döner sarkaca (4)'deki matematiksel modelde gösterildiği gibi τ_2 üzerinden uygulanmıştır performans iyileştirilmesi Şekil 7'de gösterilmiştir. Burada karşılaştırılan kademeli kontrolörün bozanetkene karşı Tablo 2'de belirtilen $20\text{x}10^{-4}$ en yüksek OKH değeri ile sağlam olmadığı gözlenmektedir. Önerilen yöntem ise kademeli kontrolör gereksinimlerine uygun olarak tasarlanmasıyla bu bozanetkene karşı Şekil 7 ve Tablo 2'de gösterildiği gibi daha sağlam bir cevap sergilemiştir. Önerilen yöntem Şekil 5'teki standart DKD ile de karşılaştırılmış ve sarkaç açısının kontrolünde daha iyi performans gösterdiği Şekil 7'de gösterilmiştir. Sarkaç açısının OKH cinsinden elde edilen değerleri Tablo 2'de verilmiştir. Bu değerlere göre önerilen geribeslemeli doğrusallaştırma tabanlı kademeli kontrol yönteminin bozanetken olmadığı ve olduğu her iki durumda sırasıyla elde edilen $9.3066\text{x}10^{-5}$ ve $5.1636\text{x}10^{-4}$ OKH değerleriyle en iyi performansı sergilediği gözlenmiştir. Sarkacın stabilizasyonu esnasında döner kol açısının zamanla değişimi Şekil 8'de verilmiştir. Ayrıca,

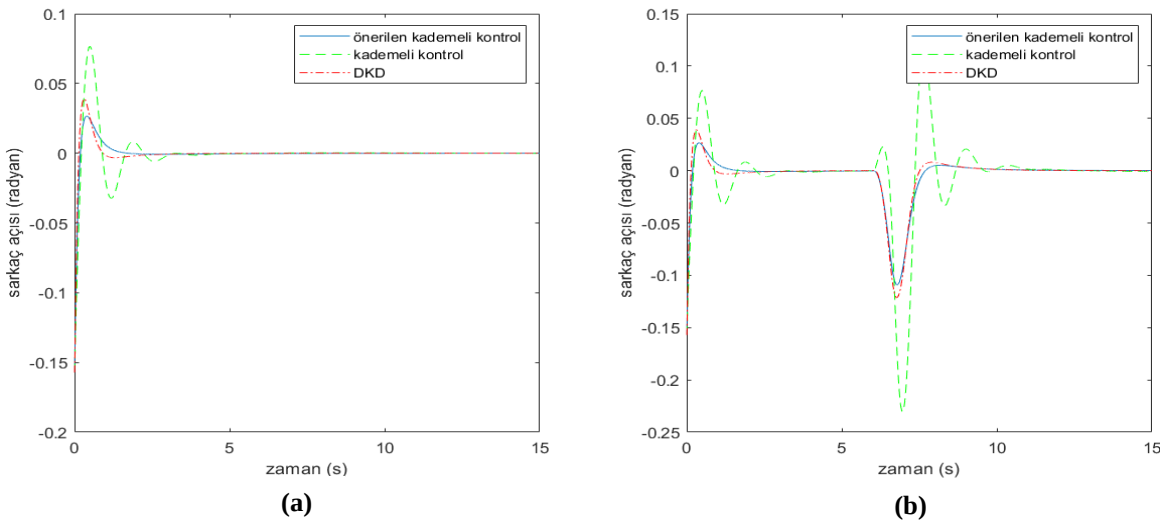
önerilen yöntemdeki iç döngüde kullanılan geribeslemeli doğrusallaştırma ile bağıl derecesi 2 olacak şekilde giriş-çıkış doğrusallaştırma yapılmış ve bu doğrusal sistem için iyi tanımlı bir PD kontrolör elde edilmesi sağlanmıştır. İç döngüdeki bağımlı kontrolörün döner kol açısını kontrol edecek şekilde ayarlanmasıyla, eksik tahrik olan sistem tek giriş-tek çıkış olacak şekilde bir iç döngü kontrol sistemi oluşturmuştur. Böylece, dış döngüde kullanılan DKD ile bu iç döngü kontrol sistemi ele alınmış ve iç döngü kontrol sistemindeki kararsız iç dinamiklerle birlikte toplam sistemin denge noktası civarında kararlı olması sağlanmıştır.



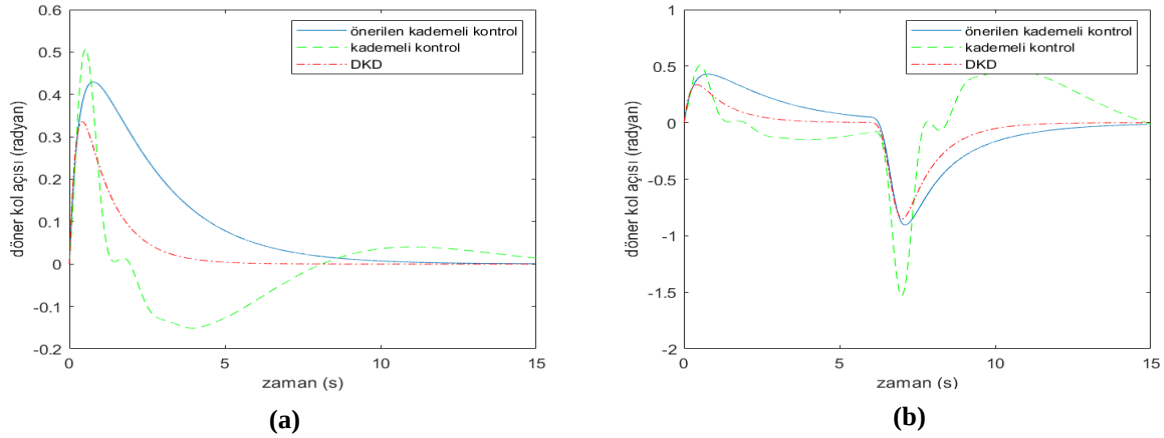
Şekil 6. Sarkaca uygulanan bozanetkene ait tork: (4)'teki sistem dinamiklerinde τ_2 olarak tanımlanmıştır.

Tablo 2. Döner ters sarkaç sisteminin stabilizasyonunda farklı kontrol sistemlerine ait sarkaç açısı için hesaplanan KOKH değerleri.

Kontrolör	Bozanetken olmadığında OKH	Bozanetken olduğunda OKH
Önerilen Kademeli Kontrolör	9.3066×10^{-5}	5.1636×10^{-4}
Kademeli Kontrolör	26.421×10^{-5}	20×10^{-4}
DKD	9.6920×10^{-5}	5.8641×10^{-4}



Şekil 7. Döner ters sarkacın üç farklı kontrolör ile denge noktasında stabilizasyonunu esnasında sarkaç açısının zamanla değişimi **(a)** Sarkaçta bozanetken olmadığında **(b)** Sarkaçta bozanetken olduğunda



Şekil 8. Döner ters sarkacın üç farklı kontrolör ile denge noktasında stabilizasyonunu esnasında döner kol açısının zamanla değişimi **(a)** Sarkaçta bozanetken olmadığında **(b)** Sarkaçta bozanetken olduğunda

IV. SONUÇLAR

Bu çalışmada, döner ters sarkaç sisteminin stabilizasyonu için geribeslemeli doğrusallaştırma tabanlı kademeli bir kontrol yöntemi önerilmiştir. Bu kontrol yöntemi, biri yine kademeli kontrolör diğeri ise standart DKD ile karşılaştırılmıştır. Önerilen kontrol, kademeli kontrolör tasarlama gereksinimlerini karşılamaktadır ve sarkaca uygulanan bozanetkene karşı daha sağlam olduğu gösterilmiştir. İki ayrı kontrolörle performansları karşılaştırılmış ve Tablo 2'de sunulan en düşük 9.3066×10^{-5} ve 5.1636×10^{-4} OKH değerleriyle daha iyi sonuçlar elde edilmiştir. Önerilen bu yöntemdeki iç döngü kontrolörü ile sistem bağıl derecesi 2 olacak şekilde doğrusallaştırılmış ve eksik tahrik olan sistem bu bağımlı kontrolör sayesinde tek giriş-tek çıkış olacak şekilde bir iç döngü kontrol sistemi oluşturmuştur. Böylece dış döngü kontrolörü için DKD yerine tek giriş-tek çıkış sistemler için özel olarak tasarlanan diğer kontrol yöntemleri uygulanabilir ve performans daha da iyileştirilebilir. Ayrıca, kademeli kontrol ile makine öğrenimi ve veri odaklı kontrol yaklaşımlarının entegrasyonu ve döner sarkaç için gelişmiş kontrol stratejileri geliştirmek üzere bu tekniklerin kombinasyonunu daha sonraki çalışmalarda keşfedebilir.

KAYNAKLAR

[1] Aguilar-Ibáñez C, Mendoza-Mendoza J, Dávila J (2014) Stabilization of the cart pole system: by sliding mode control. Nonlinear Dyn 78:2769–2777. https://doi.org/10.1007/s11071-014-1624-6
[2] Manrique Escobar CA, Pappalardo CM, Guida D (2020) A parametric study of a deep reinforcement learning control system applied to the swing-up problem of the cart-pole. Appl Sci-Basel 10(24):9013. https://doi.org/10.3390/app10249013
[3] Inoue A, Deng MC (2009) Non-linear control of under-actuated mechanical systems**.** Int J Modell Identif Control 6(1):32-39. https://doi.org/10.1504/IJMIC.2009.023528
[4] Mehedi IM, Al-Saggaf UM, Mansouri R, Bettayeb M (2019) Stabilization of a double inverted rotary pendulum through fractional order integral control scheme. Int J Adv Rob Syst 16(4). https://doi.org/10.1177/1729881419846741
[5] Peng Z, Xin X, Liu Y (2023) Energy-based swing-up control for a two-link underactuated robot with flexible first joint. Nonlinear Dyn 111:289–302. https://doi.org/10.1007/s11071-022-07831-7
[6] Güneş U, Sel A, Kürkçü B, Kasnakoğlu C (2020) A comparison of H-infinity-synthesis and feedback linearization for rotary inverted pendulum. 11th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering (ICMAE), Athens, GREECE, Jul. 14–17. https://doi.org/10.1109/ICMAE50897.2020.9178849

[7] Soydemir MU, Şahin S, Bulucu P, Kocaoğlu A, Güzeliş C (2019) Learning feedback linearization based stable robust adaptive NARMA controller design for rotary inverted pendulum. 11th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ELECO), Bursa, Turkey, 795-799. https://doi.org/10.23919/ELECO47770.2019.8990417
[8] Bulucu P, Soydemir MU, Şahin S, Kocaoğlu A, Güzeliş C (2019) Performance analysis of stable adaptive NARMA controller scheme for furuta pendulum. 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC), Sinaia, Romania, 350-354. https://doi.org/10.1109/ICSTCC.2019.8885779
[9] Akhtaruzzaman M, Shafie AA (2010) Modeling and control of a rotary inverted pendulum using various methods, comparative assessment and result analysis. IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, Xi'an, China, 1342-1347. https://doi.org/10.1109/ICMA.2010.5589450
[10] Demirtaş M, Altun Y, İstanbullu A (2013) Virtual laboratory for sliding mode and PID control of rotary inverted pendulum. Comput Appl Eng Educ 21: 400-409. https://doi.org/10.1002/cae.20484
[11] Tang TF, Chong SH, Pang KK (2019) Stabilisation of a rotary inverted pendulum system with double-PID and LQR control: experimental verification. Int J Autom Control 14(1):18. https://doi.org/10.1504/IJAAC.2020.103799
[12] Nath V and Mitra R (2014) Swing-up and control of rotary inverted pendulum using pole placement with integrator. Recent Advances in Engineering and Computational Sciences (RAECS), Chandigarh, India, 1-5. https://doi.org/10.1109/RAECS.2014.6799545.
[13] Park M, Kim YJ, Lee JJ (2011) Swing-up and LQR stabilization of a rotary inverted pendulum. Artif Life Rob 16, 94–97. https://doi.org/10.1007/s10015-011-0897-9
[14] Nghi HV, Nhien DP, Ba DX (2022) A LQR neural network control approach for fast stabilizing rotary inverted pendulums. Int J Precis Eng Manuf 23:45–56. https://doi.org/10.1007/s12541-021-00606-x
[15] Oh SK, Jung SH, Pedrycz W (2009) Design of optimized fuzzy cascade controllers by means of hierarchical fair competition-based genetic algorithms. Expert Syst Appl 36(9):11641-11651. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2009.03.027
[16] Nguyen NP, Oh H, Kim Y, Moon J, Yang J, Chen WH (2020) Fuzzy-based super-twisting sliding mode stabilization control for under-actuated rotary inverted pendulum systems. IEEE Access 8:185079-185092. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3029095
[17] Yiğit İ (2017) Model free sliding mode stabilizing control of a real rotary inverted pendulum. J Vib Control 23(10):1645–1662. https://doi.org/10.1177/1077546315598031
[18] Balula S (2016) Nonlinear control of an inverted pendulum. Dissertation, Tecnico Lisboa
[19] Khalil HK (2015) Nonlinear control. Pearson Educ., New York, USA
[20] Lewis FL, Vrabie D, Syrmos VL (2012) Optimal control. Wiley, New York, USA
[21] Das S, Pan I, Halder K, Das S, Gupta A (2013) LQR based improved discrete PID controller design via optimum selection of weighting matrices using fractional order integral performance index. Appl Math Modell 37(6):4253-4268. https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.09.022
[22] Kumar EV, Jerome J (2013) LQR based optimal tuning of PID controller for trajectory tracking of magnetic levitation system. Procedia Eng 64:254-264. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.09.097